Poukładać matematykę

(lub przynajmniej próbować)

część 2:

Toposy - nowe światy

GRZEGORZ JARZEMBSKI
d. Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu M. Kopernika w Toruniu.

Spis treści

(...) Ponieważ jesteśmy niepewni siebie, wymyślamy bardzo stabilny, sztywny system, który mógłby trzmać nas w pionie. Który by upraszczał niepotrzebne, jak nam się wydaje, skomplikowanie. A największym uproszczeniem jest myślenie biało-czarne, oparte na prostych antytezach. Rozumie Pan o czym mówię? Umysł ustala sobie zestaw ostrych przeciwieństw: biało-czarny, dzień-noc, góra-dół, kobieta-mężczyzna i one determinują całą naszą percepcję. Świat tak widziany jest o niebo prostszy, łatwo można między tymi biegunami nawigować, łatwo ustalać zasady postępowania, a szczególnie łatwo oceniać innych, często dla siebie samego rezerwując luksus niejasności. Ten rodzaj myślenia chroni od wszelkiej niepewności, ciach, ciach i wszystko jasne, tak albo tak, nie ma trzeciego wyjścia. Arystoteles-złoty cielec. (...) To chroni nas przed rzeczywistością, która zbudowana jest z mnogości bardzo subtelnych odcieni. Jeżeli ktoś myśli, że świat to zestaw jaskrawych przeciwieństw, jest chory. Wiem co mówię. To potężna dysfunkcja.

- A jaki jest świat?

- Zamazany, nieostry, migoczący, raz taki, innym razem inny, zależny od punktu widzenia.

Wojniczowi to wszystko zdawało się zbyt skomplikowane, było zbyt odległe od niego samego.

O.Tokarczuk, Empuzjon

.

„Teoria toposów” to druga część notatek, w których próbuję poukładać matematykę. Znajomość pierwszej części, poświęconej podstawom klasycznej, teoriomnogościowej matematyki nie jest koniecznym wstępem do lektury drugiej części. Ale nie jest też przeszkodą.

Zgodnie z przyjętą tu konwencją, nie zamierzam przedstawić teorii toposów w całej jej złożoności. Choćby dlatego, że wymagałoby to wcześniejszego przedstawienia ze wszelkimi niuansami niełatwego, czasem wręcz wyrafinowanego, języka tej teorii. Opowiem tu jedynie o pewnej podklasie toposów. Ta podklasa jest jednak na tyle obszerna, by jej poznanie dało możliwość wyobrażenia sobie problemów tej fundamentalnej teorii i znaczenia ich rozwiązań w kontekście poszukiwań odpowiedzi na pytanie „czym jest matematyka”.
Wybór omawianej tu podklasy toposów podyktowany jest tym, że należące do niej toposy można opisywać w intuicyjnie prostym (a nawet zachęcającym) języku, którego głównymi pojęciami są „miara równości” i „miara istnienia”. Pozwala to na ograniczenie posługiwania się specjalistycznym językiem teorii kategorii do absolutnego i łatwo przyswajalnego minimum[1] .

Jest też drugi powód: nie wierzę, że można w sposób przyjęty w tych notatkach opowiedzieć o „całej” teorii toposów. Nawet przy założeniu, że nikt inny oprócz mnie nie będzie tego czytał. Jest to niewykonalne, tak samo jak niewykonalne jest stworzenie kompletnej i matematycznie obiektywnej monografii poświęcenej tej teorii. Pięknie ujął to P. Johnstone tłumacząc łamiący standardy tytuł swojej monografii *„Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium”:*

The six blind men had never met an elephant before, so when one was brought to them, they each felt part of it to determine what it was like. One felt the legs and said „an elephant is like a tree,” one felt the ears and said „an elephant is like a banana leaf,” one felt the trunk and said „an elephant is like a snake”, and so on. But of course, AN ELEPHANT IS ALL OF THESE THINGS AND NONE OF THEM[2].

Cóż... . Nie pozostaje mi nic innego jak opowiedzieć o doświadczeniach (wyobrażeniach) wyniesionych ze spotkania z tym słoniem przez kolejnego ślepca...

---

[1]Niektóre przedstawione tu wyniki są nowe (oryginalne) ale większość z nich ma tylko „przyczynkarski charakter”. Niemniej zachęcam miłośników plagiatów do ich wykorzystania... .

[2]Polecam wizytę na stronie *https://ncatlab.org/nlab/show/topos*.

Rozdział 1

Logika intuicjonistyczna

Should we be monist or pluralist about logic?

1.1 Konsekwencja i implikacja

Teoria modeli v. teoria dowodu

Teoria modeli, której podstawą jest korespondencyjna teoria prawdy Tarskiego to, zdaniem wielu, dominująca część współczesnej logiki matematycznej. Niektórzy skłonni są nawet uznawać równość *logika = teoria modeli*[1].

Nie wszyscy. Y. Girard o „tradycji Tarskiego" pisał tak: *„This tradition is distinguished by an extreme platitude*[2]*: the connector „$\vee$" is translated by „or", and so on. This interpretation tells us nothing particularly remarkable about the logical connectors: its apparent lack of ambition is the underlying reason for its operationality. We are only interested in the denotation, true or false, of a sentence (...). Once again, this definition is ludicrous*[3] *from the point of view of logic, but entirely adequate for its purpose. The development of Model Theory shows this"* [13].

To samo, nieco inaczej: „teoria modeli jest, być może, ciekawa, ale przechodzi obok tego, co jest istotą logiki". Dla Girarda logika to: *„(...) study of* PATTERNS FOUND IN REASONING*. The task of the logician is to set down rules for distinguishing between valid and fallacious inference, between rational and flawed arguments"*[4].

Girard w centrum logiki stawia *teorię dowodu*. Ale chodzi o coś więcej - o uznanie, że podstawowym zadaniem logiki jest refleksja nad zasadami uzasadniania sądów[5].

O tej różnicy mówiliśmy już krótko w Części 1, w rozdziale „Prawda i dowód" przeciwstawiając „poszukiwanie prawd prawdziwości" Fregego logice założeniowej Gentzena, Łukasiewicza i Jaśkowskiego. Korzystając z języka Tarskiego powiemy: matematyzacja logiki zdaniowej proponowana przez Fregego to teoria aksjomatyczna, której jedyny model zamierzony jest reprezentowany przez *algebrę Boole'a wartości logicznych* - dwuelementowy zbiór wartości logicznych (reprezentowanych przez symbole „1"i „0') wraz z operacjami koniunkcji, alternatywy i negacji. Definicje tych operacji nie budzą kontrowersji gdyż są zgodne z rolą spójników *„i", „lub", „nieprawda, że..."* w językach naturalnych.

Wiemy też, że z implikacją jest pewien kłopot: ten spójnik odpowiada frazie *„jeżeli ... to ..."* a w modelu Fregego jego związek z relacją konsekwencji uległ, delikatnie mówiąc, pewnemu zaburzeniu. To „zaburzenie" uwidacznia się utratą niezależności implikacji - $A \to B$ to tylko synonim

[1] Tak to przynajmniej wygląda w programach studiow matematycznych.

[2] ang. banał

[3] groteskowy, niedorzeczny

[4] Proszę nie przywiązywać wagi do sformułowań „banał", „niedorzeczność" , „widoczny brak ambicji" które znalazły się w cytowanym tekście, a które należą raczej do języka polityki niż matematyki. Język Girarda różni się znacznie od beznamiętnego języka ogromniej większości prac matematycznych.

[5] Termin „reasoning" ma wiele odpowiedników w języku polskim: *rozumowanie, argumentacja, uzasadnienie, wywód* i parę innych.

alternatywy $\neg A \vee B$.

Jeśli podtrzymamy wszystkie paradygmaty wyznaczające ramy modelu Fregego to te kłopoty są nie do uniknięcia. Dwuelementowa skala wartości logicznych jest po prostu zbyt mała by pomieścić jeszcze jedną niezależną operację logiczną[6].

Jeżeli chcemy rozważać ten sam język ale z logiką, w której implikacja odzyska niezależność, to trzeba zrezygnować z paradygmatu ograniczającego zbiór wartości logicznych do „prawdy" i „fałszu"[7].

Ale dlaczego mamy to robić?

1.2 Źródła logiki intuicjonistycznej

W matematyce Cantora i Hilberta continuum $\mathcal{R}$ to zbiór punktów-liczb rzeczywistych. Każdy podzbiór $A \subseteq \mathcal{R}$ ma swoje dopełnienie - zbiór $\neg A = \{a \in \mathcal{R} : \neg(a \in A)\}$. To konsekwencja aksjomatu wyróżniania. Ponieważ ZFC korzysta z klasycznej logiki w której obowiązuje *prawo wyłączonego środka*, to formuła $(a \in A) \vee (a \in \neg A)$ jest zawsze prawdziwa. *Tertium non datur*[8].

Czy rzeczywiście? Przypomnijmy opisaną w Części 1 koncepcję kontinuum opisującą ten obiekt przestrzeń bezpunktową czyli przyznając pierwszeństwo strukturze zbiorów otwartych a punkty traktując jako wtórne. Brouwerowskie *locale* to topologia - rodzina zbiorów otwartych - zbudowana na bazie zbioru par liczb wymiernych. Punkt brouwerowskiego continuum jest reprezentowany przez rodzinę (zupełny filtr pierwszy) w tym *locale*. Konsekwentnie, przyjmijmy że podzbiory (podstruktury) kontinuum to jedynie podzbiory otwarte. Wówczas o „przynależności" punktu a do podstruktury A można myśleć tak:

- *$a \in A$ jeżeli - dla pewnych liczb wymiernych c, d, $c < a < d$ i $(c, d) \subset A$,*
- *$a \notin A$ jeżeli - dla pewnych liczb wymiernych c, d, $c < a < d$ i $(c, d) \cap A = \emptyset$.*

Nietrudno spostrzec, że przy tych ustaleniach klasyczna dychotomia logiczna *„A lub nieprawda, że A"* - przestaje obowiązywać: nie można pokazać, że $0 \in (0, 1)$ ani że $0 \notin (0, 1)$... . Relację między punktem 0 a odcinkiem otwartym $(0, 1)$ powinna opisywać inna wartość logiczna. Inna logika.

> To my stanowimy co jest uzasadnieniem prostych zdań - „$0 \in (0, 1)$", „$\neg(3 \in (1, 2))$". *„Mathematics does not depend on logic; on the contrary, logic is part of mathematics" (Brouwer).* To my skonstruowaliśmy ten szczególny obiekt matematyczny i tym samym mamy prawo określić logikę języka jego opisu.
> Odrzucenie prawa wyłączonego środka jest trudne, bo jest ono wpisane w powszechnie akceptowany sposób oglądu świata. To uwarunkowanie kulturowe[9]. Wprawdzie w naszej rzeczywistości ta zasada nie zawsze się sprawdza, ale tym chętniej wierzymy, że obowiązuje w idealnym platońskim świecie. Nie dziwi, że to prawo jest obecne w matematyce Hilberta, która miała ten idealny świat opisywać.

[6] Dwuelementowa algebra Boole'a $(\{0, 1\}, \wedge, \vee, \neg)$ jest zupełna, co oznacza, że każda funkcja $\{0, 1\}^2 \to \{0, 1\}$ jest opisywalna przez pewną formułę zdaniową z dwiema zmiennymi zdaniowymi i zbudowaną za pomocą tych trzech spójników. Jeśli implikacja ma być kolejną dwuargumentową operacją, to musi być w pełni zależna od tych trzech spójników.

[7] Założenie dwuwartościowości wymusza też uznanie *prawa wyłączonego środka* $A \vee \neg A$ i *prawa podwójnego przeczenia* $\neg\neg A \leftrightarrow A$.

[8] Trzeciej możliwości nie ma: albo zdanie jest prawdziwe albo fałszywe (a wtedy jego zaprzeczenie jest prawdziwe). Dlatego alternatywa $A \vee \neg A$ jest prawdziwa bez względu na wartość logiczną zdania A. To kolejna konsekwencja założenia, że klasyczna logika jest dwuwartościowa. Autorstwo tego prawa przypisuje się Arystotelesowi.

[9] Świadczy o tym nasz język. Alternatywę $(a = b) \vee (a \neq b)$ (czyli $(a = b) \vee \neg(a = b)$) zwykliśmy czytać: *a i b są równe lub nierówne"*. To oznacza prymat terminu „równe", bo przedrostek „nie" traktowany jest dopełniająco. Przywrócimy symetrię, czytając tę formułę tak: *„a i b są równe lub są rozróżnialne"*. Teraz oba człony alternatywy jednakowo domagają się uzasadnienia. I mniej pewne, że te stwierdzenia wzajemnie się dopełniają. „Rozróżnialność" - *apartness* - jest badana w ramach logiki intuicjonistycznej [11]). Np. w intuicjonistycznej definicji liczb rzeczywistych rozróżnienie liczb a, b wymaga wskazania liczby c takiej, że $ac - bc = 1$.
Leibniz rozumiał „równość" jako „nierozróżnialność". Russel to doprecyzował uznając, że dwa obiekty są równe, gdy nie są rózróżnialne w danym języku opisu.

W matematyce Brouwera prawdziwe jest to, co konstruktywnie uzasadnione. Prawdziwość zdania nie jest jego atrybutem niezależnym od naszej aktywności - wymaga uzasadnienia. Może się zdarzyć, że nie umiemy uzasadnić ani zdania A ani jego zaprzeczenia $\neg A$.
Oto przykład: *określmy ciąg liczb wymiernych* $(g_n : n \in N)$ *:*

$$g_n = \begin{cases} 1 & \textit{hipoteza Goldbacha jest prawdziwa,}^{10} \\ 0 & \textit{przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Ten ciąg Cauchy'ego wyznacza pewną liczbę rzeczywistą. Ta liczba „istnieje". Posiłkując się klasyczną logiką udowodnimy to istnienie tak: oznaczmy zdanie „hipoteza Goldbacha jest prawdziwa" skrótem HG. *Wówczas:*

$HG \rightarrow (1 = lim\, g_n) \rightarrow \exists_x (x = lim\, g_n)$,
$\neg HG \rightarrow (0 = lim\, g_n) \rightarrow \exists_x (x = lim\, g_n)$.

Zatem $(HG \vee \neg HG) \rightarrow \exists_x (x = lim\, g_n)$. *Ponieważ - na mocy prawa wyłączonego środka! - poprzednik tej implikacji jest prawdziwy, to i następnik jest prawdziwy: istnieje liczba rzeczywista wyznaczona przez ciąg* (g_n).

Ale ta liczba nie jest konstruktywną liczbą rzeczywistą. Wiemy o niej niewiele - czy potrafimy np. orzec, czy jest ona mniejsza od $\frac{1}{2}$*?*

Można rozumieć nadzieję Hilberta że te dylematy znikną, gdy stworzymy matematyczny raj - zupełną teorię pozwalającą dowieść prawdziwości dowolnego zdania lub jego zaprzeczenia. Ale dziś, gdy znamy wyniki Turinga, Gödla i Cohena wiemy, że to niemożliwe.

Dlatego, mówią konstruktywiści, powinniśmy odrzucić prawo wyłączonego środka. W ten sposób zaistniała *logika intuicjonistyczna*, powszechnie kojarzona z brouwerowską wizją matematyki[11].

1.2.1 Formalizacja zdaniowej logiki intuicjonistycznej

> *„Konstruktywizm jest poglądem, że obiekty matematyczne istnieją tylko o tyle, o ile zostały skonstruowane i że* DOWODY CZERPIĄ SWOJĄ WAŻNOŚĆ Z KONSTRUKCJI*" [4]*

Brouwer nie utożsamiał *konstruktywnego uzasadnienia* z formalnym dowodzeniem. Konstruktywne uzasadnienie to, jak twierdzą niektórzy, pojęcie pierwotne jego matematyki [40]. Dlatego nie dziwi, że wyodrębnienie z tej matematyki jej logicznego fragmentu i jego formalizacja na wzór i podobieństwo logiki klasycznej, nie jest jego dziełem. To dzieło jego ucznia, A. Heytinga - twórcy *logiki intuicjonistycznej*[12].

Obie logiki - klasyczna i intuicjonistyczna - to logiki języków o tej samej składni. Pierwsza opisuje jak wartość logiczna zdania zależy od jego struktury i wartości logicznych jego składowych. Druga ma inny cel: mówi jak - w zależności od struktury zdania - winno wyglądać jego uzasadnienie.

Te oczekiwania wobec kształtu konstruktywnych uzasadnień funkcjonują w literaturze jako *BHK - postulaty*[13]. W odniesieniu do logiki zdaniowej sformułowane są tak:

IMPLIKACJA. *„uzasadnienie formuły* $B \rightarrow A$ *to procedura, która zastosowana do jakiegokolwiek uzasadnienia* B *buduje uzasadnienie* A*"*
KONIUNKCJA. *„uzasadnienie formuły* $A \wedge B$ *to para uzasadnienień* (d_A, d_B) *- odpowiednio dla formuł* A *i* B*"*,
ALTERNATYWA. *„uzasadnienie alternatywy* $A \vee B$ *to albo uzasadnienie* A *albo uzasadnienie* B*"*

[10] *„Każda liczba naturalna parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych"*. Ta hipoteza, jak dotąd, nie doczekała się dowodu.

[11] Brouwer pisał: *„Wiara w uniwersalną słuszność prawa wyłączonego środka w matematyce jest uważana przez intuicjonistę za zjawisko historii cywilizacji tego samego rodzaju, co dawna wiara w wymierność liczby* π *czy rotację firmamentu wokół ziemi."*

[12] Arend Heyting (1898-1980) holenderski matematyk i logik. Brouwer nie cenił zbytnio pomysłu Heytinga nazywając (podobno) jego prace „bezpłodnymi ćwiczeniami". Ale stało się... .

[13] Lub BHK - interpretacji. B- Brouwer, H- Heyting, K- Kołmogorow. Logika intuicjonistyczna zaliczana jest do klasy *logik ... dewiacyjnych(!)* ponieważ nie zmieniając składni języka odrzuca pewne klasyczne prawa logiczne.

Negacja została zdegradowana - to tylko implikacja $A \to \bot$, gdzie $\bot$ symbolizuje zdanie bez uzasadnienia:

$$\neg A \equiv A \to \bot$$

Uzasadnieniem negacji $\neg A$ jest procedura, która falsyfikuje każdą próbę (konstruktywnego) uzasadnienia A.

> Te postulaty sformułowano w duchu logiki założeniowej - nie mówią, czym jest uzasadnienie zdań prostych. One mówią, jak konstruować uzasadnienie zdania złożonego odwołując się do uzasadnień zdań prostych, z których jest ono zbudowane.
>
> *„A proof of an atomic proposition A is given by presenting a mathematical construction* IN BROUWER'S SENSE *that makes A true".*

Postulat dotyczący alternatywy nie dopuszcza wyjątków: uzasadnienie formuły $A \vee \neg A$ wymaga albo uzasadnienia A, albo wskazania procedury falsyfikującej każdą próbę takiego uzasadnienia. Prawo wyłączonego środka tu nie obowiązuje.

> BHK-postulaty przywracają impikacji podmiotowość: $B \to A$ nie jest już synonimem alternatywy $\neg B \vee A$.
>
> Niech $B =$ *„w rozwinięciu dziesiętnym liczby π jest 20 kolejnych siódemek"* a $A =$ *„w rozwinięciu dziesiętnym π jest 19 kolejnych siódemek"*. Implikacja $B \to A$ jest w sposób oczywisty konstruktywnie zasadna. A co z uzasadnienem alternatywy $\neg B \vee A$ zgodnym z BHK-postulatami?[14]

Formalizacja logiki to związanie z nią systemu dowodzenia. Potrzeba tylko skromnej modyfikacji klasycznego systemu dedukcji naturalnej, by otrzymać taki system dla zdaniowej logiki intuicjonistycznej - wystarczy odrzucić jedną jedyną regułę odpowiedzialną za budowanie dowodów poprzez „doprowadzanie do sprzeczności":

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}$$

Formuła A jest prawem zdaniowej logiki intuicjonistycznej o ile sekwent $\vdash A$ (o pustym poprzedniku) ma dowód w tak zmodyfikowanym systemie dedukcji naturalnej.

> Pięknie ... . Długą opowieść o nowej logice sprowadziliśmy do odrzucenia jednej jedynej reguły dowodzenia i arbitralnego stwierdzenia, że po tym zabiegu zamiast o dowodzeniu można mówić o „konstruktywnych uzasadnieniach". Ale właściwie dlaczego?[15]
>
> Różnica jest głębsza: w logice klasycznej sekwent $B_1, \ldots, B_k \vdash A$ interpretujemy tak: *zdanie A jest* PRAWDZIWE *jeśli tylko zdania $B_1, \ldots, B_k$ są* PRAWDZIWE" a w logice intuicjonistycznej tak: - *„potrafimy zbudować hipotetyczny dowód A w oparciu o hipotetyczne dowody $B_1, \ldots, B_k$"*. To, że w obu sytuacjach korzystamy z tego samego formalnego zapisu to tylko przypadek.
>
> Jeśli szukasz argumentu, że matematyka to coś więcej niż manipulacja napisami, to właśnie go znalazłeś...

Ważkim argumentem na rzecz pomysłu Heytinga jest to, że rozbudowując nieco składnię (meta)języka sekwentów stworzymy system, w którym równolegle do budowy dowodu formuły generowany jest opis jego uzasadnienia. Te opisy to ... λ-termy, o których mówiulismy w części pierwsdzej

[14] Ten przykład podał A. Heyting [11]. Dla dopełnienia obrazu dodajmy ładne porównanie obu logik, przedstawione przez P. Urzyczyna w wykładzie „From Tarski to Girard" (dostępnym w internecie):

Tarski: The logical value paradigm.
Formula = a declarative assertion about some „reality".
Correctness criterion = truth (logical value).
Semantics has priority over proof. Proof = just a tool; its shape is not essential, we only ask if one exists.
Logic = determining if a sentence is true.
The role of a logical connective = define the truth of a compound sentence in terms of the values of its components.

Brouwer: The construction paradigm
Reasoning is primary, semantics is just a tool.
Correctness criterion = construction.
The role of a logical connective = express a construction of a compound sentence in terms of constructions of its components..

[15] Przypomnijmy: dla Brouwera „konstruktywne uzasadnienie" było pojęciem pierwotnym, czyli w pewnym sensie nieopisywalnym. Zapewne to był powód rezerwy Brouwera wobec poczynań Heytinga... .

dyskutując o obilczalnbości! Wystarczy sekwenty zastąpić napisami postaci $k_1 : B_1, \ldots, k_n : B_n \vdash a : A$, które czytamy tak: *„a jest uzasadnieniem formuły A zbudowanym w oparciu o uzasadnienia $k_1, \ldots, k_n$ formuł $B_1, \ldots, B_n$"*[16]. Trzeba też nieco zmodyfikować aksjomaty i reguły takiego systemu: jedyny schemat aksjomatu wygląda teraz tak:

$$\frac{}{\widetilde{\Gamma} \vdash x : A} \ (x : A) \in \widetilde{\Gamma}$$

i stwierdza oczywistość: *„jeśli zakładamy, że formuła A ma uzasadnienie x, to możemy uznać, że x jest uzasadnieniem formuły A"* [17]

Reguły związane z implikacją mają teraz taką postać:

$$\frac{\widetilde{\Gamma} \cup x : B \vdash t : A}{\widetilde{\Gamma} \vdash \lambda_{x:B}\, t : B \to A} \ (abs) \qquad \frac{\widetilde{\Gamma} \vdash m : B \to A, \widetilde{\Gamma} \vdash b : B}{\widetilde{\Gamma} \vdash mb : A} \ (app)$$

> Reguła (abs) : *„jeśli potrafimy - korzystając z hipotetycznego uzasadnienia $x : B$ - skonstruować uzasadnienie t formuły A, to takie postępowanie uznajemy za uzasadnienie implikacji $B \to A$ i oznaczamy symbolem $\lambda_{x:B}\, t$"*
> „Operator λ wiąże zmienne" - w wyrażeniu $\lambda_{x:B}\, t$ zmienna x jest związana co oznacza, że uzasadnienie opisane przez to wyrażenie nie jest już hipotetyczne (o ile w t nie ma innych niezwiązanych zmiennych).
> Reguła (app) mówi: *„jeśli m jest uzsadnieniem implikacji $B \to A$ a b - uzasadnieniem B, to napis mb uznajemy za opis uzasadnienia formuły A"*

Wykorzystanie aplikacji i abstrakcji do budowy wyrażeń opisujących uzasadnienia *implikatywnego fragmentu* zdaniowej logiki intuicjoninstycznej to sens tzw. *izomorfizmu Curry'ego-Howarda*[18].
I tak np. korzystając z aksjomatu $x : A \vdash x : A$ i reguły (abs) wyprowadzimy sekwent $\vdash \lambda_{x:B}x : A \to A$. λ-term $\lambda_{x:A}\, x$ to opis najprostszego uzasadnienia implikacji $A \to A$ - procedury *„nie rób nic" (z uzasadnieniem A by otrzymać uzasadnienie A)*[19].
A biorąc za punkt wyjścia aksjomat $x : A, y : B \vdash x : A$ zbudujemy λ-term $\lambda_{x:A}(\lambda_{y:B}x)$ opisujący uzasadnienie formuły $A \to (B \to A)$. I tak dalej...

Rozbudowując język λ-rachunku można rozszerzyć izomorfizm Curry-Howarda i budować opisy uzasadnień wszelkich formuł zdaniowych. Np. reguły dotyczące koniunkcji wyglądają wówczas tak:

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash < a, b >: A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : A \wedge B}{\Gamma \vdash \Pi_1 t : A} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : A \wedge B}{\Gamma \vdash \Pi_2 t : B}$$

co - jak widać - wymaga rozszerzenia składni λ-rachunku o konstruktor pary i dwa „rzutowania".

Nie opiszemy tu kolejnych wersji-rozszerzeń izomorfizmu Curry-Howarda[20]. A to dlatego, że wcale nie jest pewne, czy w trakcie kolejnych rozszerzeń nie gubimy tego, co chcemy rozumieć przez konstruktywne uzasadnienie: *„Until around 1990 there was a widespread consensus to the effect that „there is no Curry-Howard isomorphism for classical logic." However, at that time T. Griffin made a pathbreaking discovery which have convinced most critics that classical logics have something to offer the Curry-Howard isomorphism" [37]...*

Nowa rola negacji

[16] *„Let us write "a : A" for „a is a construction that establishes A" [37]*. Jedno z możliwych znaczeń słowa „establish" to „ustanawiać". My używamy terminu „uzasadnienie" czy też „konstruktywne uzasadnienie" traktując je jako odpowiednik „ustanowienia".

[17] Symbol x jest tu zmienną języka opisu uzasadnień. Zapis „$x : A$" reprezentuje hipotetyczne uzasadnienie A.

[18] Implikatywny fragment intuicjonistycznej logiki zdaniowej obejmuje formuły budowane ze zmiennych zdaniowych tylko za pomocą spójnika implikacji (a nie koniunkcji, alternatywy czy negacji).
Uwaga: λ-termy tu użyte różnią się nieco od wcześniej poznanych. Ale to nie jest teraz istotne (korzystamy tu z pewnej odmiany λ-rachunku - tzw. λ-rachunku z typami *a la Church*).

[19] „β-redukcja' λ-termów może być w tej nowej sytuacji interpretowana jako upraszczanie („normalizacja") opisów uzasadnień. Nasze stwierdzenie „nie rób nic" usprawiedliwione jest przez β-redukcję $(\lambda_{x:A}\, x)a \to^{\beta} a$.

[20] Zainteresowanych odsyłam do [37] (Rozdział IV).

Negacja $\neg A$ to tylko skrót implikacji $A \to \bot$. Ale warto się jej bliżej przyjrzeć, bo to ujawni nie tylko różnice, ale i subtelne związki między logiką klasyczną i intuicjonistyczną.

Klasyczne *prawo podwójnej negacji* - równoważność $A \leftrightarrow \neg\neg A$ - nie obowiązuje w logice intuicjonistycznej - to wiemy[21]. Ale jest nim implikacja $A \to \neg\neg A$. Uzasadnimy to nieformalnie, odwołując się do BHK-interpretacji.

Uzasadnienie formuły $\neg\neg A$ to procedura, umożliwiająca falsyfikację wszelkich procedur sprowadzających do absurdu uzasadnienia A (uff...). Dlatego każde uzasadnienie A wyznacza taką oto procedurę uzasadnienia $\neg\neg A$: *„każdemu kto twierdzi, że ma procedurę sprowadzania dowolnego uzasadnienia A do absurdu, pokaż to uzasadnienie A”*. To, bezdyskusyjnie, jest uzasadnieniem implikacji $A \to \neg\neg A$.

Jeszcze ciekawsza jest implikacja $\neg\neg\neg A \to \neg A$. Uzasadnieniem $\neg\neg\neg A$ jest procedura - nazwijmy ją Pr - falsyfikująca każde uzasadnienie $\neg\neg A$. Ale, jak pokazaliśmy, każde uzasadnienie A daje się łatwo przekształcić w uzasadnienie $\neg\neg A$. Zatem procedura Pr musi też falsyfikować dowolne uzasadnienie formuły A czyli jest uzasadnieniem formuły $\neg A$ ... . Dlatego równoważność $\neg\neg\neg A \leftrightarrow \neg A$ jest prawem logiki intuicjonistycznej[22].

Najciekawsze jest to, co o podwójnej negacji mówi *twierdzenie Glivenki:*[23]

„formuła A jest prawem klasycznej logiki zdaniowej dokładnie wtedy, gdy jej podwójna negacja - formuła $\neg\neg A$ - jest prawem logiki intuicjonistycznej.”

> Klasyczna równoważność $A \leftrightarrow \neg\neg A$ zostaje zastąpiona przez „równoważność dowodliwości” tych formuł w obu rozważanych logikach.

Stąd jeśli tylko formuła zdaniowa A jest *stabilna* (czyli - w logice intuicjonistycznej - $A \leftrightarrow \neg B$ dla pewnej formuły B) to jest ono prawem intuicjonistycznej logiki zdaniowej dokładnie wtedy, gdy jest prawem klasycznej logiki zdaniowej[24].

> Logikę klasyczną od intuicjonistycznej różni arbitralne założenie, że każda formuła zdaniowa jest stabilna (bo zawsze $B \leftrightarrow \neg\neg B$). Wyłącznie.
> Wychowani w tradycji klasycznej skłonni jesteśmy traktować logikę intuicjonistyczną jako ciekawostkę, niegroźną dewiację pozbawioną większego (matematycznego) znaczenia. Wynik Glivenki pozwala mówić, że jest odwrotnie: logika klasyczna jest tylko „wersją” logiki intuicjonistycznej, znajdująca zastosowanie wtedy, gdy ograniczamy się do zdań stabilnych[25].

1.3 Semantyka Kripkego

„Kripke theory is a theory of „possible worlds”
(internet)

Przeciwstawiając logikę klasyczną logice intuicjonistycznej sugerowałem, że w tej drugiej nie ma czegoś takiego jak model zamierzony. To prawda. Ale to nie wykłucza istnienia modeli.

Model Kripkego to dowolny zbiór częściowo uporządkowany (poset) $(V, \leqslant)$[26]. *Wartościowanie zmiennych* w takim modelu to przyporządkowanie każdej zmiennej zdaniowej p (należącej do ustalonego *a priori* zbioru zmiennych zdaniowych) domkniętego w górę podzbioru $V_p \subseteq V$[27]

[21]To takie małe kłamstwo - udowodnimy to dopiero za chwilę, gdy będziemy mówić o modelach Kripkego.

[22]W logice intuicjonistycznej „przez sprzeczność” dowodzimy tylko stwierdzeń negatywnych... .

[23]Valery Glivenko (1896-1940), matematyk ukraiński

[24]Jeśli $\neg B$ ma intuicjonistyczny dowód, to ma go też równoważna formuła $\neg\neg\neg B$. A to - na mocy twierdzenia Glivenki - oznacza, że $\neg B$ ma klasyczny dowód.

[25]Warta uwagi ciekawostka: formuła zdaniowa A jest *rozstrzygalna*, gdy $(A \vee \neg A)$ jest prawem logiki intuicjonistycznej a *stabilna*, gdy $\neg\neg A \to A$ jest takim prawem. „Rozstrzygalność” i „stabilność” nie są - wbraw pozorom - równoważne, bo implikacja $(\neg\neg A \to A) \to (A \vee \neg A)$ nie jest prawem logiki intuicjonistycznej!

[26]Saul A. Kripke (1940-) - amerykański logik i filozof. Relacja „$\leqslant$” jest zwrotna, przechodnia, i *antysymetryczna* - $\forall_{v,w}(v \leqslant w) \wedge (w \leqslant v) \to v = w$. „Poset” to zgrabny skór angielskiej nazwy *partially ordered set*.

[27]V_p jest domknięty w górę, gdy $(v \in V_p) \wedge (v \leqslant w) \Rightarrow (w \in V_p)$.

> Model Kripkego wraz z wartościowaniem $p \rightsquigarrow V_p$ to jeden możliwych scenariuszy rozwoju „świata wiedzy". STANY WIEDZY są reprezentowane przez elementy V a zapis $v \leqslant w$ oznacza, że wiedza w stanie v jest mniejsza niż w stanie w.
> Domknięty w górę podzbiór $V_1 \subset V$ reprezentuje ZASÓB WIEDZY dostępnej we wszystkich stanach tego podzbioru. Zbiór V reprezentuje „wiedzę powszechną", dostępną we wszystkich stanach.
> Zbiór V_p to zasób wiedzy wystarczający (niezbędny) do uzasadnienia zdania reprezentowanego przez zmienną p w tym scenariuszu. Napis „$v \in V_p$" czytamy: *„stan wiedzy v pozwala na uzasadnienie p"* lub krótko: *„v uzasadnia p"*[28].

Wartościowanie zmiennych $p \rightsquigarrow V_p$ rozszerzamy wiążąc z każdą formułą zdaniową A domknięty w górę zbiór $V_A \subseteq V$ (reprezentujący minimalny zasób wiedzy wystarczający do uzasadnienia zdania reprezentowanego przez formułę A przy tym wartościowaniu zmiennych). Te zbiory definiujemy rekurencyjnie:

$$V_\perp = \emptyset \quad V_\top = V,$$
$$v \in V_{A \wedge B} \quad \leftrightarrow \quad v \in V_A \quad \textit{oraz} \quad v \in V_B,$$
$$v \in V_{A \vee B} \quad \leftrightarrow \quad v \in V_A \quad \textit{lub} \quad v \in V_B,$$
$$v \in V_{A \to B} \quad \leftrightarrow \quad \textit{dla dowolnego } w \geqslant v \textit{, jeżeli } w \in V_A, \textit{ to również } w \in V_B .$$

W szczególności $V_{\neg A}$ to największy podzbiór domknięty w górę rozłączny z V_A.

Na szczególną uwagę zasługuje interpretacja zbioru $V_{A \to B}$:

> $v \in V_{A \to B}$ jeżeli w tym stanie wiemy dość, by każde hipotetyczne uzasadnienie A przekształcić w hipotetyczne uzasadnienie B co rozumiemy tak: jeśli tylko w przyszłym stanie $w \geqslant v$ uzasadnimy A, to będziemy zdolni przekształcić to uzasadnienie A w uzasadnienie B .
> Stąd $V_A \subseteq V_B$ dokładnie wtedy, gdy $V_{A \to B} = V$.
> $V_\perp = \emptyset$ - w każdym modelu[29].

Formuła A jest *uzasadniona* w stanie v przy wartościowaniu $p \rightsquigarrow V_p$ gdy $v \in V_A$. Jest *prawdziwa w modelu* $(V, \leqslant)$ gdy jest uzasadniona w każdym jego stanie przy każdym wartościowaniu.

Fundamentalne *twierdzenie o zupełności* mówi, że:

„formuła zdaniowa A jest prawem logiki intuicjonistycznej dokładnie wtedy, gdy jest prawdziwa w każdym modelu Kripkego."

> Zdanie Z jest prawem logiki intuicjonistycznej gdy jego uzasadnienie w dowolnym modelu nie wymaga żadnej wiedzy (lub: wymaga tylko wiedzy powszechnej). Jest uzasadnione bez względu na to, jak określimy minimum wiedzy niezbędne do uzasadnienia zdań prostych w nim występujących.

Spójrzmy na prosty model Kripkego:

$$\begin{tikzcd}
2 \Vdash p,q & & 3 \Vdash r \\
1 \Vdash p \arrow[u] & & \\
& 0 \arrow[ul] \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

i wartościowanie zmiennych p, q, r takie, że $V_p = \{1, 2\}$, $V_q = \{2\}, V_r = \{3\}$. To oznacza np. że w stanie 2 „wiemy" (potrafimy uzasadnić) p i „wiemy" q , a w stanie 0 „nie wiemy nic".
W tym modelu:

[28]Logicy piszą $v \Vdash p$ zamiast $v \in V_p$ i nazywaja tę relację *forsingiem* co odpowiada angielskiemu terminowi *„forcing"*. Forsing to „wymuszanie". Wolę mówić o „umożliwianiu".
Termin „model Kripkego" ma szerszy zakres niż tu dyskutowany. Jest to jedno z podstawowych pojęć tzw. *modalnej logiki epimistycznej.* Natomiast *„Epistemic logic is a subfield of epistemology concerned with logical approaches to knowledge, belief and related notions. (...) The central problems that have concerned epistemic logicians include (...) determining which epistemic principles are most appropriate for characterizing knowledge and belief,(...)." (Stanford Encyclopedia of Philosophy). Z powodów nie tylko patriotycznych dodajmy, że pierwszy formalny system modalnej logiki epistemicznej zdefiniował J.Łoś. .*

[29]Nigdy nie osiągniemy stanu wiedzy, pozwalającego uzasadnić fałsz. Chyba, że jesteśmy szaleńcami (politykami)...

1. $V_{\neg\neg q} = \{1, 2\}$ *czyli* $V_{\neg\neg q} \neq V_q$. *To potwierdza, że „prawo podwójnej negacji" - formuła* $\neg\neg p \leftrightarrow p$ *- nie jest prawem logiki intuicjonistycznej.*

2. Nierówność $V_p \vee V_{\neg p} \neq V$ *pokazuje, że prawo wyłączonego środka nie obowiązuje w tej logice.*

3. $V_{q\to p} = V$ *natomiast* $V_{\neg q\vee p} = \{2, 3\}$ *- równoważność* $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$ *nie jest prawem logiki intuicjonistycznej*[30] *.*

4. $0 \notin V_{(p\to r)\vee(r\to p)}$ *- formuła* $(p \to r) \vee (r \to p)$ *nie jest prawem logiki intuicjonistycznej* [31]

Każdy model Kripkego $(V, \leqslant)$ wyznacza lokalną logikę $L(V, \leqslant)$. Jej prawami są zdania prawdziwe w tym modelu. Ta logika ma miłą sercu mainstreamowców cechę - posiada własną *matrycę wartości logicznych* którą jest zbiór wszystkich domkniętych w górę podzbiorów V.

Przykład. Dwuelementowy poset $(\{0, 1\}, 0 \leqslant 1)$ *ma trzy domknięte w górę podzbiory -* $\emptyset \subset \{1\} \subset \{0, 1\}$ *czyli wyznacza logikę z trójelementową matrycą wartości logicznych. Oznaczając te wartości odpowiednio przez* $0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 1$, *„rachunek wartości" tej logiki opiszemy tak:* $v \wedge w = min(v, w)$, $v \vee w = max(v, w)$ *, a implikację* $B \to A$ *tak:*

$B \backslash A$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

Nietrudno wyobrazić sobie logikę, którą otrzymamy zastępując dwuelementowy łańcuch $0 \leqslant 1$ *łańcuchem* n*-elementowym... .*

> Model Kripkego klasycznej logiki zdaniowej to poset, który ma tylko jeden punkt i - konsekwentnie - dwa podzbiory domknięte w górę.
> W tym modelu wiedza jest niezmienna (transcedentna?). To świat platoński. Tu każde zdanie, któremu można przypisać wartość logiczną, JEST prawdziwe lub fałszywe.

W odróżnieniu od logiki klasycznej, zdaniowa logika intuicjonistyczna nie ma uniwersalnego, skończonego modelu Kripkego $(V, \leqslant)$ - takiego, że prawa logiki $L(V, \leqslant)$ są dokładnie takie same, jak prawa logiki intuicjonistycznej[32]. Mamy tu tylko nieco słabsze twierdzenie:

„formuła zdaniowa A jest prawem logiki intuicjonistycznej dokładnie wtedy, gdy jest uzasadniona W KAŻDYM SKOŃCZONYM *modelu Kripkego".* [37]

To wystarczy by pokazać, że intuicjonistyczna logika zdaniowa jest rozstrzygalna[33].

> Logika klasyczna ma pojedynczy model zamierzony o „transcedentym rodowodzie". Boole i Frege nie stworzyli algebry wartości logicznych - oni tylko zaproponowali sformalizowany opis tego „transcedentnego bytu". A systemy dowodzenia dla klasycznej logiki zdaniowej to tylko narzędzia odkrywania zdań prawdziwych a nie sposób na ich definiowanie.

[30] To zwalnia nas z obowiązku ekwilibrystycznego tłumaczenia, że jedno ze zdań *„Jeśli Kasia przypaliła zupę to w Krakowie pada deszcz"* i *„jeśli w Kakowie pada deszcz, to Kasia..."* jest prawdziwe.

[31] Korzystając z modeli Kripkego można pokazać, że: *„jeśli alternatywa* $A \vee B$ *jest prawem logiki intuicjonistycznej, to jest nim również formuła A lub formuła B".Szkic dowodu: gdy żadna z formuł A, B nie jest takim, to - na mocy twierdzenia o zupełności - istnieją modele Kripkego* $(V^A, \leqslant_A)$ *i* $(V^B, \leqslant_B)$ *falsyfikujące te formuły. Model falsyfikujący alternatywę* $A \vee B$ *zbudujemy dodając do rozłącznej sumy* $V^A \cup V^B$ *nowy, najmniejszy element „0" (zachowujemy porządki w zbiorach* V^A *i* V^B. *Przyjmujemy, że elementy z* V^A *nie są porównywalne z elementami z* V^B *i vice versa.*

[32] To jeszcze jedno twierdzenie Gödla. Wprawdzie można wskazać pojedynczy NIESKOŃCZONY uniwersalny model Kripkego $(V, \leqslant)$ ale nie wydaje się by w dyskusji o podstawach matematyki zasadne było korzystać ze struktur nieskonczonych których istnienie jest bezdyskusyjnie akceptowalne jedynie w teorii mnogości.

[33] Wystarczy równolegle realizować dwie procedury sprawdzające: pierwszą, polegajacą na poszukiwaniu skończonego modelu Kripkego falsyfikującego badaną formułę. Drugą, próbującą skonstruować jej dowód. Jedno (dokładnie jedno) z tych postępowań musi zakończyć się sukcesem... .

> Logika intuicjonistyczna koncentruje uwagę na relacji konsekwencji - szuka odpowiedzi na pytanie, jak uzasadnienie zdania złożonego zależy od uzasadnień zdań prostych. *„Reasoning is primary, semantics is just a tool.”*
> Ta logika nie ma określonej *a priori* (skończonej) matrycy wartości logicznych - *„reasoning is primary, semantics is just a tool.”*. To pojęcie pojawia się dopiero po wskazaniu jednego z wielu możliwych (skończonych) modeli Kripkego.
> Heytingowska logika intuicjonistyczna to wspólny rdzeń logik wyznaczonych przez modele Kripkego. Logika klasyczna jest tylko jedną z nich. Jest najprostsza, bo wyznaczona przez jednoelementowy model Kripkego[34].
>
> *„Logika mówi o każdej możliwości i wszystkie możliwości są jej faktami (...). Jeżeli mogę pomyśleć przedmiot w kontekście stanu rzeczy, to nie mogę go pomyśleć poza możliwością tego kontekstu.” - L. Wittgenstein.*

1.3.1 Semantyka algebraiczna i topologiczna

Dzięki opowieści o „stanach wiedzy” modele Kripkego trafiają do naszej wyobraźni. To ważne - z psychologicznego punktu widzenia (*„trzeci wymiar języka”...*). Ale do formalnego określenia semantyki formuł w modelu $(V, \leqslant)$, wystarczy znajomość struktury jego „zasobów wiedzy” reprezentowanych przez domknięte w górę podzbiory V.
Tę strukturę rozpoznano i nazwano: domknięte w górę podzbiory modelu Kripkego to *algebra Heytinga (zwana też „kratą brouwerowską” lub algebrą pseudoboolowską)*:

Algebra Heytinga to poset $(H, \leqslant)$ z elementem największym - $\top$ - i najmniejszym - $\bot$ - w którym każda para elementów (a, b) ma kres górny - $a \vee b$, dolny - $a \wedge b$ i tzw. pseudodopełnienie - $a \to b$ - największy element taki, że $a \wedge (a \to b) \leqslant b$:

$$a \wedge c \leqslant b \quad wtw \quad c \leqslant a \to b.$$

dla dowolnych elementów $a, b, c \in H$.[35]

To prowokuje do zdefiniowania semantyki intuicjonistycznej logiki zdaniowej w dowolnej algebrze Heytinga, bez odwołań do „posetu stanów wiedzy”. I tak zrobiono: to tzw. *semantyka algebraiczna*. A to, co najważniejsze = twirdzenie ozupełnbości - pzybierze taką postać:

„formuła A jest prawem logiki intuicjonistycznej dokładnie wtedy, gdy jest prawdziwa w dowolnej algebrze Heytinga - przy każdym wartościowaniu przyporządkowaną jej wartością jest $\top$”.

Algebry Heytinga są ściśle związane z ... przestrzeniami topologicznymi:
„rodzina zbiorów otwartych $\mathcal{T}$ dowolnej przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ jest algebrą Heytinga”[36].
Nasze najważniejsze twierdzenie przyjmie teraz taką postać:

formuła A jest prawem intuicjonistycznej logiki zdaniowej jeżeli jest prawdziwa w algebrze Heytinga zbiorów otwartych dowolnej przestrzeni topologicznej.
a nawet taką skrajną postać:

„formuła A jest prawem intuicjonistycznej logiki zdaniowej dokładnie wtedy, gdy jest prawdziwa w pojedynczym modelu - algebrze Heytinga otwartych podzbiorów prostej rzeczywistej” [37].

Logika intuicjonistyczna v. klasyczna revisited

Algebry Boole'a to podklasa algebr Heytinga w których obowiązuje *prawo wyłączonego środka* - $a \vee \neg a = \top$ dla dowolnego elementu algebry. Wsród tych algebr znajduje się dwuelementowa fregegowska algebra wartości logicznych. Pełni ona wyróżnioną rolę gdyż *twierdzenie o zupełności* dla klasycznej logiki można sformułować tak:

---

[34]Ten model ma dwa podzbiory domknięte w gór.

[35]Ponieważ te algebry będą tu wykorzystywane w głównie „kontekście logicznym”, element $a \wedge b$ nazywać będziemy *koniunkcją* , element $a \vee b$ - *alternatywą* a element $a \to b$ - *implikacją* elementów a i b. Dodatkowo implikację $a \to \bot$ nazwiemy *negacją* elementu a. Wróć na chwilę na str. **??**.

[36]$\top = X$, $\bot = \emptyset$. „$\wedge$” to teoriomnogościowy przekrój, „$\vee$” to suma, $V \to U$ to wnętrze zbioru $U \cup (X \setminus V)$. W szczególności $\neg V$ to wnętrze zbioru $X \setminus V$. O przestrzeniach topologicznych mówiliśmy w Części 1.

„zdanie jest prawem klasycznej logiki zdaniowej (ma „klasyczny" dowód) dokładnie wtedy gdy jest prawdziwe w dwuelementowej algebrze Boole'a"

> Podobieństwa i różnice między twierdzeniami o zupełności dla klasycznej i intuicjonistycznej logiki zdaniowej wydają się oczywiste. Ale niech najważniejsza konsekwencja tych różnic nie umknie naszej uwadze: Klasyczna wersja twierdzenia o zupełności pozwala na stwierdzenie, że:
>
> *„jeśli zdanie Z nie ma dowodu, to ma go jego negacja - zdanie $\neg Z$"*[37].
>
> Twierdzenie o zupełności dla logiki intuicjonistycznej na to nie pozwala - brak intuicjonistycznego dowodu zdania Z nie oznacza istnienia takiego dowodu zdania $\neg Z$!
>
> Logika intuicjonistyczna nie akceptuje „niekonstruktywnej" argumentacji: *„mówisz, że dowód istnieje, to go pokaż (skonstruuj)"*.

1.4 Logika intuicjonistyczna pierwszego rzędu

H: I have just proved $\exists_x A(x)$,
B: Congratulations! What is it?
H: I don't know. I assumed $\forall_x \neg A(x)$ and derived a contradiction.
B: Oh. You proved $\neg\forall_x \neg A(x)$. That's what I said." [26]

„H" chwali się dowodem istnienia obiektu o własności opisanej formułą $A(x)$ - pokazał, że brak takiego obiektu prowadzi do sprzeczności. Jego oponent - „B" - twierdzi, że w ten sposób wykazał on jedynie, że nie jest możliwe, by żaden obiekt nie miał tej własności... . Skąd ten spór?

W obu logikach - klasycznej i intuicjonistycznej - uznajemy równoważność $\forall_x \neg A(x) \leftrightarrow \neg\exists_x A(x)$. - *„to, że żaden element nie ma własności A(x) jest równoważne stwierdzeniu, że nie istnieje element, który ma tę własność"*. Negując obie strony otrzymamy nową równoważność - $\neg\forall_x \neg A(x) \leftrightarrow \neg\neg\exists_x A(x)$. Do tego momentu panowie się zgadzają.
Wierny klasycznej logice matematyk hilbertowski - „H" - wykorzysta teraz *prawo podwójnej negacji* - $\neg\neg A \rightarrow A$ - i uzna kolejną równoważność: $\exists_x A(x) \leftrightarrow \neg\forall_x \neg A(x)$ - *„obiekt o własności $A(x)$ istnieje, gdy nie jest prawdą, że żaden obiekt nie ma własności $A(x)$"*.
A pan „B" - matematyk brouwerowski - nie uznaje tego prawa. W jego logice *„statement $\exists_x A(x)$ is regarded as a* PARTIAL COMMUNICATION, *to be supplemented by providing an element a which satisfies $A(x)$" [45]* . Stąd ten spór[38].

> W klasycznej logice sąd pozytywny, przesądzający o istnieniu, jest równoważny sądowi negatywnemu. Zważywaszy rolę, jaką w matematyce Hilberta przypisano formalnym dowodom istnienia, to dość ryzykowne... .A wszystko to za sprawą *„tertium non datur"*.
>
> Czy musimy bezkrytycznie akceptować takie prawa? Hilbert też miał wątpliwości. Pisał: (...) *„law of the excluded middle" should not be uncritically adopted as logically unproblematic"* . Ale ostatecznie stwierdził: *„the application of tertium non datur can never lead to danger". [31]*

BHK-postulaty dotyczące kwantyfikacji sformułowano tak:

„konstruktywnym uzasadnieniem formuły $\forall_x \phi(x)$ jest procedura, która pozwala na przekształcenie konstrukcji dowolnego elementu a w konstruktywne uzasadnienie zdania $\phi(x)[x := a]$.

„uzasadnienie $\exists_x \phi(x)$ to procedura, która konstruuje element a i przekształca jego konstrukcję w uzasadnienie formuły $\phi(x)[x := a]$".

Czym jest ów „element a" przywoływany w sformułowaniach obu BHK-postulatów? *„$a \in D$ where D is the domain of discourse (over which the variable range)" [40]*. Termin „domain of discourse" można tłumaczyć jako „dziedzina, przedmiot rozważań". To konstruowalny obiekt matematyczny,

[37] Spróbuj to pokazać... .

[38] Dlatego pan „B" nie akceptuje też dowodu twierdzenia Henkina o pełności (omawianego w Części 1). Konsekwencją odrzucenia implikacji $\neg\forall_x \neg A(x) \rightarrow \exists_x A(x)$ jest też to, że konstruktywiści rozróżniają pojęcia: *zbioru niepustego* - $\neg\forall_y \neg(y \in x)$ i *zbioru zamieszkałego* - $\exists_y\, y \in x$..

w którym umiemy interpretować język rozważanych formuł. Jego elementy muszą mieć swoje nazwy, opisy. To niezbędne by można było mówić o czymś takim jak $\phi(x)[x := a]$.

> „Uzasadnienie” jest zależne od rozważanej dziedziny. *„(...) “proof” should not be understood in the sense of a formal proof in some logical calculus (...) rather as an informal basic notion (like truth in case of classical logic)”* - napisano w [40] opisując to, co nazwaliśmy tu uzasadnieniem.
> Wbrew mylącemu skojarzeniu - uzasadnienie to *„proof”* a *proof* to dowód - to zdanie lokuje pojęcie uzasadnienia po tej samej stronie, po której jest „prawdziwość” - po stronie semantycznej.

BHK-postulaty to nie aksjomaty[39]. To drogowskaz którym mamy się kierować konstruując kolejne „domains of discourse” i związane z nimi pojęcie uzasadnienia. Przykładem takiego rozumienia BHK-postulatów jest *realizowalność Kleene'ego* o której opowiemy za chwilę.
Jednak matematyce trudno poprzestać na enigmatycznych postulatach: oczekujemy formalizacji intuicjonistycznej logiki pierwszego rzędu - stworzenia systemów dowodzenia, takich, że dowodliwość formuły gwarantuje istnienie jej uzasadnienia w każdej „dziedzinie rozważań”, w której to pojęcie jest zgodne z BHK-postulatami[40].

Poprzestaniemy na zapewnieniu, że takie systemy stworzono. To skłania do stwierdzenia, że dowody budowane w tych systemach są konstruktywne. Świadczy o tym taki oto wynik:

„zdanie $\exists_x\, \psi(x)$ jest dowodliwe w systemie dedukcji naturalnej pozbawionym reguły dowodzenia przez sprzeczność dokładnie wtedy, gdy istnieje term t taki, że formuła $\psi(x)[x := t]$ jest dowodliwa”.
Ów term wskazuje (nazywa) elementy, które realizują BHK-postulat dla zdań postaci $\exists_x \psi(x)$[41]

Pomoże nam analiza *paradoksu pijaka*, który rozpowszechnił R. Symullyan. Zdanie: *”there is someone in the pub such that, if he is drinking, then everyone in the pub is drinking”* jest absurdalne. Ale - paradoksalnie - prawdziwe w klasycznej logice. Zapisane formalnie wygląda tak: $\exists_x\, (p(x) \to \forall_y\, p(y))$. Jest tu tylko pojedynczy jednoargumentowy symbol relacyjny p co oznacza, że teoriomnogościowym modelem tego języka jest każda para zbiorów $(A, A_p \subseteq A)$[42].
To zdanie jest prawdziwe w każdym teoriomnogościowym modelu. Wystarczy osobno rozpatrzyć dwie rozłączne i dopełniające się klasy modeli: pierwsza to modele, w których $A_p = A$ („wszyscy piją”). Druga to modele w których $A_p \neq A$ („jest ktoś niepijący”). W modelach z pierwszej klasy następnik implikacji jest prawdziwy. W drugim przypadku wyskazując niepijącego osobnika $a_0 \in A \setminus A_p$ sprawiamy, że poprzednik rozważanej implikacji jest fałszywy przy wartościowaniu $[x := a_0]$. A to wystarczy do uzasadnienia prawdziwości rozważanego zdania.
Na mocy twierdzenia o zupełności logiki klasycznej, zdanie prawdziwe w każdym teoriomngościowym modelu ma dowód[43]. Jednak to zdanie nie ma dowodu „intuicjonistycznego”. Gdyby miało, to - na mocy przywołanego wyżej twierdzenia - dowodliwa byłaby też formuła $p(z) \to \forall_x p(x)$ którą czytamy *„jeśli ktokolwiek w pubie pije, to wszyscy piją”*[44]. A w to trudno uwierzyć... .

KONIG

1.4.1 Arytmetyka intuicjonistyczna

Z każdą klasyczną teorią T można skojarzyć jej intuicjonistyczną wersję - teorię T^i[45]. Formalizacja intuicjonistycznej logiki - stworzenie adekwatnych systemów dowodzenia - rodzi pokusę powtórzenia klasycznej gry między syntaktyką i semantyką, między dowodliwością a prawdziwością zdań.

---

[39] W [38] te postulaty określono jako *„informal semantics”*.

[40] Pewnie dlatego, że wszyscyśmy wychowali się w tradycji Tarskiego...

[41] To twierdzenie sprawia, że BHK-postulat dla zdań egzystencjalnych formułuje się czasem tak: *„whenever $\exists_x\phi(x)$ is provable, then $\phi(t)$ is provable for some term t”.*.

[42] W szczególności, modelem jest pub rozumiany jako zbiór ludzi z wyróżnionym podzbiorem pijących.

[43] Dowodzimy osobno zdań $\forall_y\, p(y) \to (\exists_x\, (p(x) \to \forall_y\, p(y)))$ oraz $\neg\forall_y\, p(y) \to (\exists_x\, (p(x) \to \forall_y\, p(y)))$. A potem wystarczy scalić oba dowody korzystając z prawa wyłączonego środka.

[44] Jedyne termy w rozważanym języku to zmienne.

[45] Częścią każdej klasycznej teorii pierwszego rzędu T jest klasyczna logika pierwszego rzędu - FOL. Teorię T^i otrzymamy zastępując FOL logiką intuicjonistyczną pierwszego rzędu.

Czym jest model teorii intuicjonistycznej? To może być każdy teoriomnogościowy model T. Ale to zgrzyta: posługiwanie się różnymi logikami: intuicjonistyczną - gdy mówimy o syntaktyce - i klasyczną - gdy mowa o modelu i spełnianiu - to nie najlepszy pomysł. To niespójne.

Można też definiować pojęcie modelu intuicjonistycznej teorii T^i „na nowo". Takie próby podejmowano. I osiągano zamierzone cele[46].

Ostatecznie można zechcieć zastąpić klasyczną teorię mnogości przez „intuicjonistyczną teorię zbiorów". Jednak nie może to być teoria ZFC^i bo, jak wiemy, konsekwencją aksjomatu wyboru jest prawo wyłączonego środka. Intuicjonistyczną teorię zbiorów trzeba zbudować inaczej. I to zrobiono. Ale i to nie wydaje się przesadnie interesujące i zgodne z brouwerowską wizją matematyki[47]. Trzeba bardziej radykalnych propozycji - takich jak *teoria toposów*.

Zanim poznamy toposy (wkrótce) zajmijmy się tym co bezsporne: rozważanie intuicjonistycznych wersji klasycznej teorii ma niewątpliwie sens wtedy, gdy ta teoria jest wtórnym opisem pewnego konstruowalnego obiektu matematycznego.
Sztandarowym przykładem takiej teorii jest arytmetyka.

Arytmetyka Peano korzysta ze wsparcia klasycznej logiki pierwszego rzędu. O *arytmetyce intuicjonistycznej (arytmetyce Heytinga - HA)* mówimy wtedy, gdy tę klasyczną logikę zastąpimy jej intuicjonistycznym odpowiednikiem[48]. Te dwie arytmetyki są „równoważnie niesprzeczne"[49] - jedna jest niesprzeczna dokładnie wtedy, gdy druga jest niesprzeczna. Jest to konsekwencja twierdzenia udowodnionego przez Gentzena i Gödla (które można traktować jako uogólnienie twierdzenie Glivenki): *dla dowolnej formuły arytmetycznej ϕ istnieje formuła arytmetyczna ϕ^N taka, że*

„formuła ϕ ma dowód w klasycznej arytmetyce Peano dokładnie wtedy, gdy formuła ϕ^N ma dowód w arytmetyce intuicjonistycznej" [50].

To oznacza, że i ta arytmetyka nie może dostarczyć dowodu własnej niesprzeczności...

> Różnica między arytmetyką klasyczną i intuicjonistyczną jest bardziej subtelna niż się wydaje. Np. te teorie są równoważne gdy ograniczymy się do zdań postaci $\forall_x \exists_y \, \alpha(x, y)$, gdzie $\alpha(x, y)$ jest formułą bezkwantyfikatorową[51].

Podsumujmy ten podrozdział przywołaniem znakomitego (choć mało eksponowanego) twierdzenia, które usprawiedliwia ograniczenie omawiania logiki intuicjonistycznej pierwszego rzędu do arytmetyki intuicjonistycznej
Arytmetyczną instancją formuły pierwszego rzędu sygnatury Σ nazwiemy każdą formułę arytmetyczną otrzymaną przez zastąpienie symboli operacyjnych termami arytmetycznymi a relacyjnych - formułami arytmetycznymi. Twierdzenie o którym mowa orzeka, że:

formuła ϕ jest prawem intuicjonistycznej logiki pierwszego rzędu dokładnie wtedy, gdy w HA dowodliwa jest jej każda arytmetyczna instancja.

> Powrót do źródeł?[52]

---

[46]Modeli powinno być „więcej" by umożliwić dowód *twierdzenia o zupełności* - „to, co prawdziwe w każdym modelu jest dowodliwą konsekwencją T^i". Można zajrzeć np. do [37].

[47]Przekonywałem, że relacja „syntaktyka - semantyka" to - w ujęciu Tarskiego - swoista gra językowa. A takie gry nie były w kręgu zainteresowań Brouwera. Ale może nie mam racji... .

[48]$HA = PA^i$. Zazwyczaj ułatwiamy sobie życie dodając - jako nowe aksjomaty - pary równości definiujące wszelkie funkcje prymitywnie rekurencyjne. *„In principle one could base an axiomatisation of constructive arithmetic on the basic operations $0, succ$, addition and multiplication and equality as the only predicate. However, this has the disadvantage that developing elementary number theory (...) would involve a lot of coding. Therefore, we prefer to take all primitive recursive algorithms as basic constants and postulate their defining equations as axioms" [40].* To rozszerzenie teorii jest *konserwatywne* - dodanie nowych aksjomatów nie zwiększa zbioru dowodliwych zdań.

[49]*„Classical and intuitionistic arithmetic are equiconsistent."*

[50]*Gödel-Gentzen translation* -przyporządkowanie $\phi \rightsquigarrow \phi^N$ - nie jest, jak w twierdzeniu Glivenki, „podwójną negacją". Jest bardziej skomplikowane [11]. Dodajmy ciekawostkę: gdyby implikacja - *„double negation shift"* - $\forall_x \neg\neg\phi(x) \leftrightarrow \neg\neg\forall_x \, \phi(x)$ była prawem logiki intuicjonistycznej, to można by przyjąć $\phi^N = \neg\neg\phi$. Ale tak nie jest.

[51]$PA \vdash \forall_x \exists_y \, \alpha(x, y)$ dokładnie wtedy gdy $HA \vdash \forall_x \exists_y \, \alpha(x, y)$ - to twierdzenie udowodnione przez Kreislera [11]

[52]W [27] J. van Oosten pisze, że wprawdzie ten dowód przedstawił D.H.J de Jong w nieopublikowanym artykule (w 1969r.) ale odniósł tylko „częściowy sukces". Autorstwo pełnego dowodu van Oosten przypisuje sobie. O tej zawiłej historii można przeczytać w artykule *Intermediate logics and the de Jongh property* (współautor: De Jongh) dostępnym w internecie.

Rozdział 2

Kategorie, funktory i toposy

Zwycięstwem będzie przede wszystkim
Dobrze widzieć z daleka
Wszystko widzieć z bliska
I żeby wszystko miało nowe imię.
G. Apollinaire

„Categories, initially a convenient way of formulating exact sequences, diagram chasing and axiomatic homology for topology, aquired independent life in the work of Ehresmann (...) in France, and in United States in the work of Kan and McLane, and in a group around Eilenberg (...) . Then in 1963 Lawvere embarked on the daring project of a purely categorical foundations of all mathematics" [22].

2.1 Język kategorii

„Mathematics is the art of giving the same name to different things"
H. Poincare

Teoria kategorii oferuje schemat poznawczy pozwalający opisywać różne fragmenty matematycznego uniwersum. Dostarcza też narzędzi do badania związków między tak opisanymi „matematycznymi światami".

Te światy to *kategorie*. A związki między nimi opisują *funktory*.
Kategoria to *obiekty* i *morfizmy*. Z każdym morfizmem związana jest para obiektów - jego dziedzina i kodziedzina. Piszemy „$f\colon A \to B$" i mówimy, że *„f jest morfizmem z obiektu A do obiektu B"*. Morfizmy składamy - jeżeli $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to C$, to ich *złożeniem* jest morfizm $gf\colon A \to C$. Składanie jest łączne[1]. Z każdym obiektem A związany jest morfizm identycznościowy $id_A\colon A \to A$ taki, że $fid_A = f = id_B f$ dla dowolnego morfizmu $f\colon A \to B$.

> Aksjomatyka ZFC to zbiór stwierdzeń arbitralnie dekretujących istnienie pewnych obiektów matematycznych: *„istnieje zbiór pusty"*, *„istnieje zbiór induktywny"* itd. Ona kreuje rzeczywistość.
> Aksjomaty teorii kategorii to tylko wskazanie warunków, jakie muszą być spełnione, by dany fragment rzeczywistości postrzegać i badać jako „kategorię".
> Teoria kategorii organizuje poznanie matematyczne. Epistemologia v. ontologia?

Kategorię tworzą zbiory i funkcje. Kategorią są przestrzenie topologiczne z funkcjami ciągłymi jako morfizmami. Algebraik będzie zainteresowany kategoriami grup, pierścieni, modułów. Logik - kategorią algebr Boole'a czy też algebr Heytinga.
Ale to nie znaczy, że obiektami kategorii muszą być zbiory wyposażone w struktury „tego samego

[1] $f(gh) = (fg)h$ dla dowolnej trójki składalnych morfizmów.

rodzaju"[2]. Np. każdy *graf skierowany* może być traktowany jako kategoria: obiektami są tu wierzchołki grafu, a morfizmy to *ścieżki* - skończone sekwencje zgodnie skierowanych krawędzi. Kategorią jest też dowolny poset $(P, \leqslant)$ - obiektami są tu elementy P a (jedyny) morfizm z a do b istnieje wtedy, gdy $a \leqslant b$. Strukturę liczb naturalnych można postrzegać jako jednoobiektową kategorię, w której są one morfizmami, a składanie jest realizowane jako dodawanie. Kategorią może być niemalże wszystko...[3].

Budując uniwersalną - w zamierzeniu - teorię mnogości, jej twórcy musieli rozstrzygnąć pewne dylematy, nadając tym rozstrzygnięciom status aksjomatów. Teoria kategorii jest wolna od obowiązku rozstrzygania dylematów ontologicznych. Dopuszcza współistnienie światów matematycznych - kategorii - w których te kwestie rozstrzygane są odmiennie. Można - obok kategorii wszystkich zbiorów **Set** w której akceptujemy nieskończoną skalę nieskończoności[4] - rozpatrywać kategorię zbiorów skończonych $\mathbf{Set}_f$ w której nieskończoność jest nieobecna. Można wyróżnić kategorię zbiorów przeliczalnych - matematykę z jednym rodzajem nieskończoności. Nie trzeba już upychać całej matematyki w jednym uniwersalnym modelu.

Wyróżnienie fragmentu matematycznego uniwersum jako kategorii nie oznacza jego odseperowania od reszty matematyki. Przeciwnie: to, że różne fragmenty matematyki opisujemy korzystając z tego samego schematu, ułatwia poszukiwanie i opis związków między nimi.

Te związki opisujemy i badamy za pomocą *funktorów*.

> Funktor $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ to odwzorowanie między kategoriami respektujące ich podstawową strukturę: obiekty przeprowadza na obiekty a morfizmy na morfizmy, zachowując ich składanie oraz identyczności[5].

> Jeżeli kategorie są lokalnymi światami matematycznymi, to funktory pozwalają na interpretację jednego świata w drugim. Funktory są różne: mogą „zanurzać" (jedną kategorię w drugą), potrafią „zapominać" (strukturę obiektów), ustalać równoważność między kategoriami. Funktory potrafią „zachowywać" i „kreować" własności obiektów. Są mądrzejsze niż funkcje...[6].

Najciekawsze są funktory, które działają między mocno różniącymi się światami-kategoriami. Takie konfrontowanie różnych dziedzin matematyki prowadzi często do niebanalych, a nawet zaskakujących, odkryć. Np. wyróżnienie („odkrycie") pewnych funktorów między kategorią przestrzeni topologicznych i kategorią grup pozwoliło na badaniu struktur topologicznych za pomocą narzędzi algebraicznych[7].

Przedstawiając teorię ZFC opisałem (starałem się ...) mechanizm poszerzania języka teorii mnogości. Te rozszerzenia były *konserwatywne* - wprowadzeniu nowego pojęcia zawsze towarzyszyło twierdzenie o istnieniu jego desygnatu[8]. Tak wprowadzane pojęcia są interpretowalne w każdym modelu ZFC. To zrozumiałe - wszak ta teoria miała mieć jeden model zamierzony - uniwersum.

Struktura języka kategorii jest inna. W jego warstwie podstawowej pojęć jest mało - *„obiekt"*, *„morfizm"* , *„złożenie morfizmów" i „morfizm identycznościowy"*. I tylko one muszą być interpretowalne w każdej kategorii. Drugą warstwę tworzą pojęcia interpretowalne tylko w pewnych modelach tej teorii. To sprawia, że język kategorii umożliwia klasyfikację lokalnych matematycznych światów:

---

[2]Takie kategorie nazywamy *konkretnymi*.

[3]W pewnej monografii (prawdopodobnie w książce *„Algebraic theories"* E. Manesa, ale nie jestem pewny) jako przykład wskazano kategorię, której jedynym obiektem jest R. Nixon a morfizmem ... banan. (Nixon to przydent USA o wątpliwej sławie.). Uniwersalny charakter języka kategorii jednych cieszy bardziej, innych mniej. W monografii poświęconej topologii algebraicznej N.E.Steenrod nazwał teorię kategorii „abstrakcyjnym nonsensem"... .

[4]Bardziej precyzyjnie: kategoria zbiorów to dowolnie wybrany model ZFC. W tej kategorii morfizmy to funkcje.

[5]Jeśli $g : A \to B$ w $\mathbf{C}$, to $F(g) : F(A) \to F(B)$. $F(id_A) = id_{F(A)}$ oraz $F(gf) = F(g)F(f)$.

[6]Dla Eilenberga i Mc Lane'a, twórców teorii kategorii, funktor był pojęciem podstawowym:*„It should be observed that the whole concept of a category is essentially an auxiliary one. Our basic concepts are essentially those of a functor and of a natural transformation... .The idea of a category is required only by the precept that every functor should have a definite class as domain and a definite class as range, for the categories are provided as the domains and ranges of functors." - General Theory of Natural Equivalences', Transactions of the AMS, 58, pp. 239—94.*

[7]Te badania to domena *topologii algebraicznej*. Można też wygłosić „stwierdzenie odwrotnie": badania w zakresie topologii algebraicznej i osągnięte wyniki były istotnym impulsem rozwoju teorii kategorii.

[8]Hipoteza continuum jest tu wyjątkiem. Są i inne, ale ważne jedynie dla „podstawowców".

pewne kategorie są ubogie, bo interpretujemy w nich tylko podstawowe pojęcia. Inne są bogatsze, bo pozwalają na interpretację pojęć „drugiej (i wyższych) warstw” języka.

Granice

Ważnym pojęciem tej „drugiej warstwy” języka jest *granica diagramu.*
Diagram to graf, którego wierzchołki są etykietowane przez obiekty rozważanej kategorii a krawędzie - przez działające między mimi morfizmy. Diagram może wyglądać np. tak[9]:

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r, "\phi"] & A_1 \\
& A_2 \arrow[u, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

(ten diagram jest posadowiony na grafie z trzema wierzchołkami i dwiema krawędziami). *Stożek* nad tym diagramem rysujemy tak:

$$\begin{tikzcd}
& A_0 \arrow[r, "\phi"] & A_1 \\
& & A_2 \arrow[u, "\psi"'] \\
D \arrow[uur, dotted, "f_0"] \arrow[uurr, dotted, "f_1"] \arrow[urr, dotted, "f_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Formalnie: stożek nad tym diagramem to obiekt D wraz z morfizmami $f_i \colon D \to A_i$ takimi, że „wszystkie trójkąty są przemienne” - $\phi f_0 = f_1$, $\psi f_2 = f_1$.
Granica tego diagramu to *stożek uniwersalny* $(C, (\Pi_i \colon C \to A_i : i = 1, 2, 3))$ - taki, że dla każdego innego stożka $(D, (f_i \colon D \to A_i))$ istnieje dokładnie jeden morfizm $f \colon D \to C$ dla którego wszystkie nowopowstałe trójkąty są przemienne (tzn. $\Pi_i \cdot f = f_i$ dla $i = 1, 2, 3$):

$$\begin{tikzcd}
& A_0 \arrow[r, "\phi"] & A_1 \\
& C \arrow[u, "\Pi_0"] \arrow[r, "\Pi_2"] & A_2 \arrow[u, "\psi"'] \\
D \arrow[uur, dotted, "f_0"] \arrow[ur, dotted, "f"] \arrow[urr, dotted, "f_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Opisana tu granica to *pullback* (pary morfizmów (ϕ, ψ))[10].

Aby mówić o dowolnych diagramach i ich granicach wystarczy nasz przykładowy graf zastąpić jakimkolwiek - skończonym lub nieskończonym - multigrafem skierowanym[11]. Dalej bez zmian - granica to stożek uniwersalny nad danym diagramem.

> Mówiąc o granicach nie tylko rysujemy diagramy, ale też ochoczo korzystamy z języka geometrii - mówimy o „przemiennych trójkątach”, „stożkach”, „prostokątach” itp., itd. To nie jest konieczne.
> Ale czy bez tych geometrycznych metafor łatwiej zrozumieć, czym jest granica?

Grafy - bazy diagramów - można wybierać dowolnie. Dlatego mamy nieograniczenie, wręcz niewyobrażalnie wiele rodzajów granic. Ale teoria kategorii oferuje twierdzenie, które wprowadza w tym kosmicznym chaosie „platoński ład”:

„jeżeli w rozważanej kategorii istnieją wszelkie ekwalizatory i (skończone) produkty, to istnieją w niej też wszelkie (skończone) granice”.

---

[9] Kategoryści uwielbiają rysować, przepraszam, ilustrować swoje konstrukcje rysunkami-diagramami. Jedną z technik dowodzenia nazwali nawet *„diagram chasing”* - „bieganie po diagramie”.

[10] Na ostatnim rysunku brak dwóch morfizmów - $f_1 \colon D \to A_1$ i $\Pi_1 \colon C \to A_1$. To zgodne z ockhamowska zasadą: skoro $\Pi_1 = \phi\Pi_0 = \psi\Pi_2$ (i podobnie $f_1 = ...$), to po co komplikować rysunek dodając coś, co już na nim jest? Kategorysta powie krótko: „ten prostokąt jest pullbackiem”. Niestety, mimo starań nie wymyślono satysfakcjonującego polskiego odpowiednika tej nazwy... .

[11] „Multi” gdyż dopuszczamy istnienie krawędzi równoległych (czyli o tym samym początku i końcu).

- *Produkty* to granice diagramów dyskretnych, czyli posadowionych na grafach bez krawędzi[12].
- *Ekwalizator* pary „równoległych morfizmów” $f, g\colon A \to B$ to granica diagramu $A \overset{g}{\underset{f}{\rightrightarrows}} B$.

Trudno o coś prostszego. A jednak to wystarcza do konstrukcji granic nawet najbardziej skomplikowanych diagramów. Czy to nie jest zaskakujące?

> Pojęcie, które obejmuje wiele pozornie różnych konstrukcji, jest wartością samą w sobie: pojedyncze twierdzenie o własnościach granic (ustalonego typu) może być interpretowane w różnych kategoriach i w (pozornie) różnych sytuacjach.
> *„Matematyka jest sztuką nadawania różnym rzeczom tych samych nazw”* - H. Poincare.

Granica diagramu może, ale nie musi istnieć - to zależy od tego, z jaką kategorią mamy do czynienia. Dlatego to pojęcie można wykorzystać do klasyfikacji kategorii. Np. mówimy, że *kategoria jest (skończenie) zupełna, gdy istnieją w niej granice wszelkich (skończonych) diagramów*.

Zasada dualności

Trud włożony w zrozumienie czym jest granica diagramu opłaca się w dwójnasób. A to dlatego, że teoria kategorii „odkryła” nową prawdę o strukturze matematyki - *zasadę dualności*.
Jej źródłem jest banalna obserwacja: jeśli w dowolnej kategorii $\mathbf{C}$ „zmienimy kierunek morfizmów” - tzn. o morfizmie $f\colon A \to B$ powiemy, że działa on w odwrotnym kierunku, z B do A - to otrzymamy nową, poprawnie zdefiniowaną kategorię - *kategorię dualną* $\mathbf{C}^{op}$ [13].

Dzięki temu w języku kategorii karierę zrobił tajemniczy przedrostek *„ko”* używany do wskazywania *pojęć i twierdzeń dualnych*[14].Jak to działa? Na przykład tak:

„Kogranica diagramu $\mathcal{D}$ w kategorii $\mathbf{C}$ to granica tego diagramu w kategorii dualnej $\mathbf{C}^{op}$”[15]

Dlatego w języku kategorii obok produktów mamy *koprodukty* - kogranice diagramow dyskretnych. Skoro są ekwalizatory, to są też *koekwalizatory* (par równoleglych morfizmów). I tak dalej[16].

To nie zabawa w słowa. Dzięki zasadzie dualności każde twierdzeniem sformułowane w języku kategorii ma swą „wersję dualną”. I tak np. dualną wersją przytoczonego wcześniej twierdzenia:

„jeśli w kategorii $\mathbf{C}$ *istnieją wszelkie (skończone) produkty i ekwalizatory, to istnieją w niej granice wszelkich (skończonych) diagramów”*
jest twierdzenie:

„jeśli w kategorii $\mathbf{C}$ *istnieją wszelkie (skończone) koprodukty i koekwalizatory, to istnieją w niej kogranice wszelkich (skończonych) diagramów”*.
I co ważne (nie tylko dla leni): twierdzenia dualnego nie trzeba dowodzić! Jego dowód otrzymamy „dualizując” dowód pierwotnego twierdzenia.

> *„ko” - pierwszy człon wyrazów złożonych tworzący nazwy czynności wykonywanych wspólnie,(...) zjawisk albo rzeczy, w których współwystępują jakieś elementy lub procesy.”* Zasada dualności ujawnia szczególną symetrię matematycznego uniwersum. Dostrzegalną, gdy do jego opisu użyjemy języka teorii kategorii. Matematycy uwielbiają symetrię uznając ją za dowód istnienia w matematycznym świecie oczekiwanego ładu czy wręcz doskonałości (charakterystycznej dla bytów transcedentnych). Ale fizycy też[17].

[12] W szczególności, granica pustego diagramu to *obiekt konńcowy* - taki, że z każdego obiektu istnieje do niego dokładnie jeden morfizm. W **Set** obiekt końcowy to zbiór jednoelementowy.

[13] Obiekty $\mathbf{C}^{op}$ są takie same jak obiekty kategorii $\mathbf{C}$.

[14] Odpowiednikiem łacińskiego przedrostka *„ ko-”*, w języku polskim jest *„wspól-”*.

[15] Zachęcam do samodzielnego sformułowanie definicji kogranicy diagramu. Proszę nie bać się użyć takich pojęć jak „kostożek” czy nawet „kostożek kouniwersalny”... .

[16] Szczęśliwie, to szaleństwo ma swoje granice: np. nie mówimy o „ko-pullback”-ach tylko o *pushoutach* (par morfizmów o wspólnej dziedzinie) . Dualność określeń „pull(back)” i „push(out)” jest oczywista dla bywalców trzy i więcej gwiazdkowych hoteli i restauracji. A „kokogranica” to oczywiście granica... .

[17] O roli symetrii w rozumieniu piękna w sztuce i fizyce pięknie (choć krótko) pisał M.Heller w eseju *„Czy fizyka to nauka humanistyczna?”*. Fundamentalną rolę symetrii w fizyce opisuje *twierdzenie Noether* którego tu jednak nie będziemy dyskutować.

2.1.1 Teoria mnogości v. teoria kategorii

Dla teoriomnogościowego ortodoksy teoria kategorii to tylko kolejna teoria pierwszego rzędu. Nic się nie zmieniło - teoria mnogości jest nadal matematyczną ur-teorią.
Co na to kategoryści? *„In general,* WE SHALL NOT BE VERY EXPLICIT *about set-theoretic foundations, and we shall* TACTICALLY ASSUME *we are working in some fixed universe* U *of sets. Members of* U *will be called „small sets" whereas a collection of members of* U *which does not itself belongs to* U *will be reffered to as a „large sets"*[18]*. Given such an ambient universe (...)"* pisali S. Mc Lane i I. Moerdijk w [23].
„Założenie taktyczne", czyli przyjęte po to, by uniknąć jałowych dyskusji o wyższości Wielkiej Nocy nad Świętami Bożego Narodzenia (i odwrotnie)[19].
Jednak charakter tego tekstu zmusza nas przynajmniej do próby porównania tych teorii. Ich twórcy mieli w zasadzie ten sam cel - stworzenie uniwersalnego narzędzia oglądu zastanej matematyki. Twórcy teorii mnogości, wierni ockhamowskiemu paradygmatowi, budowali tę - w zamierzeniu uniwersalną - „ur-teorię" na fundamencie ograniczonym do jednego pierwotnego pojęcia - zbioru - i jednej relacji - „$\in$". Aksjomaty ZFC, ponownie „w zamierzeniu" miały tworzyć system zupełny pozwalający orzekać o prawdziwości wszelkich zdań matematycznych.
Teoria kategorii odrzuca te paradygmaty. Czas jaki upłynął między powstaniem obu teorii był wystarczająco długi by poznać zalety i wady teorii mnogości. Co więcej, wniknięcie fizyków w świat kwantów uświadomiło, że tworzenie uniwersalnych teorii wcale nie musi być priorytetem.
Teoria kategorii sugeruje, by wszelkie interesujące nas „fragmenty" matematycznego uniwersum postrzegać według tego samego schematu - jako kategorię czyli strukturę złożoną z obiektów powiązanych ze sobą poprzez morfizmy. I tak w kategorii zbiorów **Set** - obiekty to zbiory a morfizmy to funkcje. Ale pojęcie „zbiór" traktujemy intuicyjnie: *„Abstrakcyjny zbiór powinien zawierać elementy, z których żaden* NIE MA STRUKTURY, *z wyjątkiem tego, że elementy* MOŻNA ROZRÓŻNIĆ JAKO RÓWNE LUB NIERÓWNE *i nie ma żadnej zewnętrznej struktury poza liczbą elementów" [21]* - tak pisali F.W. Lawvere i R. Rosenburgh definiując „kategorię abstrakcyjnych zbiorów". Zauważmy: w kategoryjnym opisie świata zbiorów relacja przynależności (zbioru do zbioru) jest nieobecna! W konsekwencji nie wyróżnimy zbiorów tranzytywnych, liczb porządkowych i hierarchii von Neumanna! Pamiętając o roli tych pojęć w badaniu podstaw teorii mnogości musimy się zgodzić, że kategoryjne spojrzenie na zbiory istotnie różni się od postrzegania ich przez teorię mnogości[20].

Dla większości robotników matematyki spór, czy lepszym językiem opisu matematycznego uniwersum jest język teorii mnogości czy język kategorii, jest nieistotny. Dla nich te języki są raczej dopełniające niż konkurencyjne. Pozwalają spojrzeć na matematyczne obiekty i konstrukcje z różnych punktów widzenia. Przekonanie o komplementarności obu języków bierze się stąd, że wiele „ważnych" kategorii to matematyczne światy pierwotnie opisane w języku teorii mnogości: kategorie zbiorów, grup, pierścieni, przestrzeni topologicznych, itd. W tych kategoriach możemy równolegle (równocześnie) używać obu języków uzyskując lepszy obraz tych matematycznych światów.

Zilustrujmy to najprostszym przykładem. Teoriomnogościowa definicja iloczynu kartezjańskiego zbiorów eksponuje jego wewnętrzną strukturę - *„elementy iloczynu* $A \times B$ *to pary uporządkowane* (a, b) *takie, że* $a \in A, b \in B$*"*. Kategoryjna definicja produktu pary obiektów w **Set** skupia uwagę na jego relacji z innymi zbiorami: *„produkt zbiorów* A, B *to zbiór* C *wraz z funkcjami* $\Pi_A \colon C \to A$, $\Pi_B \colon C \to B$ *takimi, że dla dowolnych funkcji* $f \colon D \to A, g \colon D \to B$ *istnieje dokładnie jedna funkcja* $< f, g >\colon D \to C$ *taka, że* $\Pi_A \cdot < f, g >= f, \Pi_B < f, g >= g$ *"*. Obie definicje wskazują ten sam obiekt w **Set**[21].

Przykład nieco bardziej wyrafinowany: *funkcja różnowartościowa* $f \colon A \to B$ przyporządkowuje

[18] „Small sets" to w naszej terminologii „zbiory a „large sets" - klasy.
[19] J.T. Stanisławski.
[20] Dodajmy, że definiując w [21] pojęcie kategorii autorzy unikają - jak najbardziej świadomie! - terminu zbiór. Piszą tak: *„A category* **C** *has the following data: Objects: (...), Arrows:(...)"*. „Data" to (w tym przypadku) „dane" - termin, który nie ma określonej matematycznej treści.
[21] Troszkę kłamię: definicja kategoryjna identyfikuje iloczyn kartezjański „z dokładnością do izomorfizmu" - patrz następny podrozdział. Podobnie rzeczy się mają, gdy porównamy pojęcia *sumy rozłącznej i koproduktu* zbiorów.

różnym argumentom różne wartości. *Funkcja* $g\colon A \to B$ *jest „na”* gdy dla każdego elementu $b \in B$ można wskazać element $a \in A$ taki, że $g(a) = b$. To proste definicje. Ale konia z rzędem temu teoriomnogościowcowi, który dostrzega jakieś ich „powinowactwo”. Tymczasem w języku kategorii funkcja różnowartościowa to *monomorfizm:* $f\colon A \to B$ *jest monomorfizmem gdy dla dowolnych morfizmów* $k, h\colon C \to A$, $k = h$ *jeśli tylko* $fk = fh$. A funkcja „na” to *epimorfizm:* $g\colon A \to B$ *jest epimorfizmem gdy dla dowolnych morfizmów* $k, h\colon B \to C$, $k = h$ *jeśli tylko* $kg = hg$. Trzeba być ślepym, by nie widzieć, że mono- i epimorfizm to pojęcia dualne... . I dlatego każde twierdzenie o funkcjach różnowartościowych (wyrażone w języku kategorii) ma swój dualny odpowiednik mówiący coś o funkcjach „na”. Np.: *„jeśli złożenie funkcji* fg *jest różnowartościowe, to* g *jest różnowartościowe”* $\rightsquigarrow$ *„jeśli złożenie* gf *jest „na”, to* g *jest „na”*[22]

Podsumujmy tę dyskusję obszernym cytatem z [3]: *„Wraz z utworzeniem i doskonaleniem teorii mnogości przez Cantora, Zermelo, von Neumanna i innych, problem zapewnienia* INFRASTRUKTURY *dla skomplikowanych osiągnięć w dziedzinach matematyki, takich jak algebra abstrakcyjna, analiza i topologia, wydawał się być rozwiązany. Dziedzina (kategoria) zbiorów (...) zaczęła być uważana przez większość matematyków (ci o konstruktywnej tendencji, tacy jak intuicjoniści są wyjątkami) jako źródło „surowca” do budowy struktur funkcjonujących we wszystkich dziedzinach matematyki.*

W jakim sensie teoria kategorii mogłaby służyć jako podstawa matematyki? Wydaje się, że istnieją (przynajmniej) dwa możliwe sensy: w silnym sensie - wszystkie pojęcia matematyczne, w tym te, które wyznaczają obecnie ramy logiczno-metateoretyczne matematyki, dają się formułować i są wytłumaczalne w języku teorii kategorii. W słabszym sensie - teoria kategorii może służyć jako (być może nadrzędny) „substytut” teorii mnogości w jej obecnej fundamentalnej roli” .

> Ja bym dodał: teoria mnogości kreuje świat matematyki. Teoria kategorii oferuje uniwersalną „formę ujmowania zjawisk” w tym świecie.

2.1.2 Izomorfizm

W wikipedii napisano: *In certain areas of mathematics (...) it is valuable to distinguish between equality on the one hand and isomorphism on the other. Equality is when two objects are* EXACTLY *the same, and* EVERYTHING *that's true about one object is true about the other, while an isomorphism implies everything that's true about a* DESIGNATED PART *of one object's structure is true about the other's.* Dwa zbiory - obiekty **Set** - są równe, gdy mają te same elementy. Są izomorficzne, gdy można ustalić wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między ich elementami, gdy są *równoliczne*.

Myśląc kategoryjne uznamy obiekty A i B dowolnej kategorii $\mathbf{C}$ za „takie same”, gdy ich relacje z wszelkimi obiektami są identyczne. Np. gdy istnieje (mono-) epimorfizm z obiektu D do A, to powinien istnieć (mono-) epimorfizm z D do B. Jeśli A jest granicą (kogranicą) pewnego diagramu, to jest nią również obiekt B.
Doprecyzowanie tego zamysłu to taka definicja: *obiekty* A *i* B *są izomorficzne, gdy istnieje para wzajemnie odwrotnych morfizmów* $f\colon A \to B$ *i* $g\colon B \to A$ *- tzn. takich, że* $fg = id_B$, $gf = id_A$.

> Aby uniknąć dalszych jałowych rozważań o „istocie izomorfizmu” uznajmy tę kategoryjną definicję za podstawową, a inne za mniej lub bardziej udane próby opisu tego pojęcia w różnych matematycznych światach, w różnych językach.

Izomorfizm jest jednocześnie epi- i monomorfizmem. Ale implikacja odwrotna nie zawsze musi być prawdziwa (choć np. jest prawdziwa w **Set**).

> W języku kategorii często pojawia się zwrot *„z dokładnością do izomorfizmu”*. Z dokładnością do izomorfizmu definiujemy potrzebne nam obiekty, np. granice i kogranice. To potwierdza, że formalnie definiowany

[22] .*„Mój język wyznacza granice mojego poznania” - L. Wittgenstein*. Po raz kolejny.

izomorfizm realizuje pierwotny zamysł - wskazuje „kategoryjnie takie same” obiekty[23].

2.2 Toposy

(...) when does the category look and behave like **Set***?*
A vague answer is - when it is (at least) a topos[24].
R. Goldblatt, Topoi

W 1964 roku W. Lawvere sformułował własności, które charakteryzują kategorię zbiorów „z dokładnością do równoważności” [20][25]. Chciał uchwycić i wyrazić w języku kategorii te cechy kategorii zbiorów i funkcji które zdecydowały, że została ona uznana za podstawę współczesnej matematyki. To, co ostatecznie stało się definicją toposu, to część wyróżnionych przez Lawvere'a własności:[26]

topos to kartezjańsko domknięta kategoria, w której istnieją wszelkie skończone granice i specjalny obiekt - klasyfikator podobiektów Ω .

Teoria mnogości to ur-teoria klasycznej matematyki, pośrednicząca między matematyczną rzeczywistością a wszelkimi innymi teoriami - dostarcza semantyk dla wszelkich teorii pierwszego rzędu.
Aby kategoria **C** mogła zastąpić kategorię zbiorów w tej roli musi mieć wystarczająco bogatą strukturę, by można było mówić o modelach dowolnej teorii pierwszego i wyższych rzędów w tej kategorii.
I to ma zapewnić definicja toposu.

Definicja modelu języka pierwszego rzędu w toposie **C** powinna być taka, by „po powrocie do źródeł” - czyli dla $\mathbf{C} = \mathbf{Set}$ - była ona tożsama z klasyczną definicją Tarskiego, czyli:

1. model $\mathcal{A}$ *w* **C** *jest posadowiony na pewnym obiekcie tej kategorii - nośniku modelu,*
2. semantyką n*-argumentowej relacji (i formuły o* n*-zmiennych wolnych) jest „coś”, co odpowiada teoriomnogościowemu pojęciu „podzbiór* n*-tej potęgi kartezjańskiej nośnika modelu”.*
3. Struktura toposu powinna umożliwiać interpretację spójników logicznych i kwantyfikatorów a także operacji podstawiania (termów w miejsce zmiennych). Inaczej mówiąc, podobnie jak w **Set***, każdy obiekt powinien generować pewną otaczającą go „elementarną strukturę”*[27]

Z odpowiednikiem „n-tej potęgi kartezjańskiej zbioru” nie ma kłopotu: skoro w toposie są wszelkie skończone granice, to są też produkty dowolnej liczby kopii każdego obiektu[28].

Wskazanie kategoryjnego odpowiednika „podzbioru” jest nieco bardziej kłopotliwe. W języku toposów nie znajdziemy odpowiednika *„zanurzenia identycznościowego”* wykorzystywanego w **Set** do zdefiniowania podzbioru zbioru A[29]. Można wprawdzie zdefiniować podobiekt obiektu A jako

[23]Kategoryści zamiast danej pierwotnie kategorii **C** badają czasem jej *szkielet* - kategorię, której obiekty są reprezentantami klas obiektów izomorficznych w **C** a morfizmami wszelkie morfizmy między tak wybranymi obiektami. Taki szkielet ma te same (kategoryjne) własności co **C**. Ale, jak widać, ta konstrukcja odwołuje się do aksjomatu wyboru który przecież chcemy traktować jako specyficzną (i nieoczywistą) cechę kategorii **Set**. Dlatego ze szkieletów korzystamy raczej wtedy, gdy możliwy jest kanoniczny (i konstruktywny) wybór reprezentantów.

[24]Topos, to pojęcie funkcjonujące też poza matematyką. Zainteresowanych odsyłam do polskiej wikipedii, gdzie znaleźć można obszerną informację, która zaczyna się od słów: *„Topos lub miejsce wspólne...”*. Co ciekawe, wśród dziedzin nauki, w których pojawia się ten termin Autor notki nie wymienia matematyki.

[25]Dokładniej: chodziło o tzw. *Set-like categories*” - kategorie „zbioropodobne”, równoważne z **Set**. Równoważność kategorii to pojęcie nieco słabsze od izomorfizmu kategorii, ale satysfakcjonujące kategorystów.
William Lawvere (1937 -) - matematyk amerykański, jeden z współtwórców teorii kategorii.

[26]W teorii literatury: *topos - stały motyw, wątek,* STEREOTYP WYOBRAŻENIOWY *(...) Toposy są przedstawieniami uogólnionymi, wyrażającymi pewną wizję i ocenę świata (...)* (tendencyjnie wybrane fragmenty internetowej definicji).

[27]O elementarnych strukturach pisałem w Części 1.

[28]Na marginesie: w definicji toposu wymaga się tylko istnienia skończonych produktów. A co z koproduktami? Czyżby te światy były „asymetryczne”? Wcale nie: piękne twierdzenie Mikkelsena mówi, że w każdym toposie są wszelkie skończne koprodukty...

[29]*„Zbiór* B *jest podzbiorem* A *gdy istnieje zanurzenie identycznościowe - funkcja* $i_B : B \to A$ *taka, że dla dowolnego* $b \in B$, $i_B(b) = b$*”*

„klasę równoważności monomorfizmów o kodziedzinie A” ale to nie jest satysfakcjonujące rozwiązanie.

> „Klasa równoważności” to pojęcie teoriomnogościowe. Potrzebujemy wewnętrznej, kategoryjnej definicji podobiektu jeśli chcemy, by teoria toposów była nową ur-teorią.[30]

Kluczem do rozwiązania problemu jest prosta obserwacja:

- *podzbiór $B \subseteq A$ jest jednoznacznie wyznaczony przez funkcję $\lambda_B \colon A \to \{0,1\}$ taką, że dla dowolnego elementy $a \in A$:*

$$a \in B \qquad gdy \qquad \lambda_B(a) = 1^{31}.$$

Taki opis podzbioru można odtworzyć w języku kategorii korzystając z granicy-pullbacku:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\lambda_B"] & \{0,1\} \\ B \arrow[u, "i_B"] \arrow[r, "!_B"] & \{1\} \arrow[u, "true"'] \end{tikzcd}$$

(gdzie $!_B \colon B \to \{1\}$ to jedyna funkcja z B do zbioru jednoelementowego $\{1\}$ a $true(1) = 1$).

To powinno wystarczyć do zrozumienia definicji - i roli! - *klasyfikatora podobiektów* w toposie:

klasyfikator podobiektów w toposie **C** *to obiekt Ω wraz z morfizmem $true : \underline{1} \to \Omega$ (gdzie $\underline{1}$ to obiekt końcowy) taki, że dla dowolnego monomorfizmu $m : B \to A$ istnieje dokładnie jeden morfizm $\lambda_B : A \to \Omega$ taki, że prostokąt*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\lambda_B"] & \Omega \\ B \arrow[u, "m"] \arrow[r, "!_B"] & \underline{1} \arrow[u, "true"'] \end{tikzcd}$$

jest pullbackiem[32].

Choć zabrzmi to dziwnie, *podobiektami obiektu A nazywać będziemy morfizmy z A do Ω.*[33]

> W każdej interpretacji języka pierwszego rzędu w toposie semantyką formuły $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ w modelu posadowionym na obiekcie A jest pewien podobiekt A^n - morfizm $[[\phi(x_1, \ldots, x_n)]] : A^n \to \Omega$

Nie trzeba zgadzać się z zaprezentowanym tu postrzeganiem toposa jako alternatywnego - w stosunku do kategorii zbiorów - matematycznego uniwersum.

2.3 Przykłady toposów

Przyjrzyjmy się prostym przykładom pozwalającym zrozumieć, że operowanie nieklasycznymi logikami w toposach jest naturalne. A nawet kuszące.

Zbiory zmienne w czasie

Zacznijmy od *toposa zbiorów zmiennych w czasie* - $\mathbf{Set}^{\to}$.

Przyjmijmy, że obserwujemy obiekt - zbiór i zachodzące w nim zmiany - w dwóch momentach czasowych: „0” i „1”. Taki obiekt opiszemy jako parę zbiorów (A_0, A_1) wraz z funkcją $t_A \colon A_0 \to A_1$. Zbiór A_0 to stan obiektu *„w chwili 0”*, A_1 - stan *„w chwili 1”* a funkcja t_A opisuje zmiany w czasie - $a \in A_0 \rightsquigarrow t_A(a) \in A_1$.

[30] Do kwestii „uwewnętrzniania” wrócimy, gdy będziemy wiedzieli więcej o toposach.

[31] λ_B to *funkcja charakterystyczna* podzbioru B.

[32] $!_B : B \to \underline{1}$. to jedyny morfizm z obiektu B do obiektu końcowego $\underline{1}$.

[33] Zdarza się, że w danym toposie podobiekty mają *kanoniczną* czyli *wyróżnioną* reprezentację. W **Set** są to zanurzenia identycznościowe. Ktoś powie, że kanoniczną reprezentację można wyróżnić zawsze - wystarczy skorzystać z pewnika wyboru. Ale przecież nie tego chcemy... .

Morfizm z obiektu $(B_0 \overset{t_B}{\to} B_1)$ do $(A_0 \overset{t_A}{\to} A_1)$ to para funkcji $(f_0 : A_0 \to B_0, f_1 : B_1 \to A_1)$ „respektująca zmiany w czasie" tzn. taka, że $f_1 \cdot t_B = t_A \cdot f_0$:

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "f_1"] & A_1 \\ B_0 \arrow[u, "t_B"] \arrow[r, "f_0"] & A_0 \arrow[u, "t_A"'] \end{tikzcd}$$

Łatwo zdefiniujemy składanie takich morfizmów-par funkcji i pokażemy, że $\mathbf{Set}^{\to}$ jest kategorią. Ale ta kategoria jest też toposem. Na czym polega jego odmienność?

Pomyślmy o elementach obiektu $(A_0 \overset{t_A}{\to} A_1)$. Elementem - zmiennym w czasie - jest niewątpliwie każda para $(a_0, t_A(a_0)) : a_0 \in A_0$ to stan elementu w *„chwili 0"* a $t_A(a_0)$ - stan tego samego elementu w *„chwili 1"*. Ale są tu też elementy, których nie ma w *„chwili 0"* a pojawiają się w *„chwili 1"* - to elementy zbioru $A_1 \setminus t_A(A_0)$. Czy ich „istnienie" jest takie samo jak istnienie elementów obecnych w obu chwilach?

Podobne wątpliwości pojawią się gdy spytamy o równość elementów. Czy elementy $(a_0, t_A(a_0))$ i $(c_0, t_A(c_0))$ takie, że $t_A(a_0) = t_A(c_0)$, - różne w *„chwili 0"* a równe w *„chwili 1"* - są równe czy różne? Czy równość elementów pojawiających się w *„chwili 1"* jest „taka sama" jak elementów obecnych w obu momentach?

A co z przynależnością elementu do podobiektu? Czy element $(0, 1)$ obiektu $(\{0, 0\} \overset{id}{\to} \{0, 1\})$ należy do podobiektu $(\{1\} \to \{0, 1\})$ czy też nie? A może „należy lokalnie"? I jak odpowiedzieć na pytanie, czy istnieje w $(A_0 \overset{t_A}{\to} A_1)$ element, który należy do podobiektu $(\emptyset \to A_1)$?

> To nie są marginalne czy też niedorzeczne pytania! Wręcz przeciwnie: uznanie „lokalnego" istnienia, równości czy przynależności za problemy godne matematycznego rozważenia, to pierwszy krok do zrozumienia teorii toposów[34].

Spójrzmy jeszcze na topos $\mathbf{Set}^{\rightrightarrows}$ którego obiektami są dwa zbiory połączone parą funkcji - $s, t : A_0 \rightrightarrows A_1$ a morfizmami - odpowiednie pary funkcji. Mając w głowie poprzedni przykład gotowi jesteśmy uznać, że to też „zmienne zbiory" z tą różnicą, że teraz zmienność jest opisywana przez dwie funkcje. Ale te obiekty można interpretować jako ... multigrafy[35]: A_0 to zbiór krawędzi, A_1 - zbiór wierzchołków a funkcje s, t przyporządkowują krawędziom ich początki i końce.
Intuicja bywa zwodnicza... .[36]

Toposy presnopów i toposy snopów

Presnop na przestrzeni topologicznej $(A, \mathcal{T})$ rodzina zbiorów indeksowana otwartymi podzbiorami - $\{F(U) : U \in \mathcal{T}\}$ - rozpatrywana wraz z funkcjami - „obcięciami": $a \in F(U) \rightsquigarrow a_{|V} \in F(V)$ jeśli $V \subseteq U$.

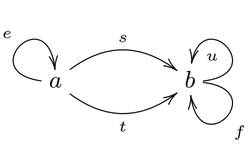
„Presnopy na dowolnie wybranej przestrzeni topologicznej - wraz z odpowiednio zdefiniowanymi morfizmami - tworzą topos"[37].

---

[34]We wcześniejszych wersjach tych notatek pisałem o „częściowym istnieniu", „częściowej równości" itp. . Jednak „częściwość" wydaje nam się „uporządkowana liniowo" a takiej niepożądanej intuicji chcemy tu uniknąć. Zastąpienie „częściowości" przez „lokalność" ma temu pomóc.

[35]Między dwoma wierzchołkami może być więcej niż jedna krawędź.

[36]Więcej informacji o tym toposie można znaleźć w artykule *„A Guided Tour in the Topos of Graphs (aut. S.Vigna)* dostępnym w internecie. Teraz powiedzmy tylko, że klasyfikator podobiektów w tym toposie to dwuwierzchołkowy graf z pięcioma krawędziami:



Spróbuj to sprawdzić... .

[37]„Nasz" topos $\mathbf{Set}^{\to}$ to topos presnopów na jednoelementowej przestrzeni topologicznej (w której są dwa zbiory otwarte - zbiór pusty i cała przestrzeń).

Skoro są presnopy, to pewnie są i snopy. Cóż to takiego? Zacznijmy od przykładu.
Presnop funkcji ciągłych to rodzina $(C(U) \colon U \in \mathcal{T})$, gdzie $C(U)$ to zbiór funkcji ciągłych z U do $\mathcal{R}$. Te funkcje umiemy w sposób oczywisty „obcinać” [38]. Ale potrafimy je też „sklejać”:

każda zgodna rodzina funkcji ciągłych $(f_i \colon U_i \to \mathcal{R} : i \in I)$ *- czyli taka, że dla dowolnych* $i, j \in I$, $f_{i|U_i \cap U_j} = f_{j|U_i \cap U_j}$ *- wyznacza funkcję ciągłą* $f \colon \bigcup(U_i : i \in I) \to \mathcal{R}$ *taką, że* $f_{|U_i} = f_i$ *dla każdego* $i \in I$ *.*

„Sklejanie elementów” to cecha, która wyróżnia snopy spośród presnopów:

snop na przestrzeni $(A, \mathcal{T})$ *to presnop* $\{F(U) : U \in \mathcal{T}\}$ *spełniający „warunek zgodności”:*
dla każdej rodziny $(a_i \in F(U_i) : i \in I)$ *zgodnych elementów - takich, że dla dowolnych* $i, j \in X$, $a_{i|U_i \cap U_j} = a_{j|U_i \cap U_j}$ *- istnieje dokładnie jeden element* $a \in F(\bigcup(U_i : i \in I)$ *taki, że* $a_{|U_i} = a_i$.

Kategoria snopów dowolnie wybranej przestrzeni topologicznej jest toposem [22].

Przykład. Opisany wcześniej topos $\mathbf{Set}^{\to}$ *to nie tylko topos presnopów nad przestrzenią jednoelementową, ale też topos snopów nad przestrzenią Sierpińskiego - dwupunktową przestrzenią* $\{0, 1\}$ *w której otwarte są zbiory* $\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}$. *Dlatego „nasz” topos to topos Sierpińskiego*[39]

Rozważając istnienie i równość elementów snopa (presnopa) F napotkamy na te same pytania co w toposie $\mathbf{Set}^{\to}$: czy „miara istnienia” elementu $a \in F(U)$ jest równa mierze jego obcięcia - elementu $a_{|V} \in F(V)$? Czy różne elementy $a, b \in F(U)$ których obcięcia $a_{|V}, b_{|V} \in F(V)$ są takie same uznamy za różne czy może lokalnie równe? A jeśli tak, to jak zdefiniować „logikę lokalnego istnienia i równości” w toposie snopów?

Dodatek: skąd te snopy (w matematyce)?

,(...) a sheaf is a tool for systematically tracking LOCALLY DEFINED DATA *attached to the open sets of a topological space.* *(wikipedia)*

Sklejenie zgodnej rodziny ciągłych funkcji rzeczywistych w jedną jest możliwe, bo definicja ciągłości jest „lokalna”. Do zrozumienia, na czym polega lokalny charakter definicji wystarczy przykład: jeśli w sposób analogiczny do presnopa funkcji ciągłych zdefiniujemy presnop funkcji rzeczywistych ograniczonych z góry, to utracimy możliwość sklejania zgodnych rodzin - sklejenie funkcji ograniczonych z góry nie musi być funkcją ograniczoną z góry. Ten presnop nie jest snopem, bo definicja „funkcji ograniczonej z góry” nie jest lokalna.

Ale dlaczego lokalna definiowalność jest tak ważna, że aż warta uwagi matematyków? Rozpatrzmy tylko jeden, ale przekonujący przykład.

Badając różne zjawiska na powierzchni całego ziemskiego globu - rozkład temperatury, wilgotności, ciśnienia atmosferycznego, zanieczyszczeń powietrza itd. - zakładamy, jak chciał Leibniz, że zmienność tych zjawisk ma charakter ciągły - opisujemy je jako rzeczywiste funkcje ciągłe[40].
Powierzchnia globu to *trójwymiarowa sfera*[41] czyli pewna przestrzeń topologiczna (którą oznaczamy tu przez M - „*Monde*”). Ale sfera to „trudna przestrzeń” - nie da się opisać GLOBALNYCH (czyli działających na całej przestrzeni M) rzeczywistych funkcji ciągłych w sposób pozwalający na efektywne badanie ich własności.
Rozwiązanie, które znaleźli przodkowie (żeglarze, podróżnicy i władcy marzący o podbojach) polega na wykorzystaniu lokalnego charakteru ciagłości: zamiast trudzić się poszukiwaniem globalnego opisu funkcji ciągłej $f \colon M \to \mathcal{R}$ opisywali interesujące ich zjawiska „kawałkami”, czyli za pomocą zgodnych rodzin funkcji ciagłych $f_i \colon U_i \to \mathcal{R}$, takich, że rodzina zbiorów otwartych $(U_i \colon i \in I)$

[38] $f_{|V}$ działa na elementach zbioru V tak samo jak f.
[39] Łatwo to udowodnisz, gdy przedtem zauważysz, że dla każdego snopa F zbiór $F(\emptyset)$ jest jednoelementowy.
[40] Mówimy tu o zmienności związanej z przemieszczaniem się po powierzchni globu a nie o zmienności w czasie.
[41] W pewnym uproszczeniu.

pokrywa całą przestrzeń M. To wystarczy, bo takie „lokalne” funkcje tworzą snop - lokalne zgodne opisy można skleić w opis globalny[42].

To wiele zmienia, bo każdy otwarty podzbiór $U \subsetneq M$, można odwzorować na płaszczyźnie - stworzyć jego *mapę*. Matematyk powie, że mapa to *homeomorficzne* odwzorowanie tego podzbioru na pewien otwarty podzbiór $W \subset \mathcal{R}^2$ - $h\colon U \to W$ [43]. Taka mapa pozwala zastąpić opis lokalnej funkcji ciągłej $f : U \to \mathcal{R}$ przez opis złożenia - funkcji $fh^{-1}\colon W \to U \to \mathcal{R}$ działającej na otwartym podzbiorze płaszczyzny[44]. A to o niebo łatwiejsze, bo do opisu i badania takich funkcji można użyć całego arsenału narzędzi wypracowanych przez analizę matematyczną.
Pierwotny pomysł - opis globalnych zjawisk za pomocą funkcji ciagłych $f\colon M \to \mathcal{R}$ - został w ten sposób przekształcony w niezwykle skuteczną metodę matematycznego modelowania i badania tych zjawisk. A wszystko dzięki temu, że „rzeczywiste funkcje ciągłe tworzą snop”[45].

Ta (niezbyt klarowna) opowieść miała przekonać, że snopy były obecne w matematyce długo przed powstaniem teorii toposów. Topos snopów to też pierwowzór *toposów Grothendiecka* - ważnej podklasy toposów. Tę klasę opiszemy tak (trochę zaszalejemy...): pojęcie prosnopa można uogólnić zastępując poset zbiorów otwartych $\mathcal{T}$ jakąkolwiek małą kategorią $\mathbf{D}$. Presnopy (na $\mathbf{D}$) to wówczas funktory z $\mathbf{D}^{op}$ do **Set** [22]. Takie presnopy tworzą topos. Co więcej, w dowolnej małej kategorii $\mathbf{D}$ można zdefiniować „coś”, co można nazwać topologią i co pozwala wyróżnić w toposie presnopów $PSh(\mathbf{D})$ mniejszy topos snopów - $Sh(\mathbf{D}, J)$ (gdzie J to owa wyróżniona „topologia” w $\mathbf{D}$). To są właśnie toposy Grothendiecka. Uff... [46].

2.4 Logika toposa

> W teorii toposów fascynujące jest to, że ujawnia się w niej fundamentalna i jednocześnie subtelna zależność między logiką a matematyką.
> I na tym skupimy teraz uwagę.

Na dwuelementowym zbiorze - klasyfikatorze podobiektów w **Set** - zdefiniowane są operacje odpowiadające spójnikom logicznym. To *algebra Boole'a wartości logicznych* ustalająca interpretację logiki zdaniowej w kategorii zbiorów. Podobnie jest w każdym toposie:

> Logika zdaniowa toposa jest zakodowana w otoczeniu klasyfikatora podobiektów. Jest wewnętrzna, bo jest zależna od struktury rozważanego toposa - jest wtórna w stosunku do jego matematyki.

Matryca (zbiór) wartości logiki toposu to zbiór podobiektów obiektu końcowego, czyli morfizmów postaci $w\colon \underline{1} \to \Omega$. Jedną z nich jest morfizm $true\colon \underline{1} \to \Omega$ wyróżniony w definicji klasyfikatora. Druga wartość to morfizm $false\colon \underline{1} \to \Omega$ - taki, że diagram

$$\begin{tikzcd}
\underline{1} \arrow[r, "false"] & \Omega \\
\underline{0} \arrow[u] \arrow[r] & \underline{1} \arrow[u, "true"']
\end{tikzcd}$$

jest pullbackiem [47]. Te dwa morfizmy - dwie wartości logiczne - znajdziemy w każdym toposie.

[42]To nie znaczy, że nasi przodkowie wiedzieli co to przestrzeń topologiczna. Snop kojarzyli raczej ze żniwami... .

[43]Ciągłość odwzorowania homeomorficznego h gwarantuje że punkty odpowiednio bliskie wybranemu dowolnie punktowi $a \in U$ znajdą się na tej mapie blisko punktu $h(a)$ (choć proporcje odległości mogą być zachwiane). Stworzenie homeomorficznego obrazu całej sfery M na płaszczyźnie jest niemożliwe - „narysowanie takiej mapy wymaga „rozerwania” sfery. To, co znamy jako mapę świata nie jest homeomorficznym obrazem sfery. Ale mapę można stworzyć np. dla Polski czy Europy. Wspomnij lekcje geografii i ”atlas świata”.

[44]Homeomorfizm $h\colon U \to W$ charakteryzuje się tym, że odwzorowanie $h^{-1}\colon W \to U$ jest też ciągłe.

[45]Zapewnienie zgodności rodziny funkcji $f_i : U_i \to \mathcal{R}$, po zastąpieniu ich funkcjami $f_i h^{-1}$ nie jest wielkim problemem.
Takie „lokalnie euklidesowe” przestrzenie topologiczne to *rozmaitości*.

[46]Mowa tu o tzw. *topologiach Grothendiecka*. Do toposów Grothendiecka jeszcze w tym tekście wrócimy.

[47]„$\underline{0}$” oznacza tu obiekt początkowy. Obiekt początkowy to pojęcie dualne do obiektu końcowego: dla dowolnego

Operacje logiczne na zbiorze wartości logicznych - koniunkcję, alternatywę, implikację i negację - definiujemy wewnętrznie, jako ... morfizmy. Najprostszy z nich - negacja - to (jedyny) morfizm $\neg : \Omega \to \Omega$ taki, że diagram-prostokąt

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "\neg"] & \Omega \\ \underline{1} \arrow[u, "false"] \arrow[r] & \underline{1} \arrow[u, "true"'] \end{tikzcd}$$

jest pullbackiem.
Zdefiniowanie koniunkcji, alternatywy i implikacji jako odpowiednich morfizmów z $\Omega \times \Omega$ do Ω wymaga nieco więcej pomysłowości. Ale jest możliwe [14].

Działanie morfizmów-operatorów logicznych na podobiektach obiektu A - morfizmach z A do Ω - definiujemy odwołując się do składania morfizmów:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "<f{,}g>"] \arrow[rr, bend right, "f\,op\,g"'] & \Omega \times \Omega \arrow[r, "op"] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\neg f"'] & \Omega \arrow[r, "\neg"] & \Omega \end{tikzcd}$$

gdzie $op \in \{\wedge, \vee, \to\}$.

W szczególności - dla $A = \underline{1}$ - zdefiniujemy w ten sposób *algebrę wartości logicznych* toposu.

Powiedzmy wreszcie to, co najistotniejsze:

> W różnych toposach mamy różne matryce wartości logicznych. Ale wewnętrzna logika zdaniowa każdego toposu jest zawsze logiką intuicjonistyczną - algebry podobiektów dowolnego obiektu A są zawsze algebrami Heytinga.
> I nie jest to dodatkowy warunek - to jest konsekwencja struktury toposu!

Kwantyfikatory

Struktura dowolnego toposa jest wystarczająco bogata, by z każdym morfizmem-rzutowaniem $\Pi\colon A \times B \to B$ można było związać dwie funkcje między zupełnymi algebrami Heytinga podobiektów produktu $A \times B$ i obiektu B:

$$\begin{tikzcd} Sub(A \times B) \arrow[r, "\Pi"] & Sub(B) \arrow[l, bend right, "\exists_A"'] \arrow[l, bend left, "\forall_A"] \end{tikzcd}$$

- takie, że dla dowolnych podobiektów $c\colon A \times B \to \Omega$ i $d\colon B \to \Omega$:

$$c \leqslant d \cdot \Pi \ \Leftrightarrow\ \exists_A(c) \leqslant d \qquad , \qquad d \cdot \Pi \ \leqslant\ c \Leftrightarrow d \leqslant \forall_A(c)$$

co oznacza, że:

- $\exists_A(c)$ *to najmniejszy podobiekt* B *taki, że* $c \leqslant \exists_A(c) \cdot \Pi$,
- $\forall_A(c)$ *to największy podobiekt* B *taki, że* $\leqslant \forall_A(c) \cdot \Pi \leqslant c$

Trochę trudno tu o intuicje...[48]. Ale warto wrócić na chwilę do Części 1, do fragmentu poświęconego analizie kwantyfikacji w **Set**.

Gdy B jest obiektem końcowym - $B = \underline{1}$ - i gdy utożsamimy produkt $A \times \underline{1}$ z A (co nam wolno) to kwantyfikacja wiąże z każdym podobiektem $c\colon A \to \Omega$ dwie wartości logiczne $\exists(c)$, $\forall(c)\colon \underline{1} \to \Omega$.

---

obiektu A istnieje dokładnie jeden morfizm z $\underline{0}$ do A. W **Set** jest to zbiór pusty.

[48] Dowód istnienia funkcji $\exists_A$ i $\forall_A$ wcale nie jest banalny. Można go znaleźć w [22]

Zrozumienie istoty kwantyfikacji w toposie ułatwi nam taka obserwacja: każda wartość logiczna $q\colon \underline{1} \to \Omega$ wyznacza *podobiekt logiczny* dowolnego obiektu A - morfizm

$$\underline{\gamma}_q\colon A \to \underline{1} \xrightarrow{q} \Omega.$$

Można pytać, czy podobiekt c obiektu A mieści się w „paśmie” wyznaczonym przez wartości logiczne q, p : czy $\gamma_q \leqslant c \leqslant \gamma_p$. Sens kwantyfikacji w tym, że:

wartości logiczne $\forall(c)$ i $\exists(c)$ wyznaczają „najwęższe pasmo” zawierające c - wskazują największy podobiekt logiczny w nim zawarty i najmniejszy go zawierający[49].

W mainstreamowej teorii modeli nie ma mowy o „pasmach” gdyż każdy obiekt (zbiór) A ma tylko dwa podobiekty logiczne - A i $\emptyset$ i tylko trzy „pasma” $(\emptyset, \emptyset)$, $(\emptyset, A)$ i (A, A). Nie mówimy o pasmach ale mówimy, że formuła ϕ jest *niespełniona, spełniona* lub *prawdziwa* w modelu posadowionym na zbiorze A w zależności od tego, w którym z tych pasm znajdzie się podzbiór $[[\phi]]$[50].

Kartezjańska domkniętość toposów

Zdefiniowanie kwantyfikacji w toposie w sposób tu opisany jest możliwe, bo każdy topos jest *kategorią kartezjańsko domkniętą*:

Kategoria ze skończonymi produktami **C** *jest kartezjańsko domknięta, gdy dla każdych dwóch obiektów D, B istnieje obiekt B^D taki, że dla dowolnego obiektu $A \in$* **C***:*

$$(*) \qquad \mathbf{C}(A \times B, D) \cong \mathbf{C}(A, D^B)$$

D^B to *obiekt funkcyjny (wykładniczy)* - *exponential object*. Gdy A jest obiektem końcowym - $A = \underline{1}$ - otrzymamy izomorfizm

$$\mathbf{C}(B, D) \cong \mathbf{C}(\underline{1} \times B, D) \cong \mathbf{C}(\underline{1}, D^B)$$

„morfizmy z B do D są reprezentowane przez elementy obiektu funkcyjnego D^B [51]. .

„Funkcje między zbiorami A i B tworzą zbiór” - kategoria **Set** jest, jak każdy topos, kartezjańsko domknięta. Ale kategoria zbiorów przeliczalnych już nie (bo funkcji między przeliczalnymi zbiorami może być nieprzeliczalnie wiele). Kategoria przestrzeni topologicznych i funkcji ciągłych nie jest kartezjańsko domknięta.
Poset jest kategorią. (Skończone) kresy dolne i górne to, w języku kategorystów, (skończone) granice i kogranice w posecie-kategorii. A jeśli dodatkowo zażądamy, by taki poset był kategorią kartezjańsko domkniętą, to otrzymamy... algebrę Heytinga. A to dlatego, że implikację definiuje równoważność

$$a \wedge b \leqslant d \leftrightarrow a \leqslant b \to d$$

Co ciekawe z kartezjańskiej domkniętości kategorii zbiorów korzysta się w informatyce. W języku *Haskell* operujemy pojęciem *typu (danych)*. Wśród typów wyróżnia się typy produktowe i funkcyjne a wśród predefiniowanych funkcji znajdziemy funkcje `curry` i `uncurry` których typy opisane są tak:

```
carry :: ((a,b) -> c) -> (a -> b -> c)
uncarry :: (a -> b -> c) -> (a,b) -> c
```

(`(a,b)` to typ produktowy, `a -> b` - typ funkcyjny). Przy odrobinie dobrej woli można doszukać się podobieństwa do definicji kartezjańskiej domkniętości[52].

[50] Podobiekty logiczne w **Set** nazwano *niewłaściwymi* dając w ten sposób dowód ich lekceważenia... .

[51] Izomorfimy które tu występują są *naturalne*. Ale pominę wyjaśnianie, co to właściwie znaczy - nie jest to nam w tej chwili potrzebne.
Przedstawienie pełnej definicji kartezjańskiej domkniętości wymaga wyjaśnienia, czym jest *sprzężenie funktorów*. Tego nie zrobiliśmy. Szkoda, bo sprzężenie to jeden z fundamentów teorii kategorii. Wielość i różnorodność sytuacji, które można opisywać korzystając ze sprzężeń jest imponująca. Niestety, złożony charakter tego pojęcia sprawia, że musimy ograniczyć się do gombrowiczowskiej deklaracji: odkrycie sprzężeń to jedno z najważniejszych osiągnięć teorii kategorii *(„dlaczego Słowacki wzbudza w nas zachwyt i miłość? (...) Dlatego, panowie, że Słowacki wielkim poetą był! - W.Gombrowicz, Ferdydurke).*

[52] Te nawiązania są szczególnie widoczne w *λ-rachunku z typami* który jest „teoretycznym zapleczem” języka *Haskell*. Nazwa `curry` to na cześć Haskella Carry'ego, twórcy podstaw programowania funkcyjnego.

Kartezjańska domkniętość to „uwewnętrznienie" struktur morfizów między ustalonymi obiektami: zamiast o zbiorze takich morfizmów $\mathbf{C}(B,D)$ możemy mówić o o OBIEKCIE potęgowym B^D. A istnienie klasyfikatora podobiektów Ω w toposie pozwala mówić o obiekcie potęgowym Ω^A którego elementami są podobiekty A.

Możliwość „uwewnętrzniania" jest ważna bo toposy pretendują do roli matematycznych uniwersów, nowych ur-teorii. A metajęzyk ur-teorii powinien być ograniczony do niekontrowersyjnego minimum[53].

Dwa przykłady. 1. Definiując kwantyfikację w toposie dowodzimy istnienia MORFIZMÓW $\widetilde{\forall}_A, \widetilde{\exists}_A : \Omega^{A\times B} \to \Omega^B$ *o odpowiednich własnościach wyrażonych w języku teorii kategorii (toposów)[22] (ten fragment dowodu istnienia kwantyfikacji pominąłem). To, co przedstawiłem - opis* FUNKCJI $\exists_A$ *i* $\forall_A$ *- jest „zewnętrzną interpretacją" tych dwóch morfizmów stworzona na użytek tych, którzy „myślą teoriomnogościowo".*
2. Izomorfizm $\mathbf{C}(B^D, B^D) \cong \mathbf{C}(B^D \times D, B)$ *pozwala wyróżnić morfizm ewaluacji* $eval\colon B^D \times D \to B$ *taki, że dla dowolnego elementu* $\hat{f}\colon \underline{1} \to B^D$ *(reprezentującego morfizm* $f \in \mathbf{C}(D,B)$*) i* $a\colon \underline{1} \to D$ *,* $eval(\hat{f}, a) = f \cdot a$*. To oznacza, że w dowolnym toposie możemy „uwewnętrznić" opis działania morfizmu na elemencie jego dziedziny*[54].

Logika pierwszego rzędu w toposie jest wewnętrzna, w pełni zsynchronizowana z jego matematyczną strukturą.

2.4.1 Algebra wartości logicznych - dlaczego tak?

Ustaliliśmy, że wartości logiczne wewnętrznej logiki toposa to elementy klasyfikatora obiektów Ω - morfizmy z obiektu końcowego $\underline{1}$ do Ω. Pokazaliśmy, jak zdefiniować działania koniunkcji, alternatywy i implikacji na zbiorze tych wartości.

Ale właściwie dlaczego tak, a nie inaczej, definiujemy te działania?
Łatwiej to pojmiemy, gdy - na moment - założymy, że w rozważanym toposie każdy morfizm $q\colon \underline{1} \to \Omega$ ma swoją kanoniczną reprezentację - wyróżniony monomorfizm $m^q\colon \underline{1}_q \to \underline{1}$[55].
1. Jest oczywiste, że dla dowolnych wartości logicznych q,p istnieje co najwyżej jeden morfizm między obiektami $\underline{1}_q$ i $\underline{1}_p$. Jeśli tak jest, to piszemy $q \leqslant p$. To oznacza, że wartości logiczne tworzą zbiór częściowo uporządkowany (poset) w którym elementem największym jest $true$ a najmniejszym - $false$.
2. Łatwo pokazać, że produktem $\underline{1}_q \times \underline{1}_p$ jest (może być) obiekt postaci $\underline{1}_s$ dla pewnej wartości logicznej s i ponadto $s = p \wedge q$ w opisanym przed chwilą posecie wartości logicznych. Podobnie (choć to trochę trudniejsze) pokażemy, że istnienie koproduktów determinuje istnienie kresów górnych w posecie wartości logicznych.
3. Topos jest kategorią kartezjańsko domkniętą co oznacza, że dla dowolnych obiektów $\underline{1}_q$, $\underline{1}_p, \underline{1}_r$ istnieje obiekt $\underline{A}$ taki, że $\mathbf{C}(\underline{1}_q \times \underline{1}_p, \underline{1}_r) \cong \mathbf{C}(\underline{1}_q, \underline{A})$. Przy odrobinie dobrej woli można pokazać, że $\underline{A}$ jest obiektem postaci $\underline{1}_s$. Przyjmując $p \to r = s$ pokażemy, że poset wartości logicznych z tak zdefiniowanymi operacjami to algebra Heytinga.
Oczywiście $p \leqslant r$ dokładnie wtedy, gdy $true = p \to q$.

---

[53] *(...)(topos) można uważać za obiekt matematyczny, który spełnia aksjomaty toposu (...) Te aksjomaty (...) prowadzą do twierdzeń mówiących o „wszystkich" obiektach i „wszystkich" strzałkach i które nie odwołują się do żadnych założeń teorii mnogości; można je po prostu postrzegać jako (część) niezależnego opisu kategorii - uniwersum dyskusji.(...) Własności toposu (...) sformułowane w ten sposób (...) są nazywane "wewnętrznymi". Z drugiej strony można myśleć o toposie jako o przedmiocie uformowanym w ramach teorii mnogości, jako o zbiorze obiektów i zbiorze strzałek, dla których złożenie (itp.) jest zdefiniowane tak, aby spełnione były aksjomaty kategorii i toposu.(...) Rozwój w tym stylu nazywany jest „zewnętrznym" [22].*

[54] Zastanów się nad interpretacją morfizmu $eval$ gdy $B = \Omega$. Zrób kolejny krok: opisz wewnętrznie składanie morfizmów tzn. pokaż, że składanie morfizmów w toposie opisuje pewna rodzina morfizmów postaci $comp\colon B^D \times D^C \to D^C$ a postrzeganie składania jako funkcji działającej na (odpowiednich) parach morfizmów to tylko ich „zewnętrzna interpretacja".

[55] Możemy się obyć bez tego założenia ale wtedy tłumaczenie jest trudniejsze i mniej przekonujace.

Ten alternatywny opis algebry Heytinga wartości logicznych jest tylko po to, by ponownie przekonać się, że „struktura toposu jednoznacznie określa jego logikę”[56].

Przykład - logika toposu $\mathbf{Set}^{\rightarrow}$

Klasyfikator podobiektów w kategorii $\mathbf{Set}^{\rightarrow}$ to obiekt $\Omega = (\Omega_0 \xrightarrow{\omega} \Omega_1)$ taki, że:

$$\begin{tikzcd}
\Omega_1 & = & \{\bullet^1 & \circ^0\} & \\
\Omega_0 \arrow[u, "\omega"] & = & \{\bullet^1 \arrow[u] & \bullet^{\frac{1}{2}} \arrow[ul] & \circ^0\} \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Produkt $(A_0 \to A_1) \times (B_0 \to B_1)$ konstruujemy niezależnie dla każdej z dwóch chwil[57]. Obiekt końcowy w to tutaj obiekt $\underline{1} = (1 \to 1)$, gdzie 1 to zbiór jednoelementowy.
Morfizmy $true = (true_0, true_1), false = (false_0, false_1) \colon \underline{1} \to \Omega$ narysujemy tak :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "true_1"] \arrow[rr, bend left, "false_1"] & \{\bullet^1 & \circ^0\} & \\
1 \arrow[u] \arrow[r, "true_0"] \arrow[rrr, bend right, "false_0"'] & \{\bullet^1 \arrow[u] & \bullet^{\frac{1}{2}} \arrow[ul] & \circ^0\} \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Logika tego toposa jest trójwartościowa. Trzecią wartością logiczną - *„półprawdą”* - jest morfizm $\frac{1}{2} = ((\frac{1}{2})_0, (\frac{1}{2})_1)$:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "(\frac{1}{2})_1"] & \{\bullet^1 & \circ^0\} & \\
1 \arrow[u] \arrow[rr, bend right, "(\frac{1}{2})_0"'] & \{\bullet^1 \arrow[u] & \bullet^{\frac{1}{2}} \arrow[ul] & \circ^0\} \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Algebra Heytinga wartości logicznych w tym toposie to opisana wcześniej algebra posadowiona na trójelementowym zbiorze uporządkowanym $\{0 < \frac{1}{2} < 1\}$.[58]
Podobiekty obiektu $\underline{A} = (A_0 \xrightarrow{t_A} A_1)$ są kanonicznie reprezentowane przez obiekty $\underline{C} = (C_0 \xrightarrow{t_C} C_1)$ takie, że $C_0 \subseteq A_0$, $C_1 \subseteq A_1$ a t_C to obcięcie funkcji t_A do C_0[59].

W szczególności trzy obiekty - $(\emptyset \to \emptyset) \leqslant (\emptyset \to 1) \leqslant (1 \to 1)$ - reprezentują trzy podobiekty obiektu końcowego - trzy wartości logiczne.

Można teraz spróbować opisać sumę i przekrój w algebrze Heytinga podobiektów $\underline{A}$ „zgodnie z teoriomnogościową intuicją”. Implikacja jest nieco trudniejsza (spróbuj).
A kwantyfikację opiszemy tak: dla dowolnego podobiektu $\underline{C} = (C_0 \xrightarrow{t_C} C_1)$ obiektu $\underline{A} = (A_0 \xrightarrow{t_A} A_1)$:

$$\forall_{\underline{1}} \underline{C} = \begin{cases} 1 & C_0 = A_0, C_1 = A_1 \\ \frac{1}{2} & C_0 \neq A_0, C_1 = A_1, \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad \exists_{\underline{1}} \underline{C} = \begin{cases} 1 & C_0 \neq \emptyset, C_1 \neq \emptyset \\ \frac{1}{2} & C_0 = \emptyset, C_1 \neq \emptyset \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

[56] O „pokrewieństwie” między toposem a algebrą Heytinga świadczy to, że taka algebra to poset, który - postrzegany jako kategoria - jest kategorią kartezjańsko domkniętą.

[57] $(A_0 \to A_1) \times (B_0 \to B_1) = (A_0 \times B_0 \to A_1 \times B_1)$.

[58] Str. 11. Wartość logiczną *false* reprezentuje liczba 0, *półprawdę* - $\frac{1}{2}$ a *true* - 1.

[59] $\underline{C}$ reprezentuje podobiekt - morfizm λ_C z $\underline{A}$ do Ω - który jest parą funkcji

$$(\lambda_C^0 : A_0 \to \{0, \tfrac{1}{2}, 1\},\ \lambda_C^1 : A_1 \to \{0, 1\}),$$

gdzie λ_C^1 to funkcja charakterystyczna podzbioru $C_1 \subseteq A_1$, natomiast λ_C^0 działa tak: dla dowolnego $a \in A_0$

$$\lambda_C^0(a) = \begin{cases} 1 & gdy\ a \in C_0, \\ \frac{1}{2} & gdy\ a \notin C_0 \wedge t_A(a) \in C_1 \\ 0 & gdy\ a \notin C_0 \wedge t_A(A) \notin C_1 \end{cases}$$

Wzorując się na tym przykładzie można opisać topos „zbiorów zmiennych w czasie” w którym „zmienność” jest ciągła i opisana np. przez liczby rzeczywiste odcinka $[0, 1]$. *Spróbuj.*

2.4.2 Semantyka języka pierwszego rzędu

Zdefiniowanie modelu języka pierwszego rzędu (dowolnej sygnatury Σ) „posadowionego na obiekcie A” w toposie to przyporządkowanie każdemu n-argumentowemu symbolowi relacyjnemu $r \in \Sigma$ - podobiektu $r^{\mathcal{A}} \colon A^n \to \Omega$ a każdemu m-argumentowemu symbolowi operacyjnemu $f \in \Sigma$ - morfizmu $f^{\mathcal{A}} \colon A^m \to A$.
To przyporządkowanie można łatwo rozszerzyć interpretując termy jako morfizmy postaci $[[t(x_1, \ldots, x_n)]] \colon A^n \to A$ a formuły jako morfizmy postaci $[[\phi(x_1, \ldots, x_n)]] \colon A^n \to \Omega$. To proste: wystarczy powtórzyć rekurencyjną procedurę wykorzystaną w części 1 do opisu modeli teoriomnogościowych wykorzystując logiczną strukturę toposu i taką oto interpretację formuł-równości:

jeśli termy t_1, t_2 są interpretowane jako morfizmy $[[t_1]], [[t_2]] \colon A^n \to A$, to :

$$[[t_1 = t_2]] = \approx_A \cdot < [[t_1]], [[t_2]] >.$$

gdzie $\approx_A \colon A \times A \to \Omega$ to morfizm taki, że prostokąt:

$$\begin{tikzcd} A \times A \arrow[r, "\approx_A"] & \Omega \\ A \arrow[u, "<id,id>"] \arrow[r] & \underline{1} \arrow[u, "true"'] \end{tikzcd}$$

jest pullbackiem.

Tak skonstruowany model jest modelem teorii T (sygnatury Σ) gdy $[[\phi]] = \top$ dla każdego zdania - aksjomatu ϕ teorii T.

Logiki wyższych rzędów

O logice drugiego i wyższych rzędów mówimy tu niewiele. Ale to, co powiedzieliśmy o arytmetyce drugiego rzędu pozwala uwierzyć, że kluczowe dla odpowiedzi na pytanie czy te logiki można interpretować w toposie $\mathbf{C}$ jest wskazanie morfizmu, który będzie semantyką relacji „$\in$”. Kartezjańska domkniętość toposu to umożliwia:

- wspomniana wcześniej bijekcja $\mathbf{C}(A, \Omega) \cong \mathbf{C}(1, \Omega^A)$ *pozwala reprezentować podobiekty A jako elementy obiektu potęgowego Ω^A,*

- bijekcja $\mathbf{C}(\Omega^A, \Omega^A) \cong \mathbf{C}(\Omega^A \times A, \Omega)$ *pozwala na wyróżnienie morfizmu* $\in_A \colon A \times \Omega^A \to \Omega$ [60].

Dla dowolnego elementu $e \colon 1 \to B$ i podobiektu B reprezentowanego przez element $d \colon 1 \to \Omega^B$, wartość logiczna - morfizm $\in_B \cdot < e, d > \colon \; \to B \times \Omega^B \to \Omega$ - to „miara przynależności” elementu e do podobiektu d.

> Takie sobie „sztuczki”... . Wszystko jest „tak samo” jak w toposie zbiorów. Ale to nie „to samo” - toposy to różne od **Set** „matematyczne uniwersa”.

Toposy boolowskie i podwójna negacja

Może się zdarzyć, że w rozważanym toposie - tak jak w **Set** - podobiekty dowolnego obiektu tworzą algebrę Boole'a (czyli algebrę Heytinga, w której dodatkowo obowiązuje prawo wyłączonego środka). Taki topos to *topos boolowski*[61].

Światy opisane przez toposy boolowskie są nieco bardziej podobne do **Set**. To banał. Ciekawsze jest takie oto twierdzenie:

„Każdy topos $\mathbf{C}$ *zawiera w sobie mniejszy topos boolowski* $\mathbf{C}_{\neg\neg}$ *”.*

Oznaczenie $\mathbf{C}_{\neg\neg}$ wzięło się stąd, że ten „podtopos” wyróżnimy korzystając z podwójnej negacji - morfizmu $\neg \cdot \neg \colon \Omega \to \Omega$.

---

[60] Morfizm $\in_A$ poprzez opisaną tu bijekcję odpowiada morfizmowi $id \colon \Omega^A \to \Omega^A$.

[61] To nie znaczy, że logika toposu boolowskiego musi być dwuwartościowa! Topos $\mathbf{Set}^2$ (którego obiektami są pary zbiorów a morfizmami - pary funkcji) jest boolowski, a jego matryca wartości logicznych jest czteroelementowa.

Robimy to tak: podobiekt $f : A \to \Omega$ nazwiemy gęstym, gdy $\neg\neg f = true_A$. Obiekt E należy do tego podtoposu boolowskiego gdy każdy morfizm $\phi\colon B \to E$, którego dziedzina jest gęstym podobiektem obiektu A, można jednoznacznie rozszerzyć do morfizmu $\hat{\phi} : A \to E$.
Matrycę wartości logicznych toposu $\mathbf{C}_{\neg\neg}$ tworzą domknięte wartości logiczne - morfizmy $w : 1 \to \Omega$ takie, że $\neg\neg w = w$. I to wszystko[62].

Podobieństwo do omawianych wcześniej twierdzeń Glivenki i Gödla jest oczywiste. Ale szczerze mówiąc, nie potrafię powiedzieć wiele ponad stwierdzenie tej „oczywistej oczywistości”[63].

2.5 Teoria zbiorów a teoria toposów

> Jedno matematyczne uniwersum i - istniejąca niezależnie - jedna jedynie słuszna logika - to paradygmat zrealizowany w postaci matematyki teoriomnogościowej.
> Teoria toposów to podważa. Matematyczne uniwersum to galaktyka lokalnych światów - toposów, których wewnętrzna struktura jest wprawdzie podobna do struktury kategorii zbiorów ale każdy z tych światów ma własną logikę.

Aksjomaty teorii toposów są twierdzeniami w ZFC[64]. Ale nie odwrotnie. Definicja toposu nie obejmuje wszystkiego co obecne w miłej sercu teorii mnogości. Można więc pytać: jak daleko - jak blisko - pierwowzoru - kategorii **Set** - jest dowolny topos?

Podstawową różnicę już znamy: logika dowolnego toposu jest intuicjonistyczna a logika **Set** to dwuwartościowa logika klasyczna. Powiedzmy coś o innych.

Generator

Zdanie: „*funkcje $f, g : A \to B$ są równe, gdy dla dowolnego elementu $a \in A$, $f(a) = g(a)$*” kategorysta odczyta jako stwierdzenie, że zbiór jednoelementowy - obiekt końcowy - jest *generatorem* w **Set**[65].
Ale tak nie musi być w każdym toposie. Gdy tak jest, to mówimy - po angielsku - że ten topos jest *well-pointed*[66].

> Powód pominięcia warunku „obiekt końcowy jest generatorem” w definicji toposa jest prosty: logika toposa spełniającego ten warunek musi być logiką klasyczną! [22]. A tego nie chcemy.
> Matematyczna struktura toposu determinuje jego logikę ... .

To, że obiekt końcowy nie musi być generatorem zmusza do zmiany wyobrażenia, co właściwie opisuje język pierwszego rzędu. W teoriomnogościowej narracji formuła $\phi(x_1, \dots, x_n)$ jest opisem pewnej własności n-elementowych ciągów elementów zbioru A (na którym jest posadowiony aktualnie rozważany model). Semantyka formuły ϕ jest tu wtórna: to podzbiór A^n złożony z ciągów które mają własność opisaną przez ϕ.

W teorii toposów semantyka formuły jest pierwotna. Wtórne jest to, że można patrzeć na formuły jako opisy własności. Ale już nie tylko elementów, ale też ... morfizmów:

morfizm $f\colon B \to A^n$ ma własność opisaną przez formułę $\phi(x_1, \dots, x_n)$ której semantyką jest podobiekt $[[\phi]]\colon A^n \to \Omega$ dokładnie wtedy, gdy $[[\phi]] \cdot f = true_B\colon B \to \underline{1} \xrightarrow{true} \Omega$

[62] W $\mathbf{Set}^{\to}$ podobiekt $(B_0 \to B_1)$ obiektu $(A_0 \to A_1)$ jest gęsty gdy $B_1 = A_1$. Topos $\mathbf{Set}^{\to}_{\neg\neg}$ tworzą „zbiory niezmienne w czasie” - $A \xrightarrow{id} A$. Ten boolowski podtopos jest „taki sam” jak topos zbiorów.

[63] Morfizm-podwójna negacja wyznacza jedną z możliwych topologii Lawvere’a-Tirney’a (o której wspominaliśmy wcześniej) a przytoczone twierdzenie to szczególny przypadek twierdzenia które mówi, że każda taka topologia J wyznacza w toposie $\mathbf{C}$ mniejszy (ale niekoniecznie boolowski) topos $\mathbf{C}_J$ [22].

[64] Co zazwyczaj zastępujemy stwierdzeniem „*kategoria* **Set** *jest toposem*” przemilczając, że istnienie tej kategorii - modelu ZFC - wcale nie jest oczywiste. To zdanie trzeba czytać tak, jak chcą nominaliści: po zastąpieniu pojęć „obiekt” i „morfizm” przez teoriomnogościowe „zbiór” i „funkcja”, aksjomaty teorii toposów są dowodliwe w ZFC.

[65] *Obiekt G jest generatorem jeżeli dowolne dwa równoległe morfizmy $f, g : A \to B$ są równe, jeśli tylko dla dowolnego morfizmu $a : G \to A$, $fa = ga$*”.

[66] Po polsku mało zręcznie: „dobrze upunktowiony”. Żądanie, by obiekt końcowy był generatorem jest, w pewnym sensie, „bliskie” aksjomatowi ekstensjonalności.

Pomińmy szczegóły[67]. Zauważmy tylko, że w *„well-pointed”* toposie morfizm $f\colon B \to A^n$ ma własność opisaną przez formułę ϕ dokładnie wtedy, gdy ma ją każdy morfizm postaci $f \cdot b\colon \underline{1} \to \Omega$ gdzie $b\colon \underline{1} \to B$ to dowolny element B.

> Tylko w „well-pointed” toposach „prawda” jest sumą „punktowych prawd”: dla dowolnego $f\colon B \to \Omega$
>
> $$f = true_B \quad \textit{wtw} \quad fb = true \quad \textit{dla dowolnego elementu} \quad b\colon \underline{1} \to B.$$

Wyróżnia się też toposy, które mają zbiór generatorów - *„rodzinę obiektów $(G_i : i \in I)$ taką, że dowolne morfizmy równoległe $f, g\colon A \to B$ są równe, gdy $fa = ga$ dla dowolnego morfizmu postaci $a\colon G_i \to A$”.*
Taki zbiór generatorów istnieje w każdym toposie snopów - są to podsnopy obiektu końcowego[68].

Gdy dodatkowo zażądamy, by taki topos miał wszelkie kogranice, to otrzymamy nową charakteryzację wspomnianych wcześniej toposów Grothendiecka[69].

Aksjomat wyboru

W języku kategorii ten aksjomat zdefiniujemy tak: *kategoria* **C** *spełnia aksjomat wyboru jeśli dla każdego epimorfizmu $e\colon A \to B$ istnieje morfizm $f\colon B \to A$ taki, że $e \cdot f = id_B$.*
Powód niewłączenia aksjomatu wyboru do definicji toposa jest taki sam, jak przed chwilą: logika toposa z pewnikiem wyboru musi być logiką klasyczną[70]. To kolejne potwierdzenie, że struktura matematyczna toposu determinuje jego logikę... .

Aksjomat nieskończoności - obiekt liczb naturalnych

Nie musimy akceptować nieskończoności w każdym toposie. Ale możemy:

obiekt liczb naturalnych - NNO - w toposie **C** *to obiekt N wraz z morfizmami $0\colon \underline{1} \to N$, $s\colon N \to N$, takimi, że dla dowolnego diagramu postaci $\underline{1} \xrightarrow{a} A \xrightarrow{h} A$ istnieje dokładnie jeden morfizm $\phi_{(h,a)}\colon N \to A$ taki, że diagram*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "a"'] & N \arrow[r, "succ"] \arrow[d, "\phi_{(h,a)}"] & N \arrow[d, "\phi_{(h,a)}"] \\
& A \arrow[r, "h"] & A
\end{tikzcd}$$

jest przemienny.

NNO w **Set** to oczywiście teoriomnogościowy zbiór liczb naturalnych. W toposie zbiorów skończonych takiego obiektu nie ma[71].

Definicja NNO nawiązuje do postrzegania liczb naturalnych jako ockhamowskiego wzorca rekurencji. G.Wright pokazał, że w toposie z NNO dla dowolnego obiektu A można wskazać obiekt $L(A)$ - „listy typu A” - wraz z morfizmami $e\colon \underline{1} \to L(A)$ („lista pusta”) i $s_A\colon A \times L(A) \to A$ („dopisywanie elmentu do listy”), takimi, że dla dowolnej pary morfizmów $\underline{1} \xrightarrow{b} B$, $A \times B \xrightarrow{h} B$ istnieje dokładnie jeden morfizm $\psi\colon L(A) \to B$ taki, że $\psi \cdot e = b$, $h \cdot (id_A \times \psi) = \psi \cdot s_A$.

---

[67] Zainteresowani szczegółową analizą tej definicji znajdą ją w [22].

[68] Obiekt końcowy $\underline{1}$ w toposie snopów to rodzina zbiorów jednoelementowych indeksowana zbiorami otwartymi. Zbiór otwarty V wyznacza podsnop $\underline{1}_V \leqslant \underline{1}$ taki, że zbiór $\underline{1}_V(U)$ jest jednoelementowy gdy $U \subseteq V$ i pusty w pozostałych przypadkach.

[69] *„Grothendieck topos is a topos that is neither too small nor too large, in that it is cocomplete (not too small), and has a small generating set (not too large)” - (internet)*

[70] To jest opisane w Części 1 twierdzenie Diaconescu „w wersji kategoryjnej”. To samo twierdzenie udowodniono ponownie(!) kilka lat poźniej (Goodman-Myhill). A wcześniej jako ćwiczenie(!!!) zamieścił w monografii *Foundations of constructive analysis* E. Bishop.

[71] Korzystając z definicji NNO zdafiniujemy dodawanie liczb naturalnych w toposie zbiorów tak: najpierw definiujemy funkcję $\tilde{+}\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ jako funkcję wyznaczoną przez parę $i\colon \underline{1} \to \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ oraz $succ^{\mathbf{N}}\colon \mathbf{N}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ gdzie $i(1) = id_{\mathbf{N}}$ oraz $succ^{\mathbf{N}}(f)(n) = f(succ(n))$. Kartezjańska domkniętości kategorii zbiorów gwarantuje, że funkcji $\tilde{+}$ odpowiada dokładnie jedna funkcja $+\colon \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$. A ta funkcja to dodawanie liczb naturalnych. „Tak samo” można zdefiniować dodawanie liczb naturalnych w dowolnym toposie z NNO. Spróbuj podobnie zdefiniować mnożenie.

NNO jest *obiektem nieskończonym*. By to stwierdzenie miało sens, trzeba wyjaśnić, jak rozumiemy „skończoność" w toposie:

obiekt A jest skończony, jeżeli każdy monomorfizm $m\colon A \to A$ jest izomorfizmem. Obiekt jest nieskończony gdy nie jest skończony.
NNO jest nieskończony, gdyż morfizm $succ\colon N \to N$ jest mono- ale nie jest izomorfizmem[72].

Zatrzymajmy się na chwilę i przyjrzyjmy się bliżej tej definicji skończoności (nieskonczoności). Chętnie (i bez głębszej refleksji) ją akceptujemy, bo jest prosty „trasnsfer" klasycznej teoriomnogościowej definicji Dedekinda do teorii toposów. Jednak analiza tego pojęcia w nowym otoczeniu - w teorii toposów - przyniosła zaskakujące rezultaty. Okazuje się, że klasa dekindowskich skończonych obiektów w pojedynczym toposie *„is not always closed under quotients, subobjects, exponentiation, or finite powerobjects." [39]*. To trudno zaakceptować mając na uwadze teoriomnogościowy wzorzec i nasze wyobrażenie skończoności ukształtowane (skażone) przez teorię mnogości. Można też dowieść, że klasyfikator podobiektów jest zawsze obiektem skończonym choć, jak wiemy, np. w toposach snopów może on mieć nieskończenie wiele elementów [50]. To rozczarowujące.

„Dedekindowska" definicja skończonego obiektu to nie jedyna możliwa definicja obiektu skończonego w toposie. Ale wszystkie te definicje są - w toposie zbiorów - równoważne. To zdaje się potwierdzać poprawność takiego uwewnętrznienia (włączenia do ur-teorii) intuicyjnego pojęcia skończoności. Ale ta równoważność jest konsekwencją aksjomatu wyboru który, jak wiemy, jest przyczyną odeścia matematyki od paradygmatu konstruktywizmu. Na stronie nLab *„finite object"* napisano tak: *„ (...) there are already at least five distinct notions of finite set in constructive mathematics, so there must be at least five distinct notions of finite internal to a topos."* W toposach, w których nie mamy aksjomatu wyboru, różne definicje skończoności mogą mieć różne klasy desygnatów[73].

> Skończoność jest pojęciem pozamatematycznym. Preintuicją daną każdemu. Ograniczając się do matematyki teoriomnogościowej wierzymy, że jej ur-teoria - ZFC - opisuje skończoność w sposób uniwersalny, np. poprzez defnicję zaproponowną przez Dedekinda. Ale wyjście poza teoriomnogościowe uniwersum pokazuje, że ta unuwersalnośćjest złudna, skoro (teoriomnogościowe) równoważniki tej definicji mogą być różnie interpretowana w innych niż **Set** toposach.
>
> Skończoność" jest pojęciem „zewnętrznym" w stosunku do wszelkich teorii matematycznych, w tym do ZFC. To pojęcie należy do „metajęzyka matematyki". W jakiejkolwiek teorii matematycznych możemy je tylko opisywać, a potem interpretować w modelach tej teorii. Skoro teoria toposów pretenduje do roli nowej ur-teorii, to musimy opisać „skończoność" w jej języku. Pięć równoważnych teoriomnogościowo definicji skończoności, to - po „przetłumaczeniu" na język terorii toposów - naturalni kandydaci do opisu skończoności w tym nowym kontekście, do „uwewnętrznienia" tego pojęcia w nowej ur-teorii. Jak dotąd, nie ma powodów by tylko jedną z nich uznać za „właściwą".
> Ale to nie oznacza, że zupełnie zapominamy o „zewnętrznej" intuicyjnej skończoności. Czy mówiąc *„skończony zbiór obiektów"* , *„produkt skończonej rodziny obiektów"* odwołujemy się do (zewnętrznej) intuicji skończoności czy do jej jakiego kolwiek matematycznego opis?
> Istnienie „wewnętrznych", i „zewnętrznych" pojęć, istnienie metajęzyka teorii jest nieuniknione przy tworzeniu jakiejkolwiek teorii matematycznej (pojęcie „zbioru" i „przynależności" też jest zewnętrzne w stosunku do teorii mnogości). Rzecz w tym, by ów metajęzyk ograniczać do niezbędnego minimum[74].

Wróćmy do NNO. W toposach presnopów obiekt liczb naturalnych to (odpowiednio liczna) rodzina kopii zbioru liczb naturalnych. W toposie snopów na przestrzeni $(A, \mathcal{T})$ jest ciekawiej: NNO to rodzina $(N(U)\colon U \in \mathcal{T})$, gdzie $N(U)$ to zbiór funkcji ciągłych z U do dyskretnej przestrzeni

[72]Dowód wcale nie jest banalny. Podpowiem, że P. Freyd pokazał, że obiekt liczb naturalnych można równoważnie zdefiniować odwołując się (dwukrotnie) do pojęcia kogranicy:
1. N wraz z morfizmami $0 : 1 \to N, succ : N \to N$ jest koproduktem pary obiektów $(1, N)$,
2. 1 jest kogranicą diagramu $N \rightrightarrows^{succ}_{id} N$.
Stąd już bliżej do udowodnienia, że NNO to obiekt nieskończony.

[73]O jednej z tych definicji powiemy więcej w niedalekiej przyszłości.

[74]Co ciekawe (znamienne?), fundamentalna monografia poświęcona teorii toposów - [23] - nie mówi nic o skończoności obiektów.

topologicznej na zbiorze **N** [75]. To brzmi tajemniczo i bardzo naukowo. Jeszcze bardziej zaimponujemy studentom mówiąc, że ten obiekt otrzymamy w wyniku „sheafifikacji" (usnopowienia) obiektu liczb naturalnych w toposie presnopów... . Ale rzecz jest banalnie prosta. Wrócimy do tematu, gdy wzbogacimy język opisu toposa snopów

W toposie z *NNO* mamy też *obiekty liczb całkowitych, wymiernych i rzeczywistych.*

> Dlaczego mamy nazwać pewien obiekt w toposie obiektem liczb całkowitych (wymiernych)?
> Te obiekty to efekt konstrukcji, które prowadzimy odwzorowując budowę tych zbiorów liczbowych w **Set**.
> Punktem wyjścia dla tych konstrukcji jest obiekt liczb naturalnych.
> Konstrukcje obiektów liczb całkowitych i naturalnych są proste: wykorzystujemy tu tylko pewne skończone granice i kogranice istniejące w każdym toposie.
> Konstrukcja obiektu liczb rzeczywistych jest bardziej subtelna, bo odwołuje się do wewnętrznej logiki toposu. Opowiemy o niej gdy lepiej poznamy semantykę języka pierwszego rzędu w toposach (str. 53).

Teorię toposów z NNO, które są *„well-pointed"* i w których obowiązuje aksjomat wyboru, Lawvere nazwał Elementarną Teorią Kategorii Zbiorów - ETCS[76]. Można uznać, że to odmienna od ZFC propozycja opisu klasycznego uniwersum, operująca innymi pojęciami pierwotnymi. Jednak teorie ZFC i $ECTS$ nie są równoważne - ZFC jest nieco silniejsza: np. mamy w niej aksjomat sumy zbiorów, których istnienia nie można dowieść w $ETCS$.

Po co nam ten nowy opis klasycznego uniwersum? Choćby po to, aby czerpiąc pełnymi garściami z teorii toposów potwierdzić dowód Cohena o niezależności (od ZFC) hipotezy continuum [22].

> Jeśli nasz świat potrwa jeszcze kilkaset lat, to, być może, Cantora i Hilberta będzie się pamiętać przede wszystkim jako twórców pierwszego toposa... .
> *„Nie możemy zagwarantować, że w przyszłości nowe doświadczenia nie będą wymagały zmian w teoriach matematycznych, podobnie jak mogą wymagać zmian w teoriach fizycznych. Teorie matematyczne nie różnią się pod tym względem od innych teorii naukowych; są tylko po prostu bardziej ogólne, a przez to bardziej odporne na zmiany, ponieważ ich zmiana oznacza masowe rewizje w wielu innych obszarach."*[77]

[75] Przestrzeń topologiczna jest dyskretna gdy każdy jej podzbiór jest otwarty.
[76] Nie mylić z innym wynalazkiem - punktami ECTS.
[77] *Philosophy of mathemaics, M.Tiles*

Rozdział 3

Od logiki do toposów

Każdy topos ma swą wewnętrzną logikę - „matematyka poprzedza logikę”. Czy można to odwrócić?

3.1 Topos snopów revisited

To co istotnie w definicji snopa topologicznego to nie cała przestrzeń $(A, \mathcal{T})$ lecz tylko jej bezpunktowa część - poset zbiorów otwartych $(\mathcal{T}, \subseteq)$[1] . Te zbiory tworzą *algebrę Heytinga* (str.12), która na dodatek jest *zupełna*, co oznacza, że dowolny podzbiór posetu $(\mathcal{T}, \subseteq)$ ma kres górny.

Stąd pomysł, by zająć się snopami związanymi z dowolnie wybraną zupełną algebrą Heytinga H.

Definiując *H-snopy* pozostaniemy wierni topologicznemu wzorcowi. Ale wykorzystamy fakt, że każda algebra Heytinga może być postrzegana jako kategoria i opiszemy H snopy jako funktory z kategorii H^{op} do kategorii zbiorów - $F\colon H^{op} \to \mathbf{Set}$ spełniające pewien dodatkowy warunek.

Zanim go sformułujemy, przyjmijmy pewną wygodną konwencję notacyjną: dla dowolnego funktora $F\colon H^{op} \to \mathbf{Set}$ elementy zbiorów $F(q)$ nazywamy *punktami* funktora F. Gdy $a \in F(q)$ i $p \leqslant q$ to piszemy $a_{|p}$ zamiast $F(p \leqslant q)(a)$ a punkt $a_{|p}$ nazywamy *„obcięciem punktu a do p”*.

H-snop to funktor $F\colon H^{op} \to \mathbf{Set}$ taki, że:

- dla dowolnej zgodnej rodziny punktów $\left(a^i \in F(q_i) : i \in I\right)$ - czyli takiej, że $a^i_{|q_i \wedge q_j} = a^j_{|q_i \wedge q_j}$ dla dowolnych $i, j \in I$ - istnieje dokładnie jeden punkt $a \in F(sup(q_i\colon i \in I))$ taki, że $a_{|q_i} = a^i$ [2].

„Punkty snopa można obcinać i - pod pewnymi warunkami - sklejać”.

Morfizm H-snopów $\phi\colon F \to G$ to rodzina funkcji $(\phi_q\colon F(q) \to G(q) : q \in H)$ „respektująca operację obcinania” - $\phi_q(a)|p = \phi_p(a_{|p})$[3] .

> H-snopy i ich morfizmy tworzą topos. Logika - algebra H - wyznacza matematykę - topos H-snopów.

Istnienie i równość punktów w snopach

„Jedną z najbardziej intrygujących cech toposu jest to, że sensowne jest mówienie o bytach, które tylko „częściowo istnieją”. Można jedynie spekulować, jaka byłaby reakcja Heideggera, gdyby powie-. dziano mu, że odpowiedź na pytanie: ”Co to jest rzecz?” to „Coś, co częściowo istnieje.” [12]

> Nasze doświadczenie matematyczne zdobywamy w teoriomnogościowym uniwersum. W tym świecie na pytania „czy a jest elementem zbioru A” , „czy elementy są równe” i wreszcie „czy a istnieje”

[1] str. 25

[2] Stąd, w szczególności, $F(\perp)$ jest zawsze zbiorem jednopunktowym!

[3] Taką rodzinę funkcji nazywamy *transformacja naturalną* między funktorami (snopami) F i G.

odpowiadamy „TAK” lub „NIE”. *Tertium non datur.*
Matematyka toposów nie respektuje tego klasycznego paradygmatu. Dopuszcza „częściowe” istnienie.

W każdym H-snopie F można określić dwie miary:

- miarę równości punktów: gdy $a \in F(r)$ *i* $b \in F(s)$ *to ich miarą równości jest największy element* $q \in H$ *taki, że* $a_{|q} = b_{|q}$. *Tę miarę oznaczamy symbolem* $a \approx_F b$.

- miarę istnienia: $\mathbf{E}^F(a) = q$ *gdy* $a \in F(q)$ [4].

Miara istnienia jest wtórna w stosunku do miary równości - $\mathbf{E}^F(a) = a \approx_F a$. Dla dowolnych punktów a, b:

$$(Eq_1) \qquad a \approx_F b = b \approx_F a,$$
$$(Eq_2) \qquad a \approx_F b \wedge b \approx_F c \leqslant a \approx_F c$$

Można uznać, że możliwość mierzenia „istnienia” i „równości” na niedychotomicznej skali to tylko ciekawostka. Ale można też uznać, że to fundamentalna różnica między matematyką teoriomnogościową a matematyką toposa snopów i pokusić się o opis tej drugiej w języku, w którym miary równości i istnienia są pojęciami podstawowymi.

3.2 Topos $\hat{H}$

Realizacją tego zamysłu jest *topos H-obiektów*, który zbudujemy biorąc za punkt wyjścia dowolną zupełną algebrę Heytinga H[5]. Przypomnijmy:algebra Heytinga jest zupełna, gdy każdy jej podzbiór posiada kres gróny (w konsekwencji ma też kres dolny).
H-obiekty można traktować (postrzegać) jako reprezentacje H-snopów. Wyjaśniam: punkty H-snopów umiemy obcinać i sklejać. Morfizmy snopów zachowują nie tylko obcięcia (warunek definicyjny) ale też sklejenia - gdy punkt a jest sklejeniem rodziny punktów $(a_i : i \in I)$ to jego obraz poprzez morfizm jest sklejeniem obrazów tych punktów. Dlatego każdy podzbiór punktów H-snopa pozwalający odtworzyć pozostałe punkty za pomocą obcinania i sklejania w pewnym sensie go reprezentuje.

Takie podzbiory punktów H-snopów to H-obiekty.

Tym, którzy wiedzą cokolwiek o przestrzeniach liniowych pomoże przypomnienie roli jaką w tej teorii odgrywają bazy: baza przestrzeni może być uważana za jej reprezentację z dwóch powodów:
- każdy wektor przestrzeni V można skonstruować z wektorów bazowych korzystając z operacji dodawania i mnożenia przez skalary,
- każde przekształcenie liniowe $\phi\colon V \to W$ można opisać korzystając z baz wyróżnionych w obu przestrzeniach poprzez wskazanie tzw. macierzy przekształcenia[6].

Tyle o intuicjach. Niemiła wiadomość jest taka, że formalna definicja toposa H-obiektów to niezły koszmar... .

Topos H-obiektów i ich morfizmów - topos $\widehat{H}$ - definiujemy tak:

H-obiekty to pary $(A, \approx_A\colon A \times A \to H)$ *, gdzie A to niepusty zbiór, a funkcja $\approx_A$ spełnia - dla dowolnych $a, b, c \in A$ - dwa warunki:*

$a \approx_a b \leqslant b \approx a,$

$a \approx_A b \wedge b \approx_A c \leqslant a \approx_A c.$

[4] Każdy H-snop ma dokładnie jeden „punkt nieistniejący” - taki, że $\mathbf{E}(a) = \bot$. „Istnieje punkt nieistniejący”... .

[5] W literaturze używa się terminu *„H-zbiory”*. To niefortunne, bo skłania do teoriomnogościowego myślenia. Inną propozycją jest nazwa *localic topos* [23] ale w tym podejściu „miary równości i istnienia” nie są eksponowane. Nazwa „topos $\hat{H}$” ma tę zaletę, że utrwala pamięć o twórcach tego lokalnego matematycznego uniwersum - A.Heytingu (pośrednio) i D.Higgsie, który chyba jako pierwszy opisał te toposy w języku miar istnienia i równości[15] (ale to nie Peter Higgs od *bozonu Higgsa*).

[6] Być może lepiej kojarzyć reprezentacje H-snopów nie z bazami, ale ze zbiorami generatorów przestrzeni liniowych. Ale skoro chodzi tylko o pomocne skojarzenia, to precyzja porównań nie jest aż tak istotna...

Funkcja $\approx_A$ to miara równości (punktów H-obiektu).

Będziemy pisać $\mathbf{E}_A(a)$ (lub $\mathbf{E}(a)$) zamiast $a \approx_A a$ i nazywać funkcję $\mathbf{E}_A$ miarą istnienia.

Morfizm z $(A, \approx_A)$ do $(B, \approx_B)$ to funkcja $f\colon A \times B \to H$ taka, że dla dowolnych $a, a_1 \in A$ oraz $b, b_1 \in B$:

$f(a,b) \leqslant \mathbf{E}_A(a) \wedge \mathbf{E}_B(b)$,
$a \approx_A a_1 \wedge b \approx_B b_1 \wedge f(a,b) \leqslant \hat{f}(a_1, b_1)$
$f(a,b) \wedge f(a, b_1) \leqslant b \approx_B b_1$
$\mathbf{E}_A(a) \leqslant sup\{f(a,b) : b \in B\}$

Złożenie morfizmów $f\colon (A, \approx_A) \to (B, \approx_B)$ i $g\colon (C, \approx_C) \to (B, \approx_B)$ to morfizm-funkcja $h\colon A \times C \to H$ taka, że

$$h(a,c) = sup(f(a,b) \wedge g(b,c) : b \in B).$$

Morfizm identycznościowy obiektu $(A, \approx_A)$ to miara równości - funkcja $\approx_A\colon A \times A \to H$.

Dowód, że H-obiekty i ich morfizmy tworzą topos jest niebanalny [15]. Ale teraz wystarczy nam tylko wiedzieć, że:

- *algebra wartości logicznych tego toposa to algebra H,*
- *klasyfikator podobiektów to H-obiekt $\Omega_H = (H, \approx_H)$, gdzie $q \approx_H r = q \leftrightarrow r$,*[7]
- *obiekt końcowy to jednopunktowy obiekt $\underline{1}_\top = (\{\star\}, \approx_\top)$, gdzie $\mathbf{E}(\star) = \top$.*
- *morfizm $true : \underline{1}_\top \to \Omega_H$ to funkcja $true : \{\star\} \times H \to H$ taka, że $true(\star, q) = q$.*

Uprzedzałem: ani to przejrzyste ani eleganckie... .Ale bez paniki - wszystko się pięknie wyjaśni[8].

> Ktoś powie: „o jakim nowym uniwersum tu mówimy skoro obiekty i morfizmy tego opisane są w języku teorii mnogości”. To nie tak: wprawdzie w tym opisie użyliśmy terminów „zbiór” i „funkcja”, ale w żaden sposób nie będziemy badać obiektu $(A, \approx)$ w języku teorii mnogości - np. nie interesuje nas ani moc zbioru A, ani to, czy funkcja $\approx$ jest różnowartościowa. Podobnie rzecz się ma z morfizmami.
> Stwierdzenie, że używając teoriomnogościowych pojęć skazujemy się na badania prowadzone wewnątrz tej teorii jest nadużyciem[9].

3.2.1 Punkty i elementy - od H-obiektów do H-snopów

Nie zaprzątajmy sobie głowy formalizmami i skupmy się na istocie konstrukcji toposa H-obiektów. Krytyczna dla jej zrozumienia jest relacja między *punktami* i *elementami* H-obiektów.

Punkty H-obiektu $\underline{A} = (A, \approx)$ to elementy zbioru A. Punkt $a \in A$ jest *globalny*, gdy $\mathbf{E}(a) = \top$.

Elementy $\underline{A}$ to morfizmy postaci $e\colon \underline{1}_q \to \underline{A}$, gdzie $q \in H$, $\underline{1}_q = (\{\star\}, \approx_q)$ oraz $\star \approx_q \star = q$. Element $e\colon \underline{1}_q \to \underline{A}$ jest *globalny* gdy $q = \top$ [10].

Punkty wyznaczają elementy: $a \in A \rightsquigarrow e^a\colon \underline{1}_{\mathbf{E}(a)} \to \underline{A}$, gdzie $e^a\colon A \to H$ to funkcja taka, że:

$$e^a(b) = a \approx b \quad \textit{dla dowolnego } b \in A$$

Punkty $a, b \in A$ wyznaczają ten sam element, gdy są *równoważne* (lub: jeden jest *kopią* drugiego): $\mathbf{E}(a) = a \approx b = \mathbf{E}(b)$.

Jednak nie każdy element jest wyznaczony przez punkt - „nie jest punktem”. Jeśli każdy element jest wyznaczony przez dokładnie jeden punkt, to H-obiekt jest opisywanym wcześniej H-snopem.

---

[7] $q \leftrightarrow r = (q \to r) \wedge (r \to q)$. Równoważnie: $q \approx_H r$ to największy element $s \in H$ taki, że $q \wedge s = r \wedge s$.

[8] Podpowiedź budująca intuicję związaną z morfizmami: macierz $M = [m_{ij}]$ opisująca przekształcenie liniowe $f\colon V \to W$ przy zadanych bazach $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_1, \dots, b_n)$ to w istocie funkcja: $m_{ij} = f(a_i, b_j)$. Morfizm w $\hat{H}$ - funkcja $f : A \times B \to H$ - to (nieskończona) macierz (o współczynnikach w H). Składanie morfizmów w $\widehat{H}$ to „mnożenie” takich macierzy ale zamiast dodawania i mnożenia liczb (wykorzystywanych w mnożeniu zwykłych macierzy) mamy tu koniunkcję i kres górny - operacje w zupełnej algebry Heytinga.

[9] Pojęcie zbioru nie jest definiowane w ZFC. To pojęcie piertwotne tej teorii. Nie jest to pojęcie teoriomnogościowe.

[10] W terminologii teorii kategorii elementy $\underline{A}$ to morfizmy z $\underline{1}$ do $\underline{A}$. Dlatego morfizmy postaci $e\colon \underline{1}_q \to \underline{A}$ powinniśmy nazywać *„elementami lokalnymi (lub częściowymi)”*.I tak będziemy czasem robić. Ale nie zawsze. To mała terminologiczna zagwozdka, która nie sprawi chyba kłopotów.

To jest to. H-obiekty są w pewnym sensie niekompletne - mają „za mało" punktów - nie wszystkie elementy są punktami. H-snopy są pod tym względem kompletne.
H-snopy są eleganckie - to cenią matematycy. Ale H-obiekty łatwiej opisać - wystarczy wskazać dowolny zbiór punktów i określić dla nich miarę równości nie troszcząc się o to, jak wygląda kompletny obiekt (snop) tak reprezentowany.
Naiwne pytanie: czy interpretując kwantyfikator istnienia $\exists$ należy myśleć o punktach czy o elementach?

To, co powiedzieliśmy o punktach i elementach wystarczy, by zawiła definicja morfizmu stała się olśniewająco prosta:

Morfizm $f\colon \underline{A} \to \underline{B}$ przyporządkowuje PUNKTOM $\underline{A}$ ELEMENTY $\underline{B}$:

$$a \in A \quad \rightsquigarrow \quad e^a\colon \underline{1}_{\mathbf{E}(a)} \to \underline{A} \quad \rightsquigarrow f\cdot e^a\colon \underline{1}_{\mathbf{E}(a)} \xrightarrow{e^a} \underline{A} \xrightarrow{f} \underline{B}$$

Jego opis - funkcję $f\colon A\times B \to H$ - należy interpretować tak: wartość $f(a,b)\in H$ to „miara wykorzystania" punktu b do budowy elementu - obrazu punktu a.

To oznacza, że:

„podobiekty obiektu końcowego - H-obiekty postaci $\underline{1}_q$ - tworzą zbiór generatorów w $\hat{H}$".

Elementy H-obiektów umiemy obcinać i - pod pewnymi warunkami - sklejać:

- *obcięcie elementu* $e\colon \underline{1}_q \to \underline{A}$ *do* $r \leqslant q$ *to element* $e_{|r}\colon \underline{1}_r \to \underline{A}$ *taki, że* $e_{|r}(a) = r \wedge e(a)$.

- *jeśli* $(e_i\colon \underline{1}_{q_i} \to \underline{A}\colon i\in I)$ *jest zgodną rodziną elementów - taką, że* $e_{i|q_i\wedge q_j} = e_{j|q_i\wedge q_j}$ *to jej sklejeniem jest element* $\underline{A}$ *- funkcja* $e\colon A\to H$ *opisana wzorem* $e(a) = sup(e_i(a)\colon i\in I)$.

Jednak obcięcia punktów i ich sklejenia nie muszą być punktami:

Przykład Szostakowicza. Załóżmy, że $H = \mathbf{2}^2 = \{0,1\}^2$ *i popatrzmy na dwupunktowy* $\mathbf{2}^2$*-obiekt* $(\{a,b\},\approx)$, *gdzie* $a\approx b = (0,0), \mathbf{E}(a) = (0,1), \mathbf{E}(b) = (1,0)$. *Te punkty wyznaczają dwa różne elementy (częściowe). Jedyny element globalny tego obiektu nie jest punktem - to sklejenie punktów* a *i* b[11].

Podsumowaniem dyskusji o punktach i elementach jest takie oto twierdzenie:

Elementy (globalne i lokalne) H-obiektu $\underline{A}$ tworzą H-snop $\underline{El(A)} = (El(\underline{A}), \approx_{el})$. Każdy element jest *sklejeniem obcięć punktów:*

$$e(a) = sup(e^c_{|e(c)}(a)\colon c\in A) \qquad \text{dla dowolnego punktu } a$$ [12].

Parę uwag (wtręt mało matematyczny)

Studentom mówimy: „aby zrozumieć w pełni definicję teorii aksjomatycznej, musisz to zrozumienie poprzeć wskazaniem jej modeli". Ale mówiąc „model" mamy na uwadze model teoriomnogościowy. To rzeczywiście pogłębia zrozumienie teorii, ale tylko „wewnętrzne", w ramach matematyki teoriomnogościowej. Zrozumienie wykraczające poza ten świat zazwyczaj lekceważymy[13].

Pogłębianie zrozumienia teorii H-toposów w ten sam sposób, poprzez wskazanie przykładów, jest prawie niemożliwe. Z oczywistych powodów trudno w tym przypadku mówić o modelach teoriomnogościowych[14]. Oczywiście są toposy snopów topologicznych ale zrozumienie ich znaczenia dla badań podstawowych jest przywilejem nielicznych, którzy mogą szczycić się znajomościa prac Grothendiecka. Trudności z postrzeganiem toposów H-obiektów jako nowych uniwersów zaczynają się już w momencie poszukiwania inspirujących przykładów algebr Heytinga. „Poset stanów wiedzy"

[11] Skąd tu kompozytor Szostakowicz? Tajemnica... .

[12] To, że poszukiwanie elementów można zakończyć po dwóch krokach - wygenerowaniu obcięć punktów a następnie sklejeniu tego, co można skleić - jest konsekwencją dystrybutywności algebry H. Miarą równości elementów $e\colon \underline{1}_q \to \underline{A}, f : \underline{1}_r \to \underline{A}$ jest największa wartość $s\in H$ taka, że $s \leqslant q\wedge r$ i $e_{|s} = f_{|s}$.

[13] Zdarzają się wyjątki. Np. gdy szukamy przykładów *przestrzeni metrycznych* z lubością przywołujemy przykłady „metryki miasta" i „metryki rzeki" które uświadamiają, że „odległość" między punktami przestrzeni można rozumieć inaczej niż „pitagorejską" długość odcinka między nimi.

[14] Zwróćmy uwagę: pogłębianie zrozumienia teorii poprzez wskazywanie modeli ma - w matematyce teoriomnogościowej - jeden wyjątek: jest nim .... teoria mnogości.

Kripkiego (str. 9) jest tu pięknym, ale trochę mało konkretnym wyjątkiem. A przykład dwuelementowej algebry Heytinga jest wręcz szkodliwy, bo sugeruje postrzeganie toposa H-obiektów jako pewnej „dewiacji” toposa **Set**.
Pewnym kłopotem jest też to, że definiując te toposy używamy określeń „punkt”, element” i „miara” (istnienia i równości). Tak mówimy, bo jakoś trzeba mówić. Ale ten wybór, jak każdy wybór nazw dla podstawowych (pierwotnych) pojęć teorii może inspirować i ... ograniczać. W tym przypadku ograniczeniem może być przesadne przywiązanie do znaczeń, jakie tym nazwom przypisujemy w klasycznej matematyce. Z drugiej strony proponowanie zupełnie nowych nazw jest też ryzykowne[15].

Możemy, na przykład, zamiast o punktach mówić o „zjawiskach”, a właściwie ich opisach[16]. Zjawiska istnieją - są opisywane - lokalnie. Obszar ich funkcjonowania - *lokalizacja* - to ich miara istnienia. Miara równości dwóch zjawisk to ta część wspólna ich lokalizacji, w której można dopatrzyć się ich zgodności, wyrażanej np. przez to, że opis pierwszego zjawiska ograniczonego do tej lokalizacji można przetłumaczyć na opis drugiego w tej samej lokalizacji. I vice versa.
Przejście od „punktów” do „elementów” H-obiektu to przejście od „zjawisk” do „pojęć”. Zjawiska obserwujemy, pojęcia tworzymy. Tworzymy przez obcinanie opisów zjawisk i ich sklejanie w sposób opisany przez odwołanie do algebry H.
Czy mówienie o „zjawiskach” i „pojęciach” pomaga lepiej zrozumieć istotę definicji toposa H-obiektów? Moim zdaniem, tak. Ale nie trzeba się ze mną zgadzać.

Zwróćmy jeszcze uwagę na istotny fakt, który może umknąć naszej uwadze z uwagi na przyjęty tu sposób narracji unikający technicznych zawiłości. Otóż za stwierdzeniem, że „każdy element jest sumą zgodnej rodziny obcięć punktów” kryje się równie ważne twierdzenie, że *„wszystkie elementy dowolnego H-obiektów zbudujemy z jego punktów w dwóch krokach:*
- w pierwszym kroku tworzymy wszystkie obcięcia punktów,
- w drugim kroku tworzymy sumy zgodnych rodzin tych obcięć”.
Dlaczego powtórzenie tych kroków (np. rozważanie obcięć sum utworzonych w drugich kroków) nie prowadzi do skonstruowania nowych elementów ? Zawdzięczamy, to temu, że każda zupełna algebra Heytinga spełnia *warunek dystrybutywności (rozdzielczości) koniunkcji względem alternatywy*: dla dowolnych elementów $p, (q_i : i \in H)$:

$$p \wedge sup(q_i : i \in I) = sup(p \wedge q_i : i \in I)$$ [17].

Inną „ukrytą” konsekwencją dystrybutywności jest to, że w każdej zupełnej kracie dystrybutywnej H operacja implikacji istnieje i jest wyznaczona jednoznacznie : $p \rightarrow q = sup(r \in H : p \wedge r \leqslant q)$. Implikacja jest wtórna w stosunku do koniunkcji i nieskończonej alternatywy. Prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne: jeśli w zupełnej kracie H zdefiniowana jest operacja implikacji w ten sposób, że dla dowolnych $p, q, r \in H$, $r \wedge p \leqslant q wtw\ p \leqslant r \rightarrow p$, to H spełnia warunek dystrybutywności.

Dlaczego mówiąc o zupełnej algebrze Heytinga otwartych podzbiorów przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ „zapominamy” o tym, że w $\mathcal{T}$ są nie tylko wszelkie wszelkie kresy górne ale też wszystkie kresy dolne? Dlaczego wraz z toposem $\mathcal{T}$-obiektów nie rozpatrujemy toposa $\mathcal{T}^{op}$-obiektów, gdzie $\mathcal{T}^{op}$ to zupełna krata dualna?[18] Teoriomnogościowiec uzna to za wystarczający argument to, że kres górny rodziny zbiorów otwartych - w odróżnieniu od kresu dolnego - to ich suma teoriomnogościowa (i znajdzie w tym argument na rzecz wyższości teorii mnogości nad resztą matematyki).
Nie o to chodzi: zupełna krata $\mathcal{T}$ jest zawsze dystrybutywna ale zupełna krata dualna $\mathcal{T}^{op}$ już nie (chyba, że $\mathcal{T}$ jest kratą skończoną).

---

[15]Przyznam uczciwie: „agrarna” terminologia związana z teorią snopów - snopy, wiązki, cięcia, kiełki - pomaga mi średnio.

[16]Chciałoby się powiedzieć - o obserwablach. Obserwabla to - w fizyce kwantowej - mierzalna (czyli opisywalna) wielkość fizyczna. Kwantowa obserwabla jest reprerzentowan przez obiekt mnatematyczny - tzw. *operator hermitowski*. Nasze obserwable (czyli punkty) są też funkcjami (o wartościach w H).

[17]Jest to sytuacja podobna do tej, którą spotykamy w teorii przestrzeni liniowych: najmniejszą podprzestrzeń zawierającą zbiór wektorów A też skonstruujemy w dwóch prostych krokach - najpierw budujemy zbiór kA złożony z wektorów postaci αa gdzie $a \in A$, a w drugim kroku dokładamy skończone sumy wektorów ze zbioru kA. Jest to konsekwencja rozdzielczości mnożenia wektorów przez skalary względem ich dodawaniem: $\alpha \cdot (a + b) = \alpha a + \alpha b$.

Dystrybutywność zupełnych algebry Heytinga to cichy bohater naszej opowieści o toposach H-obiektów. „Cichy”, bo rzadko odwołujemy się tu do niego w sposób jawny. Jednak ta równość odgrywa często kluczową rolę w dowodach twierdzeń opisujących własności toposa H-obiektów.

Niestety, zgodnie z przyjętą konwencją, dowodów w tym tekście jak na lekarstwo... .

Monomorfizmy, epimorfizmy, izomorfizmy

H-obiekt $\underline{A}$ i $\underline{El(A)}$, którego punktami są elementy $\underline{A}$, są różne, gdy patrzymy na nie przez teoriomnogościowe okulary. A jednak „czujemy”, że te H-obiekty - „roboczy” $\underline{A}$ i kompletny snop $\underline{El(A)}$ - mają wiele wspólnego.

Jak to wyrazić formalnie, matematycznie? Odpowiedź już za chwilę.

H-obiekty posadowione na tym samym zbiorze można porównywać: obiekt $(A, \approx_1)$ jest mniejszy od $(A, \approx_2)$ gdy $a \approx_1 b \leqslant a \approx_2 b$ dla każdej pary punktów. Wtedy funkcja $\hat{\imath}\colon A^2 \to H$ taka, że $\hat{\imath}(a, b) = \mathbf{E}_{(A,\approx_1)}(a) \wedge (a \approx_2 b)$ jest morfizmem z $(A, \approx_1)$ do $(A, \approx_2)$.

Można też skonstruować „obiekt pośredni” $(A, \approx)$, gdzie $a \approx b = \mathbf{E}_{(A,\approx_1)}(a) \wedge (a \approx_2 b) \wedge \mathbf{E}_{(A,\approx_1)}(b)$ i pokazać, że $\hat{\imath}$ jest złożeniem dwóch morfizmów:

$$(*) \qquad (A, \approx_1) \xrightarrow{e_i} (A, \approx) \xrightarrow{m_i} (A, \approx_2)$$

z których pierwszy jest epi- a drugi monomorfizmem.

> Morfizm $\hat{\imath}$ opisuje wzrost miary równości punktów zbioru A. Opisany rozkład $\hat{\imath}$ odpowiada podziałowi tego procesu na dwie fazy: zapominając o matematycznej precyzji, zapis $(*)$ odczytamy tak:
>
> - *„epimorfizm e_i odpowiada fazie pierwszej, w której zwiększa się miara równości różnych punktów, a miara istnienia pozostaje niezmieniona”*,
> - *„monomorfizm m_i odpowiada fazie, w której zwiększa się miara istnienia, a miara równości nie zwiększa się ponad to, co jest skutkiem zwiększenia miary istnienia punktów”*[19].

Tak opisane epi- i monomorfizmy są *kanoniczne*, co oznacza, że:

„każdy morfizm $f : (A, \approx_A) \to (B, \approx_B)$ jest złożeniem trzech morfizmów - epimorfizmu kanonicznego, izomorfizmu i monomorfizmu kanonicznego”:

$$\begin{tikzcd}
(A, \approx) \arrow[r, "e_i"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & (A, \approx_1) \arrow[r, "i_f"] & (B, \approx_2) \arrow[r, "m_i"] & (B, \approx_B)
\end{tikzcd}$$

> Skoro kanoniczne epi- i monomorfizmy nie zmieniają zbiorów punktów to musi to czynić izomorfizm $i_f\colon (A, \approx_1) \to (B, \approx_2)$ - izomorfizm $\hat{H}$-obiektów NIE wymusza równoliczności zbiorów punktów! To trochę zaskakuje. Dlaczego?
>
> Model dowolnej teorii pierwszego rzędu posadowiony na obiekcie $\underline{A}$ można skopiować na izomorficznym obiekcie $\underline{B}$. Ta kopia ma dokładnie te same (pierwszorzędowe) cechy co oryginał. I tak jeśli zdanie $\forall_{x,y}(x = y)$ jest prawdziwe w oryginale to jest też prawdziwe w jego kopii. Ale to zdanie - „czytane teoriomnogościowo” - mówi, że model ma jeden punkt. A przecież obiekt izomorficzny z jednopunktowym H- obiektem może mieć wiele punktów... .
>
> Wniosek może być tylko jeden - kwantyfikację uniwersalną w toposie $\hat{H}$ trzeba rozumieć inaczej.

Przykład. Dwupunktowy obiekt $(\{a, b\}, \approx)$ z „przykładu Szostakowicza” jest izomorficzny zarówno z jednopunktowym obiektem końcowym $(\{1\}, \mathbf{E}(1) = (1, 1))$ jak i czteropunktowym snopem jego elementów.

> *Izomorficzne H-obiekty mogą mieć różne zbiory punktów, ale mają „te same” elementy - generują takie same snopy elementów lokalnych*[20].

[19] Bardziej intuicyjne jest związanie monomorfizmu kanonicznego z operacją „odwrotną”: jego dziedzina powstaje przez „obcięcie” miary istnienia punktów w jego kodziedzinie.

[20] Morfizm $f\colon \underline{A} \to \underline{B}$ *opisany przez funkcję* $f\colon A \times B \to H$ *- jest izomorfizmem gdy funkcja* $g\colon B \times A \to H$ *określona wzorem* $g(b, a) = f(a, b)$ *jest morfizmem z* $\underline{B}$ *do* $\underline{A}$.

Dla nieprzekonanych: dorzucenie do zbioru punktów dowolnie wielu kopii dowolnie wybranego punktu (str.39) da nam większy, w sensie teoriomnogościowym, H-obiekt, który jednak jest izomorficzny z pierwotnym. Taki sam rezultat da dorzucanie dowolnie wielu *punktów nieistniejących* - takich, których miarą istnienia jest $\perp \in H$.

Na postawione wcześniej pytanie odpowiemy teraz tak: różniące się teoriomnogościowo H-obiekt $\underline{A}$ i H-snop $El(\underline{A})$ są izomorficzne - „takie same", gdy widzimy je wewnątrz toposa $\hat{H}$.

Izomorfizm $\eta_{\underline{A}} \colon \underline{A} \to (El(\underline{A}), \approx_{el})$ jest wyznaczony przez przyporządkowanie $a \in A \rightsquigarrow e^a \in El(\underline{A})$ (które na ogół nie jest ani różnowartościowe ani „na"!)[21]

> Każdy H-obiekt jest izomorficzny z pewnym H-snopem co oznacza, że te toposy są „równoważne"[22]. To może należy wybrać jeden z tych toposów i zapomnieć o drugim?
> Z „epistemologicznego punktu widzenia" te toposy są różne, bo opisane w różnych językach. Ich opisy eksponują odmienne cechy tego lokalnego uniwersum. Miary równości i istnienia - podstawowe pojęcia opisu H-obiektów - są intuicyjnie proste. Z kolei opis w języku snopów preferują matematycy, bo to język ich ukochanej klasycznej matematyki.
> Czy musimy wybierać i wskazywać „jedynie słuszny" opis? Wielość i różnorodność matematycznych opisów tego samego obiektu jest zaletą a nie wadą.

Dodajmy jeszcze intuicyjnie oczywiste (pod warunkiem, że intuicję wspiera zrozumienie definicji morfizmu), choć niełatwe do formalnego udowodnienia, charakteryzacje epi- i monomorfizmów w kategorii H-obiektów [15]:

$f \colon \underline{A} \to \underline{B}$ jest epimorfizmem jeżeli dla dowolnego punktu $b \in B$, $\mathbf{E}(b) = sup(f(a,b) : a \in A)$, („każdy punkt $b \in B$ jest w pełni wykorzystany do budowy obrazów punktów z A poprzez morfizm f")

$f \colon \underline{A} \to \underline{B}$ jest monomorfizmem jeżeli dla dowolnych punktów $a, a_1 \in A$ i $b \in B$, $f(a,b) \wedge f(a_1,b) \leqslant a \approx a_1$,
(„część punktu $b \in B$ wykorzystana jednocześnie do budowy obrazów punktów a i a_1 ma miarę istnienia mniejszą od $a \approx a_1$").

H-zbiory, H-zbiory rozmyte i H-obiekty bogate (krótko)

Spróbujmy zebrać w jednym miejscu wszelkie informacje o klasyfikacji H-obiektów funkcjonujace w literaturze przedmiotu w sposób „rozproszony" (rozmyty). Nieco upraszczając: ta klasyfikacja odnosi się do relacji między punktami a elementami H-obiektów.
Zacznijmy od prostej, ale ważnej obserwacji:

topos **Set** *można zanurzyć w topos H-obiektów: $A \rightsquigarrow \Delta(A) = (A, \approx_\Delta)$, gdzie*

$$a \approx_\Delta b = \begin{cases} \top & a = b \\ \perp & a \neq b \end{cases}$$

> Funkcje ze zbioru A do zbioru B wyznaczają morfizmy z $\Delta(A)$ do $\Delta(B)$. Ale nie wszystkie, bo elementy zbioru B to nie wszystkie globalne elementy H-obiektu $\Delta(B)$ (a morfizmy między tymi H-obiektami przyporządkowują punktom (globalnym) $\Delta(A)$ elementy (globalne) $\Delta(B)$)[23].

H-obiekty należące do podkategorii $\Delta(\mathbf{Set})$ nazywamy *H-zbiorami*. Wszystkie punkty H-zbiorów są globalne.

Bogaty H-obiekt charakteryzuje się tym, że każdy jego element jest obcięciem punktu[24]. W szczególności, każdy element globalny takiego obiektu jest punktem. Co istotne,

---

[21]Formalnie: $\eta_{\underline{A}} \colon A \times El(\underline{A}) \to H$, $\eta(a,e) = e(a)$.

[22]Równoważność toposów (kategorii) to „troszkę mniej" niż istnienie izomorfizmu - pary wzajemnie odwrotnych funktorów - między nimi. Niemniej można przyjąć, że równoważne kategorie są „(prawie) takie same".

[23]Naukowo: przyporządkowanie Δ jest funktore, a obraz **Set** przez ten funktor - kategoria $\Delta(\mathbf{Set})$ - jest podkategorią toposa $\widehat{H}$, która jednak nie jest *pełną podkategorią*.

[24]*ample objects* w [15]. Lepsze tłumaczenie nie przychodzi mi do głowy.

każdy morfizm do bogatego H-obiektu - $f\colon (C, \approx_C) \to (A, \approx_A)$ - jest prosty, tzn. jednoznacznie opisany przez funkcję $\beta\colon C \to A$ taką, że $c \approx_C c_1 \leqslant \beta(c) \approx_A \beta(c_1)$ [25].

H-obiekty potęgowe - w szczególności klasyfikator podobiektów - są bogate (patrz str. 47).

H-zbiór rozmyty to H-obiekt w którym miara równości jest zredukowana do miary istnienia: $a \approx b = \perp$ jeśli tylko $a \neq b$. Te obiekty opisujemy prościej, jako pary $(A, \mathbf{E}^A\colon A \to H)$ nie nakładając na funkcję $\mathbf{E}^A$ żadnych ograniczeń[26].

> Puenta: każdy H-obiekt jest epimorficznym obrazem pewnego rozmytego H-zbioru, a każdy H-zbiór rozmyty jest podobiektem H-zbioru.
>
> $$\begin{tikzcd} \Delta(A) \\ (A, \mathbf{E}^{\underline{A}}) \arrow[u, tail] \arrow[r, two heads] & (A, \approx_A) \end{tikzcd}$$
>
> Topos H-obiektów to rozszerzenie teoriomnogościowego uniwersum spowodowane zastąpieniem dychotomicznych miar istnienia i równości bardziej złożonymi miarami powiązanymi z wybraną *a priori* logiką.

3.2.2 Podobiekty

Podobiekty H-obiektu $\underline{A} = (A, \approx)$ to morfizmy z $\underline{A}$ do klasyfikatora podobiektów. Mając w głowie koszmarną definicję morfizmów trudno oczekiwać, że dyskusja o podobiektach będzie przyjemna. Ale mam dobrą wiadomość: dzięki temu, że klasyfikator podobiektów jest bogatem obiektem, podobiekty w toposie $\hat{H}$ mają prostszy opis:

„każdy podobiekt obiektu $\underline{A}$ można jednoznacznie opisać wskazując jego „charakterystykę” - funkcję $\alpha\colon A \to H$ - taką, że dla dowolnych punktów $a, b \in A$:

- $\alpha(a) \leqslant \mathbf{E}(a)$
- $(a \approx b) \wedge \alpha(a) = (a \approx b) \wedge \alpha(b)$

Miara istnienia - funkcja $\mathbf{E}\colon A \to H$ - to charakterystyka obiektu $\underline{A}$.

Poddobiekt H-obiektu $\underline{A}$ opisany przez funkcje charakterystyczną $\alpha\colon A \to H$ ma kanoniczną reprezentację: to H-obiekt $\underline{A}_\alpha = (A, \approx_\alpha)$, gdzie $a \approx_\alpha b = \alpha(a) \wedge a \approx b \wedge \alpha(b)$ wraz z monomorfizmem $i_\alpha\colon \underline{A}_\alpha \to \underline{A}$ takim, że $i_\alpha(a, c) = \alpha(a) \approx c$.

Odtąd podobiekt będę utożsamiał z jego charakterystyką (i/lub reprezentującym go obiektem $\underline{A}_\alpha$). Aby zaznaczyć, że funkcja α jest charakterystyką podobiektu $\underline{A}$ piszę - trochę nieformalnie - $\alpha\colon \underline{A} \to H$[27].

> Kanoniczną reprezentację podobiektu tworzymy nie przez dowolne „wyrzucanie” punktów lecz poprzez zmniejszenie ich miar istnienia: nową miarą istnienia punktu $a \in A$ jest $\alpha(a)$.

> Dowolność zmniejszania ogranicza drugi warunek definiujący charakterystyki: on sprawia, że miara równości w podobiekcie jest obcięciem miary równości w całym obiekcie „wymuszonym przez obcięcie miary istnienia”.

---

[25] $f(c, a) = \mathbf{E}^{\underline{C}}(c) \wedge (\beta(c) \approx_A a)$. Element-obraz punktu c poprzez morfizm f to obcięcie punktu $\beta(c)$. Morfizm prosty może mieć wiele takich reprezentacji ale nie jest to istotna komplikacja.

[26] Lokując H-zbiory rozmyte wewnątrz toposa H-obiektów wskazaliśmy jednocześnie morfizmy między nimi. Zbiory rozmyte zdefiniował L.A. Zadeh *Fuzzy sets, (Information and Control 8(3), 1965)* ale nie zdefiniował morfizmów między takimi obiektami. Również w monografii *„Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Fuzzy Methods with Applications”, H.Bandemer, S.Gottwald* (internet) trudno znaleźć taką definicję. Pewne i różniące się propozycje zdefiniowania morfizmów znajdziemy np. w pracach *"Categories of fuzzy sets", C.L. Walker, Soft Computinng Feb. 2004, Vol.8, Issue 4* i *„On a new category of fuzzy sets", A.R.Porselvi Agnes, D.Sivaraj, T.Tamizh Chelvam, J. of Adv. Research in Pure Mathematics Vol.2,Issue 4, 2010.* W każdym przypadku te definicje wyróżniają pewne podklasy morfizmów H-obiektów.

[27] Dla dociekliwych: podobiekt opisany przez charakterystykę α to morfizm $\lambda_\alpha\colon \underline{A} \to \Omega^H$ taki, że $\lambda_\alpha(a, q) = \mathbf{E}(a) \wedge (\alpha(a) \approx_H q)$. $\lambda_\alpha(a, q)$ to największa wartość logiczna $s \leqslant \mathbf{E}(a)$ spełniająca równość $\alpha(a) \wedge s = q \wedge s$.

Kilka pomocnych faktów:

0. Punkt $a \in A$ należy do podobiektu o charakterystyce α gdy $\mathbf{E}(a) = \alpha(a)$. Podobiekty są domknięte na operacje obcinania i sklejania (punktów i elementów),

1. Charakterystyka podobiektu logicznego wyznaczonego przez wartość logiczną $r \in H$ (str. 29) to funkcja $\gamma_r\colon \underline{A} \to H$ taka, że $\gamma_r(a) = \mathbf{E}(a) \wedge r$. Jego kanoniczną reprezentacją jest H-obiekt $\underline{A}_r = (A, \approx \wedge r)$, który nazywamy redukcją $\underline{A}$ wyznaczoną przez $r \in H$.

2. Elementy lokalne to podobiekty. Charakterystyka $\alpha\colon \underline{A} \to H$ jest charakterystyką lokalnego elementu gdy dla dowolnych punktów $a, b \in A$, $\alpha(a) \wedge \alpha(b) \leqslant a \approx b$. Podobiekt elementu lokalnego jest zawsze elementem lokalnym.
Charakterystyka elementu-punktu $a \in A$ to funkcja $\alpha_a\colon \underline{A} \to H$ taka, że $\alpha_a(b) = a \approx b$.

3. Morfizm $f\colon \underline{A} \to \underline{B}$ wyznacza podobiekt produktu $\underline{A} \times \underline{B}$ („graf morfizmu"), którego charakterystyką jest funkcja $f\colon A \times B \to H$[28].

4. Obrazem podobiektu $\alpha\colon \underline{A} \to H$ poprzez morfizm $f : \underline{A} \to \underline{B}$ jest podobiekt $f(\alpha)\colon \underline{B} \to H$ taki, że $f(\alpha)(b) = sup(f(a,b) \wedge \alpha(a)\colon a \in A)$.

5. Przeciwobrazem podobiektu $\beta\colon \underline{B} \to H$ poprzez morfizm f jest podobiekt $f^{-1}(\beta)\colon \underline{A} \to H$ taki, że $f^{-1}(\beta)(a) = sup(f(a,b) \wedge \beta(b)\colon b \in B)$ [29].

Algebry podobiektów i kwantyfikacja

Opis operacji logicznych w algebrze podobiektów dowolnego H-obiektu $\underline{A}$ sporządzony w języku charakterystyk ujawnia ważną subtelność - podział tych operacji na *geometryczne* i pozostałe (niegoemetryczne).

Koniunkcję i alternatywę podobiektów $\underline{A}$ definiujemy „punktowo":

$$(\alpha \vee \beta)(a) = \alpha(a) \vee \beta(a), \qquad (\alpha \wedge \beta)(a) = \alpha(a) \wedge \beta(a).$$

Ale implikację opisujemy subtelniej:

$$(\alpha \to \beta)(a) = \mathbf{E}(a) \wedge (\alpha(a) \to \beta(a))$$

Kwantyfikacje (wyznaczające wspólnie najwęższe pasmo ograniczone przez podobiekty logiczne w którym znajduje się dany podobiekt) opisujemy tak: dla dowolnego podobiektu $\alpha : \underline{A} \to H$:

$$\exists(\alpha) = sup(\alpha(a)\colon a \in A)$$

$$\forall(\alpha) = inf(\mathbf{E}(a) \to \alpha(a)\colon a \in A)$$

Skąd implikacja w drugiej równości? $\gamma_r \leqslant \alpha$ gdy $\mathbf{E}(a) \wedge r \leqslant \alpha(a)$ dla każdego punktu a. A to - na mocy definicji implikacji - jest równoważne nierówności $r \leqslant \mathbf{E}(a) \to \alpha(a)$. I wszystko jasne.

> Warta uwagi jest interpretacja wartości logicznej zdania $\forall(\alpha \to \beta)$. To „najoszczędniejsze jednolite obcięcie" miar istnienia punktów podobiektu α gwarantujące nierówność $\alpha(a) \wedge \forall(\alpha \to \beta) \leqslant \beta(a)$ dla dowolnego punktu $a \in A$. Dlatego $\alpha \leqslant \beta$ dokładnie wtedy, gdy $\forall(\alpha \to \beta) = \top$.
>
> Rozpatrując zależności między podobiektami w języku „zewnętrznym" na pytanie: *„czy podobiekt α jest mniejszy-równy podobiektowi β?"* możemy odpowiedzieć tylko dychotomicznie, „tak" lub „nie". W języku wewnętrznej logiki toposa H-obiektów można odpowiedzieć bardziej precyzyjnie - można „mierzyć" zawieranie wartością logiczną formuły $\forall(\alpha \to \beta)$.

Bogatsi o zrozumienie tego najprostszego przypadku możemy się zmierzyć z ogólną definicją kwantyfikacji w toposie H-obiektów.

---

[28] $\underline{A} \times \underline{B} = (A \times B, \approx)$, gdzie $(a,b) \approx (a_1, b_1) = a \approx a_1 \wedge b \approx b_1$.

[29] Pierwotne definicje obrazu i przeciwobrazu podobiektu są oczywiście „kategoryjne":

$$\begin{tikzcd} \underline{A} \arrow[r, "f"] & \underline{B} \\ \underline{A}_\alpha \arrow[u, "i_\alpha"] \arrow[r, "epi"] & \underline{B}_{f(\alpha)} \arrow[u, "mono"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \underline{A} \arrow[r, "f"] & \underline{B} \\ \underline{A}_{f^{-1}(\beta)} \arrow[u] \arrow[r] & \underline{B}_\beta \arrow[u, "i_\beta"'] \end{tikzcd}$$

- obraz $\underline{B}_{f(\alpha)}$ to obiekt centralny (epi,mono)-rozkładu morfizmu $f \cdot i_\alpha$,
- przeciwobraz $\underline{A}_{f^{-1}(\beta)}$ to pullback pary (f, i_β).

Dla dowolnego podobiektu $\alpha\colon \underline{B}\times\underline{A}\to H$ *podobiekty* $\exists_{\underline{A}}(\alpha)$, $\forall_{\underline{A}}\alpha\colon \underline{B}\to H$ *definiujemy tak: dla dowolnego* $b\in B$,

$$\exists_{\underline{A}}(\alpha)(b) = sup(\alpha(b,a)\colon a\in\underline{A}) ,$$
$$\forall_{\underline{A}}(\alpha)(b) = inf(\mathbf{E}(a)\to\alpha(b,a)\colon a\in\underline{A}).$$

Przy odrobinie dobrej woli można sprawdzić, że *dla dowolnego podobiektu* $\beta\colon \underline{B}\to H$*:*

$$\exists_{\underline{A}}(\alpha)\leqslant\beta \quad wtw \quad \alpha\leqslant\Pi_{\underline{B}}^{-1}(\beta),$$
$$\Pi_{\underline{B}}^{-1}(\beta)\leqslant\alpha \quad wtw \quad \beta\leqslant\forall_{\underline{A}}(\alpha)$$

Te równoważności to nic innego jak warunki definiujące kwantyfikację w toposach (str. 28) zapisane tu „w języku charakterystyk”.

> Niech nam to nie umknie: morfizm-rzutowanie $\Pi_{\underline{B}}\colon \underline{A}\times\underline{B}\to\underline{B}$ opisuje funkcja $\Pi_{\underline{B}}\colon : A\times B\times B\to H$ taka, że $\Pi_{\underline{B}}((a,b),d) = b\approx d$. Stąd:
> $$\exists_{\underline{A}}(\alpha) = \Pi_{\underline{B}}(\alpha)$$
> Nie mamy podobnej równości wiążącej kwantyfikację uniwersalną z obrazem czy też przeciwobrazem podobiektu „poprzez rzutowanie”.
> Wyniesione z teorii mnogości przekonanie o pewnej „symetrii” między kwantyfikatorem uniwersalnym i egzystencjalnym jest złudzeniem, spowodowanym szczególną rolą negacji w toposie zbiorów (z logiką dychotomiczną)[30].

Dołączmy jeszcze operację nieskończonej alternatywy (lub, jak kto woli, kresu górnego) podobiektów:

$$sup(\alpha_i\colon i\in I)(a) = sup(\alpha_i(a) : i\in I)$$

Dołączenie tej operacji jest uzasadnione choćby z uwagi na twierdzenie, które jest odpowiednikiem teoriomnogościowej oczywistości - stwierdzenia, że „każdy zbiór jest suma swoich elementów”:

każdy H*-obiekt* $\underline{A}$ *jest kresem górnym („nieskończoną alternatywą”) swoich punktów:*

$$\mathbf{E}^A = sup(\alpha_a : a\in A)$$

> *Operacje geometryczne* to koniunkcja, alternatywa (skończona i nieskończona) i kwantyfikator egzystencjalny.
> Pozostałe - czyli implikację (i negację) oraz kwantyfikator uniwersalny odróżnia to, że w ich opisie odwołujemy się do miary istnienia punktów - $\mathbf{E}^A$. Operacje geometryczne wyróżnia też to, że realizujemy w dowolnym podobiekcie H-obiektu $\underline{A}$ tak samo jak całym obiekcie[31].

Ten podział operacji w zupełnej algebrze Heytinga podobiektów to nie błaha ciekawostka. To fakt o istotnym znaczeniu dla rozumienia wielu zawiłości teorii toposów, o czym się wkrótce przekonamy.

Semantyka języka pierwszego rzędu

Korzystając z charakterystyk uprościmy opis interpretacji języka pierwszego rzędu w toposie $\hat{H}$: przyjmiemy, że semantyką formuły $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ w modelu posadowionym na H-obiekcie $\underline{A}$ jest charakterystyka $[\phi]\colon \underline{A}^n\to H$ reprezentująca podobiekt $[[\phi(x_1,\ldots,x_n)]]$.

> Nie dajmy się zwieść teoriomnogościowym przyzwyczajeniom: semantyką formuły $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ w modelu posadowionym na $\underline{A}$ jest podobiekt $[[\phi]]\subseteq\underline{A}^n$. Dla dowolnego ciągu $(a_1,\ldots,a_n)\in\underline{A}^n$ wartość logiczna $[\phi](a_1,\ldots a_n)\in H$ informuje o tym, „jak bardzo trzeba ‚obciąć” punkt $(a_1,\ldots,a_n)$ (zmniejszyć jego miarę istnienia) by miał on - a właściwie to, co z niego pozostało - własność opisaną przez formułę ϕ.

[30] Mówimy tu o klasycznych równoważnościach: $\neg\forall_x\phi(x)\equiv\exists_x\neg\phi(x)$ i $\neg\exists_x\phi(x)\equiv\forall_x\neg\phi(x)$.

[31] Gdy α,β,γ są charakterystykami podbiektów i $\alpha,\beta\leqslant\gamma$, to koniunkcję $\alpha\wedge\beta$ obliczamy tak samo, niezależnie od tego, czy α i β sa postrzegane jako podobiekty $\underline{A}$ czy jako podobiekty $\underline{a}_{\gamma}$. . Natomast wartości operacji niegeometrycznej - implikacji $\alpha\to\beta$ w tych dwóch sytuacjach mogą być różne.

Można też powiedzieć, że $[\phi](a_1, \ldots a_n)$ to wartość logiczna zdania *„ciąg $(a_1, \ldots a_n)$ ma - w rozważanym modelu - własność opisaną przez ϕ"*.
Ciąg punktów $(a_1, \ldots, a_n)$ MA *własność opisaną przez ϕ* , gdy $[\phi](a_1, \ldots, a_n) = \mathbf{E}(a_1) \wedge \ldots \wedge \mathbf{E}(a_n)$.
Poznanie wszystkich punktów posiadających własność ϕ nie jest tożsame z poznaniem semantyki tej formuły - $[[\phi]]$ NIE JEST „zbiorem punktów (elementów) produktu posiadających własność opisaną przez ϕ".
Formuła ϕ jest prawdziwa w $\underline{A}$ gdy $\forall_{x_1,\ldots,x_n} (\mathbf{E}(x_1) \wedge \ldots \wedge \mathbf{E}(x_n)) \to [\phi](x_1, \ldots, x_n) = \top$.

Każdy H-obiekt jest izomorficzny z H-snopem jego elementów. Dlatego wystarczy rozważać modele posadowione na H-snopach. To nęcące, bo taki model JĘZYKA pierwszego rzędu można opisać elegancko jako *H-snop modeli* - rodzinę teoriomnogościowych modeli $(F(q) \colon q \in H)$ taką, że obcięcia $a \in F(q) \rightsquigarrow a_{|p} \in F(p)$ „respektują operacje i relacje"[32].

Podobnie można opisywać modele pewnych pierwszorzędowych teorii w toposie $\hat{H}$. Dlatego w literaturze spotkamy *snopy grup* i *snopy pierścieni*. Ale czy można mówić snopach modeli DOWOLNEJ teorii pierwszego rzędu? Nie wiem (ale watpię). Znam tylko taki wynik: jeśli T jest teorią opisaną w języku pozbawionym symboli relacyjnych a jej aksjomaty są zdaniami postaci

$$\forall_{x_1,\ldots,x_n} (p_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge p_k = t_k) \to (p = k)$$

to kategoria modeli teorii T toposie $\hat{H}$ jest równoważna z kategorią „H-snopów modeli teorii T" [33].

Dodatek: wszystko jest falą...

Wszystko jest falą... w toposach H-obiektów. Matematycznym modelem fali jest tu funkcja postaci $f \colon A \times B \to H$ spełniająca pewne warunki.
„Miara równości i istnienia" opisująca H-obiekt jest falą. Morfizmy są falami. Składanie morfizmów to „nakładanie fal". Fala opisująca podobiekt jest „obcięciem" fali opisującej obiekt. Elementy i punkty obiektu, jako szczególne podobiekty, są falami. Fale równoległe - $f, g \colon A \times B \to H$ umiemy porównywać. Odpowiadając na pytanie: „czy f jest mniejsze od g" wskazujemy wartość logiczną - element $p \in H$ - co oznacza, że „jednolite obcięcie f do p jest mniejsze od obcięcia g do p" - nierówność fal-morfizmów jest opisywana „lokalnie". To samo dotyczy np. pytania „czy fala-punkt (element) należy do fali-podobiektu"

Po co te nieco chaotyczne i mało matematyczne uwagi? Po to, by sprowokować do zastanowienia się nad istotą matematyki toposa H-obiektów.

Obiekt potęgowy i obiekt funkcyjny

W toposie zbiorów wszystko jest banalnie proste:

- *obiekt potęgowy zbioru A to zbiór 2^A którego elementami są wszystkie podzbiory A,*

- *funkcje to relacje, więc zbiór wszystkich funkcji z A do B jest podzbiorem zbioru potęgowego $2^{A \times B}$.*

Podobnie, ale jednak nieco inaczej, jest w toposie H-obiektów.

Przyjmijmy, że miarą równości charakterystyk podobiektów H-obiektu $\underline{A}$ jest największa wartość logiczna $r \in H$ taka, że $\alpha \wedge \gamma_r = \beta \wedge \gamma_r$[34].

Zbiór charakterystyk z tak zdefiniowaną miarą równości to obiekt potęgowy $Sub(\underline{A})$ $(= (\Omega_H)^{\underline{A}})$.

To tłumaczy konstrukcję klasyfikatora podobiektów Ω_H (str.39)- wszak jest to obiekt potęgowy obiektu końcowego.

Punkty globalne $Sub(\underline{A})$ to podobiekty $\underline{A}$. Innych punktów nie ma. Ale są elementy lokalne. Jak je interpretować?

---

[32] Naukowo: każde obcięcie $F(q) \rightsquigarrow F(p)$ jest homomorfizmem modeli. Mniejsza o szczegóły.

[33] Ten, nie tak znowu trudny wynik, można znaleźć w pracy *„Algebra in Grothendieck topos: injectivity in quasi-equational classes", M.M.Ebrahimi, JPPA 26(1982),269-283).*

[34] $r = inf(\alpha(a) \leftrightarrow \beta(a) : a \in A)$.

Istnienie obiektów potęgowych to konsekwencja kartezjańskiej domkniętości toposa a reprezentowanie podobiektów przez elementy globialne obiektów potęgowych to konsekwencja istnienia dwóch izomorfizmów

$$\hat{H}(\underline{A}, \Omega) \cong \hat{H}(\underline{A} \times \underline{1}, \Omega) \cong \hat{H}(\underline{1}, \Omega^{\underline{A}})$$

Podobnie, dla dowolnej wartości logicznej $r \in H$:

$$\hat{H}(\underline{A}_r, \Omega) \cong \hat{H}(\underline{A} \times \underline{1}_r, \Omega) \cong \hat{H}(\underline{1}_r, \Omega^{\underline{A}})$$

- elementy lokalne obiektu potęgowego $\Omega^{\underline{A}}$, których miarą istnienia jest r, reprezentują podobiekty reduktu $\underline{A}_r$. Każdy podobiekt $\underline{A}_r$ jest też podobiektem $\underline{A}$ .To oznacza, że H-obiekty potęgowe są bogate (str.43).

Każdy morfizm H-obiektów $f\colon \underline{A} \to \underline{B}$ ma swój graf - podobiekt produktu $\underline{A} \times \underline{B}$ którego charakterystyką jest funkcja $f\colon A \times B \to H$. Dlatego obiekt funkcyjny $\underline{B}^{\underline{A}}$ jest podobiektem obiektu potęgowego produktu $\underline{A} \times \underline{B}$. Charakterystyką obiektu funkcyjnego $\underline{B}^{\underline{A}}$ jako podobiektu $\Omega^{\underline{A} \times \underline{B}}$ jest funkcja przyporządkowującą podobiektowi $\alpha\colon \underline{A} \times \underline{B} \to H$ największą wartość logiczną r taką, że $\alpha \wedge \gamma_r$ jest grafem pewnego morfizmu z $\underline{A}_r$ do $\underline{B}$[35].
Punktami globalnymi w $\underline{B}^{\underline{A}}$ są grafy morfizmów z $\underline{A}$ do $\underline{B}$:

$$\hat{H}(\underline{A}, \underline{B}) \cong \hat{H}(\underline{A} \times \underline{1}, \underline{B}) \cong \hat{H}(\underline{1}, \underline{B}^{\underline{A}})$$

Tak jak w przypadku obiektu potęgowego, dla dowolnej wartości logicznej $r \in H$

$$\hat{H}(\underline{A}_r, \underline{B}) \cong \hat{H}(\underline{1}_r, \underline{B}^{\underline{A}})$$

- grafy morfizmów z $\underline{A}_r$ do $\underline{B}$ są elementami lokalnymi $\underline{B}^{\underline{A}}$, których miarą istnienia jest r.

Mając w głowie teoriomnogościowy wzorzec zechcemy zapewne dodać: *„a każdy morfizm z $\underline{A}_r$ do $\underline{B}$ jest obcięciem pewnego morfizmu z $\underline{A}$ do $\underline{B}$”*. Ale to nieprawda[36].

3.2.3 Więcej niż przykład

Teoria mnogości jawi się nam jako oczywista oczywistość, bo z jej aksjomatycznym sformułowaniem (i subtelnościami stąd wynikającymi) spotykamy na ogół po latach matematycznego praktykowania „wewnątrz” tej teorii. Nikt, jak dotąd, nie zaczyna edukacji matematycznej od teorii toposów. To język obcy, trudny świat: W. Phoa, komentując złożone dowody twierdzeń opisujących strukturę toposów, napisał: *„There is no doubt that the pioneering topos theorists (...) all drank Carling Black Label.”[28]*[37]

Topos to matematyczne uniwersum, w którym można uprawiać matematykę odmienną od teoriomnogościowej. Ujawnienie tych odmienności, czasem trudnych do zaakceptowania, nie wymaga wcale sięgania po toposy, których logika wewnętrzna jest szczególnie wyrafinowana.

Przyjmijmy, że matryca wartości logicznych to czteroelementowa algebra Boole'a $\mathbf{2}^2 = \{0,1\} \times \{0,1\}$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & true & \\ l \arrow[ur] & & r \arrow[ul] \\ & false \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(l (left) i *r (right) to umowne nazwy dwóch spośród czterech wartości logicznych wyznaczonych przez tę algebrę.)*
Obiekty toposa $\mathbf{2}^2$-snopów opiszemy jako czwórki zbiorów $\widetilde{AB} = (A \times B, A, B, \underline{1})$. Miarą istnienia punktów zbioru $A \times B$ jest *true*, a punktów zbiorów A i B - odpowiednio - l i r. $\underline{1}$ to zbiór

[35] Oczywiście trzeba wcześniej dowieść, że taka wartość logiczna istnieje. Dowód jest interesujący choćby dlatego, że nie można tu skorzystać z „teoriomnogościowego wzorca”. Ale go pominę, bo to zbyt zawiłe... .

[36] Odpowiedni kontrprzykład wskażemy analizując snop ciągłych funkcji rzeczywistych (nad $\mathcal{R}$).

[37] Carling Black Label to - wg wikipedii - *„ Canadian brand of lager distributed by Carling and well-known throughout the former British Empire”.*

jednoelementowy („punkt nieistniejący").
Globalny punkt $(a, b) \in A \times B$ jest sklejeniem swoich obcięć - punktów $a \in A$ oraz $b \in B$.

Przyjrzyjmy się arytmetyce tego toposa. Obiekt liczb naturalnych to $\widetilde{Nat} = (\mathbf{N} \times \mathbf{N}, \mathbf{N}, \mathbf{N}, \underline{1})$. *Globalne Liczby Naturalne* to pary „zwykłych" liczb naturalnych. Każda Globalna Liczba (m, k) ma dwa obcięcia - *Liczby Częściowe* m i k (odpowiednio o mierze istniania „l" i „r") i jest sklejeniem swoich obcięć.

Czy $\widetilde{Nat}$ to model arytmetyki Peano? Tak. Ale jest tu kilka zaskoczeń.
Jeden z aksjomatów PA to zdanie $\forall_x(\exists_y(x = succ(y)) \vee (x = 0))$. „Zero" w $\widetilde{Nat}$ to para $(0, 0)$. Morfizm $succ : \widetilde{Nat} \to \widetilde{Nat}$ przyporządkowuje globalnej Liczbie (n, m) Liczbę $(n+1, m+1)$. Jeżeli odczytamy analizowany aksjomat tak, jak nas uczono - *„każda Liczba Naturalna jest zerem albo następnikiem pewnej Liczby"* - to mamy kłopot: czy *Liczba* $(0, 5)$ jest zerem czy następnikiem? Ani jednym, ani drugim... .

Katastrofa? W żadnym razie - wartość logiczna tego zdania w WEWNĘTRZNEJ logice rozważanego toposa to ... *true*. Policzmy. Łatwo się zgodzić, że dla każdej Liczby Częściowej n:

$$[\exists_y(x = succ(y)](n) = \begin{cases} \mathbf{E}(n) & gdy\ n \neq 0 \\ false & gdy\ n = 0 \end{cases}$$

Podobnie:

$$[x = 0](n) = \begin{cases} \mathbf{E}(n) & gdy\ n = 0 \\ false & gdy\ n \neq 0 \end{cases}$$

Stąd dla dowolnej Częściowej Liczby n :

$$[\exists_y(x = succ(y)] \vee (x = 0](n) = [\exists_y(x = succ(y)](n) \vee [(x = 0](n) = \mathbf{E}(n)$$

Skoro każda Liczba Globalna (m, k) jest sklejeniem swoich obcięć m i k, to ta równość jest prawdziwa dla każdej Liczby Naturalnej. Stąd

$$[\forall_x(\exists_y x = succ(y) \vee (x = 0))] = inf(\mathbf{E}(n) \to [\exists_y x = succ(y) \vee (x = 0)](n) \colon n \in \widetilde{Nat}) =$$
$$= inf(\mathbf{E}(n) \to \mathbf{E}(n) \colon n \in \widetilde{Nat}) = true\ !!!$$

> To nie matematyczne czary. Logika tego toposa jest boolowska, ale nie dwuwartościowa - prawdziwość alternatywy NIE WYMUSZA prawdziwości jednego z jej składników. To jest prawo „logiki dychotomicznej", logiki toposa zbiorów, ale nie obowiązuje w każdym toposie boolowskim.
> Logika (chyba każdego) języka naturalnego jest dwuwartościowa. Wnioskowanie dychotomiczne to cząść-naszego kodu cywilizacyjnego. Wyjście poza logikę dwuwartościową jest kulturowym szokiem.
> Globalna Liczba $(0, 5)$ jest trochę zerem i trochę następnikiem, trochę parzysta i trochę nieparzysta. To „trochę" potrafimy mierzyć w logice wewnętrznej tego toposa.
> Legendarna opowieść o kocie Schrödingera przestanie być tak szokująca gdyby przyjąć, że logika (matematyki) świata kwantowego nie jest dychotomiczna...

Jeszcze bardziej intrygujące zaskoczenia przynosi dyskusja o dobrym uporządkowaniu obiektu liczb naturalnych. Przypomnijmy: relacja „$\leqslant$" jest dobrym porządkiem gdy jest porządkiem liniowymi i każdy niepusty podzbiór ma element najmniejszy. Liniowość porządku to prawdziwość zdania $\forall_x, y(x \leqslant y \vee y \leqslant x)$ Co zatem zrobić z parą Liczb $(2, 5), (3, 4)$? Nic - wystarczy przestać myśleć teoriomnogościowo...
Oczywiście zamiast o „niepustym podzbiorze" winniśmy teraz mówić o *niepustym podobiekcie* $\widetilde{Nat}$. Przyjmijmy, że taki podobiekt A ma conajmniej jedną Liczbę Globalną. Wówczas jego elementem najmniejszym jest Liczba Globalna (n, m) taka, że $n = min(k \colon (n, k) \in A\, dla\ pewnego\, k \in \mathbf{N})$ i podobnie $m = min \ldots$.
A gdy niepusty podobiekt A ma tylko elementy częściowe? Pomyśl... .

> Dobry porządek ma opis obowiązujący w **Set** i w toposie $\mathbf{2}^2$-snopów lecz odmienny sens w każdym z nich.

Liczby Naturalne nadal służą do „zliczania". Możemy przyjąć, że tym toposie obiekt jest skończony gdy jest izomorficzny z obiektem postaci $(\underline{n} \times \underline{m}, \underline{n}, \underline{m}, \underline{1})$, gdzie $\underline{n} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ($\underline{0}$ to zbiór pusty). Globalna Liczba (n, m) daje lepszą informacją o obiekcie skończonym niż wskazanie liczby jego elementów (punktów).

Analogicznie skonstruujemy w tym toposie obiekty liczb całkowitych, wymiernych i rzeczywistych. Możemy w tym toposie interpretować analizę matematyczną. Ale musimy być czujni. Np. ciąg $(1,1),(\frac{1}{2},2),\ldots,(\frac{1}{n},n),\ldots$ jest trochę zbieżny i trochę rozbieżny... .[38]

Są tu też inne fakty sprzeczne z (teoriomnogościową) intuicją. Na przykład:

- nie jest prawdą, że każdą (globalną) Liczbę można skonstruować z zera za pomocą operacji następnika w skończonej liczbie kroków,

- na pozór oczywiste wyróżnienie globalnych Liczb Naturalnych postaci (n, n) nie ma w tej matematyce sensu - to nie jest podobiekt $\widetilde{Nat}$ w toposie $\mathbf{2}^2$-snopów... .

Nie muszę przekonywać, że niewiele się zmieni, gdy zamiast czteroelementowej algebry Boole'a punktem wyjścia do konstrukcji toposa będzie algebra podzbiorów n-elementowego zbioru ... .

Ktoś powie, że te toposowe rebusy mało kogo interesują. Czyżby?

Oto szkoła, w której uczniowie uczą się pięciu przedmiotów. Ich wyniki opisuje pięcioelementowy ciąg liczb-ocen. To naturalne. Naturalne jest też stwiedzenie, że Ewa jest lepsza od Jasia z matematyki ale on jest lepszy z biologii. Ale na koniec roku szkolnego zaczyna się wyliczanie absurdalnej średniej ocen. Absurdalnej, bo zbiór Liczb Naturalnych - ciągów $(n_1,\ldots,n_5)$ których średnia arytmetyczna jest, powiedzmy, większa od 4, nie jest obiektem w toposie $\mathbf{2}^5$-snopów! To jest obiekt teoriomnogościowy, obiekt z innego świata... I jak tu lubić szkołę?

> Robimy wiele różnych rzeczy, lepiej lub gorzej. Ale dajemy sobie narzucać liniową skalę ocen życiowego sukcesu. Jaki sens ma porównanie osiągnięć Einsteina i Bolta?[39]

O przelewaniu z pustego w próżne

Odwiecznym tematem dyskusji ze studentami jest kwestia wartości logicznej zdań postaci $\forall_{x\in\emptyset}\phi(x)$ i $\exists_{x\in\emptyset}\phi(x)$. Nagabywany wykładowca zazwyczaj odpowiada, że pierwsze z tych zdań jest prawdziwe a drugie fałszywe. Robi się nieprzyjemnie gdy ktoś przypomni, że implikacja postaci $\forall\phi \to \exists\phi$ jest - zgodnie ze zdrowym rozsądkiem - zawsze prawdziwa. Zazwyczaj taka dyskusja kończy się marnym kompromisem - stwierdzeniem, że kwantyfikacja w zbiorze pustym jest niewartym uwagi problemem. Dużo w tym racji - taki „patologiczny” obiekt w toposie zbiorów jest tylko jeden.

W toposie H-obiektów nie jest tak łatwo - mamy tu całe mrowie obiektów pozbawionych elementów globalnych, ale posiadających elementy lokalne.

Czy jednopunktowy $\mathbf{2}^2$-obiekt którego jedyny punkt ma miarę „l” jest pusty czy niepusty?

> Podział zbiorów na puste i niepuste to kolejny przejaw myślenia dychtomicznego charakteryzującego topos zbiorów. W toposie H-obiektów ten podział należy zastąpić „miarą istnienia (niepustości (?)) obiektów”.

Do określenia miary istnienia H-obiektów wykorzystamy kwantyfikator egzystencjalny: przyjmujemy, że dla H-obiektu $\underline{A}$ tą miarą jest wartość logiczna $\exists_1\underline{A} = \exists_1\mathbf{E}(= sup(\mathbf{E}(a)\colon a \in A))$.

Tę miarę istnienia obiektu można powiązać z rozkładem (jedynego) morfizmu $\underline{A} \to \underline{1}$ na epimorfizm i monomorfizm: ten rozkład wygląda tak:

$$\underline{A} \to \underline{1}_{\exists_1(\underline{A})} \to \underline{1}$$

Miara istnienia obiektu $\underline{A}$ jest równa *true* gdy ten morfizm jest epimorfizmem. To jednak nie oznacza, że w $\underline{A}$ jest element globalny[40]. Taki element istnieje dokładnie wtedy, gdy ów jedyny morfizm jest *split epimorfizmem* (tzn. posiada prawą odwrotność).

[38] Dla ścisłości: ciąg to teraz morfizm z $\widetilde{Nat}$ do obiektu liczb rzeczywistych... .

[39] Gdyby Lem znał teorię toposów to zapewne napisałby kolejną powieść o funkcjonowaniu człowieka w wielu równoległych światach. Chociaż... Dr Jekyll and Mr Hyde? (nie sugeruję, że to Lem stworzył te postaci).

[40] Przykład wymyśl sam.

Obiekt $\underline{A}$ jest zamieszkały - *inhabitet* - gdy $\exists_1 \underline{A} = true$. Jest globalnie zamieszkały - *globally inhabitet* - gdy ma element globalny. Którą z wyróżnionych tu klas nazwać klasą obiektów niepustych? A może należy przyjąć, że określenie „obiekt niepusty" nie ma sensu poza toposem zbiorów?

Miara istnienia podobiektów $\underline{A}$ jest „własnościa geometryczną" (i jest zawsze mniejsza-równa mierze istnienia obiektu $\underline{A}$.

H-obiekty których miara istnienia jest mniejsza-równa ustalonej wartości logicznej $q \in H$ tworzą topos. Dokładniej: jest to topos $q_\downarrow$-obiektów, gdzie $q_\downarrow = \{p \in H : p \leqslant q\}$. Ten nowy topos jest (pełną) podkategorią toposa H-obiektów.
Redukcja matrycy wartości logicznych toposa H-obiektów - przyporządkowanie $p \in H \rightsquigarrow p \wedge q \in q_\downarrow$ - determinuje „funktor redukcji" $R_q : \hat{H} \to \widehat{q_\downarrow}$:

$R_q(\underline{A}, \approx) = (A, \approx \wedge q)$ *i* $R_q(f)(a,b) = f(a,b) \wedge q$ *dla dowolnego morfizmu* $f : \underline{A} \to \underline{B}$[41]
H-obiekt $\underline{A}$ należy do podkategorii $q_\downarrow$-obiektów, gdy $R_q(\underline{A}) = \underline{A}$

„Wszystko" co w H-obiekcie $\underline{A}$ miało miarę $\geqslant q$ - równość, punkt, obiekt - ma po redukcji - w $q_\downarrow$- obiekcie $R_q(\underline{A}$ miarę $\top$: element lokalny staje się globalny a obiekt niezamieszkały może stać się zamieszkały. I *vice versa*.

Pojęcie „globalności" jest „kontekstowe" a nie uniwersalne.

Funktory-redukcje to szczególny przykład funktorów-mutacji (morfizmów geometrycznych) którymi zajmiemy się wkrótce.

Na koniec powróćmy do początku, czyli do dyskusji o kwantyfikacji w zbiorze pustym - obiekcie początkowym. Miara istnienia H-obiektu początkowego $\underline{0}$ (w którym wszystkie punkty są nieistniejące) jest równa $false$, podczas gdy $\forall_1 \underline{0} = true$. Tak jak w **Set**. Ale teraz jest to skutek toposowej definicji kwantyfikacji a nie „zdroworozsądkowej" analizy fraz „dla każdego" i „istnieje"[42].

Nieco odbiegając od głównego wątku: te obserwacje każą też inaczej patrzeć na skolemowską *metodę eliminacji kwantyfikatora istnienia*, która pozwala wyeliminować z dowolnej teorii T zdanie-aksjomat postaci $\exists \phi(x)$ wprowadzając w zamian do języka stałą c_ϕ - bez ryzyka utraty niesprzeczności teorii T - *„skoro element istnieje, to go nazwijmy"*.
Takie postępowanie jest nieuprawnione gdy semantykę języka definiujemy w innym toposie - jeśli semantyką stałej ma być element globalny[43].

A wszystko to jest konsekwencją faktu, że kwantyfikacja to operacje na podobiektach (a nie, jak nam się czasem zdaje, matematyzacja transcedentnych pojęć „istnienie" i „ogół").

Dodatek: pusty topos?
Zadowoleni, że udało się wykazać „przewagę kategoryjnego myślenia nad teoriomnogościowym", możemy odpowiedzieć na podobne pytania (które rzadko sobie zadajemy, ale na które trzeba umieć odpowiedzieć):

1. Czy istnieje pusta kategoria? Tak.
2. Czy istnieje pusty topos? Nie. Topos musi mieć skończone produkty, a więc w szczególności musi w nim być obiekt końcowy.
3. Czy jednoobiektowa kategoria (z jedynym morfizmem identycznościowym) jest toposem? Tak. Chociażby dlatego (choć nie jest to jedyne uzasadnienie), że topos presnopów na pustej kategorii

[41] Równoważnie: dla dowolnego H-obiektu $\underline{A}$, $R_q(\underline{A})$ jest wyznaczone przez pullback

$$\begin{tikzcd} \underline{A} \arrow[r] & \underline{1} \\ R_q(\underline{A}) \arrow[r] \arrow[u, tail] & \underline{1}_q \arrow[u, tail] \end{tikzcd}$$

[42] Zbiór pusty to jedyny obiekt w toposie zbiorów którego miara istnienia jest różna od *true*.

[43] Warto przy okazji wspomnieć, że istnieje też „konstruktywna wersja" metody Skolema: jeśli zdanie ARYTMETYCZNE $\forall_x \exists_y \psi(x,y)$ jest dowodliwe w arytmetyce intuicjonistycznej, to istnieje obliczalna funkcja f taka, że zdanie $\psi(\underline{n}, \underline{f(n)})$ jest dowodliwe w HA.

jest właśnie taką kategorią. Ten jedyny obiekt jest jednocześnie klasyfikatorem podobiektów (i obiektem początkowym). W logice tego toposa *true* = *false* - ta logika jest „jednowartościowa”.
4. Czy jednoelementowy topos jest toposem H-obiektów dla pewnej zupełnej algebry Heytinga? Tak: jest to jednoelementowa algebra Heytinga (takowa istnieje).
5. Pytanie przedwczesne: jak wygląda zdaniowa teoria geometryczna dla której jednoelementowy topos jest toposem klasyfikującym? Na to pytanie odpowiemy, gdy będziemy je rozumieli... .

3.2.4 H-obiekty liczbowe

Obiekt liczb naturalnych (str. 34) w toposie H-obiektów to H-zbiór $\Delta(\mathbf{N})$ - obraz teoriomnogościowego zbioru liczb naturalnych poprzez zanurzenie $\Delta : \mathbf{Set} \to \widehat{H}$.

Teoriomnogościowe liczby naturalne to punkty globalne $\Delta(\mathbf{N})$[44]. „Zwykłe” liczb naturalne *generują* $\Delta(\mathbf{N})$ w tym sensie, że wszelkie pozostałe elementy są sumami (sklejeniami) ich obcięć.

Czy to oznacza, że obiekt liczb naturalnych w istocie jest pojęciem teoriomnogościowym? Definicyjna własność NNO - rekurencyjne konstruowanie morfizmu $\phi_{(a,h)} \colon \Delta(\mathbf{N}) \to \underline{A}$ - znajduje zastosowanie tylko wtedy, gdy H-obiekt $\underline{A}$ jest globalnie zamieszkały[45]. I nawet wtedy ta konstrukcja sprowadza się do teoriomnogościowej konstrukcji ciągu rekurencyjnego zdeterminowanego przez a i funkcję $h_{ge} : GE(\underline{A}) \to GE(\underline{A})$ działającą na zbiorze elementów globalnych $\underline{A}$ (wyznaczoną przez morfizm $h \colon \underline{A} \to \underline{A}$). *Nihil novi sub sole.*

Podobne rozczarowanie nas czeka, gdy - mając w głowie teoriomnogościowy wzorzec - zechcemy pokazać, że H-obiekt jest skończony (w sensie Dedekinda - str. 35), gdy jest izomorficzny z podobiektem $\Delta(\mathbf{N})$ generowanym przez liczby-punkty globalne $0, 1, \ldots, n-1$ (dla dowolnie wybranej liczby n): gdyby tak było, to jedynym niezamieszkałym globalnie i skończonym H-obiektem byłby obiekt początkowy. „Myśląc dychotomicznie” musielibyśmy uznać, że każdy inny obiekt bez elementów globalnych jest nieskończony. To trochę chore.
Związek „skończoności” z obiektem liczb naturalnych w toposach H-obiektów trochę nam się zamazał... . Możemy jednak zaproponować odmienną definicję skończoności H-obiektu:

H-obiekt jest skończony, gdy można wskazać taki skończony zbiór jego elementów (globalnych i/lub lokalnych), że każdy inny element otrzymamy z tych wyróżnionych za pomocą operacji obcinania i sklejania.

> To nie masło maślane: jak już ustaliliśmy w każdej teorii matematycznej mamy prawo posługiwać się pojęciami „zewnętrznymi” (str.35). Różnica między klasyczną ur-teorią - ZFC - a pretendującą do tej roli teorią toposów polega m.in. na tym, że „skończoność” jest pojęciem wewnętrznym w pierwszej,a zewnętrznym w drugiej.
> Konkluzja, że jest to argument na rzecz uznania „nadrzędności” teorii mnogości jest nieporozumieniem.

Ktoś powie, że to raczej definicja obiektu skończenie generowanego, a nie skończonego. Ale to nie tak. Zaproponowana definicja skończonych H-obiektów odwołuje się wprost do klasycznej definicji *Kuratowski subfinite set* - jednej z piątki definicji skończoności równoważnych - w ZFC! - z definicją dedekindowską. Ta definicja orzeka, że: *„zbiór jest skończony, gdy jest epimorficznym obrazem zbioru, który jest podzbiorem zbioru* $\{0, 1, \ldots, n-1\}$”.
My powiedzieliśmy: *„H-obiekt jest skończony, gdy jest epimorficznym obrazem pewnego podobiektu H-zbioru postaci* $\Delta(\{0, 1 \ldots, n-1\})$”. Taka definicja skończoności współgra pięknie ze strukturą toposa H-obiektów gdyż, jak wiemy, *„każdy H-obiekt jest epimorficznym obrazem pewnego podobiektu pewnego H-zbioru”* (str.44). W ten sposób odzyskujemy pożądany związek między skończonością a obiektem liczb naturalnych... .
Na koniec: jeśli tak rozumiany skończony H-obiekt jest *rozstrzygalny*, to jest też skończony „w sensie Dedekinda”[39]. A co to znaczy, że H-obiekt jest rozstrzygalny - powiemy wkrótce.

---

[44] Ale elementów globalnych może być więcej (co zauważyliśmy mówiąc o obiekcie liczb naturalnych w toposie $\mathbf{2}^2$-obiektów).
[45] a ma być elementem globalnym $\underline{A}$

Zbiory liczb całkowitych i wymiernych konstruujemy w **Set** w oparciu o zbiór liczb naturalnych korzystając ze skończonych granic i kogranic. Te konstrukcje można powtórzyć w dowolnym toposie H-obiektów biorąc za punkt wyjścia H-obiekt $\Delta(\mathbf{N})$. Łatwo pokazać, że rezultatem takiego działania są H-obiekty $\Delta(Z)$ i $\Delta(Q)$. Dlatego te obiekty zostały uznane odpowiednio za „obiekt liczb całkowitych (wymiernych)" w toposie $\widehat{H}$.

Ale tak nie jest w przypadku zbioru liczb rzeczywistych. Dlaczego?
Konstruując teoriomnogościowe continuum Dedekind przypisał kluczową rolę podziałom zbioru liczb wymiernych: liczby rzeczywiste to pary podzbiorów zbioru Q spełniające określone warunki[46]. Gdy zaakceptujemy ten paradygmat i zechcemy utożsamić liczbę rzeczywistą z dedekindowskim podziałem - odpowiednią parą podobiektów $\Delta(Q)$ - to musimy uwzględnić, że H-obiekt $\Delta(Q)$ ma więcej podobiektów niż zbiór Q podzbiorów[47]. Można się więc spodziewać (obawiać), że „dedekindowskich podziałów H-obiektu $\Delta(Q)$" jest więcej niż „dedekindowskich podziałów zbioru Q".

Dlatego dedekindowskim obiektem liczb rzeczywistych w toposach H-obiektów - NIE JEST H-zbiór $\Delta(\mathcal{R})$.
Dedekindowski obiekt liczb rzeczywistych istnieje w każdym toposie z NNO [22]. Darujemy sobie analizę skomplikowanej konstrukcji takiego obiektu w dowolnym toposie. Zajmiemy się tylko relatywnie prostym przypadkiem. Otóż w [22] znajdziemy eleganckie twierdzenie:

„obiekt liczb rzeczywistych w toposie $\mathcal{T}$-snopów to snop ciagłych funkcji rzeczywistych działających na przestrzeni $(X, \mathcal{T})$" - niezależnie od tego, jaką przestrzeń topologiczną wybierzemy.

To zaskakujące: co wspólnego mają te funkcje z dedekindowskimi podziałami $\mathcal{T}$-obiektu $\Delta(Q)$? Odkrycie tej zależności to klucz do zrozumienia twierdzenia.

„Liczba wymierna p ogranicza z dołu funkcję ciągłą $f\colon X \to \mathcal{R}$ gdy $p < f(x)$ dla dowolnego punktu x przestrzeni $(X, \mathcal{T})$". Podobnie rozumiemy stwierdzenie *„p ogranicza f z góry".*

|| Liczba p ogranicza albo nie ogranicza z dołu (z góry) funkcję f. To myślenie dychotomiczne.

W toposie $\mathcal{T}$-obiektów można myśleć bardziej subtelnie: można uznać, że KAŻDA liczba wymierna p jest LOKALNYM *ograniczeniem* z dołu funkcji ciągłej f, a miarą tego ograniczenia jest otwarty zbiór $l_f(p) = \{x \in X : p < f(x)\}$.

W ten sposób zdefiniujemy funkcję $l_f\colon Q \to \mathcal{T}$ czyli ... pewien podobiekt $\Delta(Q)$ [48].
Drugi podobiekt $u_f\colon Q \to \mathcal{T}$ definiujemy analogicznie: $u_f(p) = \{x \in X : f(x) < p\}$.

Para podobiektów (l_f, u_f) to dedekindowski przekrój $\Delta(Q)$ [49].
Aby to zdanie miało status twierdzenia matematycznego, powinniśmy sformułować warunki definiujące przekrój obiektu $\Delta(Q)$, a potem pokazać, że para (l_f, u_f) je spełnia.
Te warunki są „takie same" jak warunki definiujące przekrój zbioru liczb wymiernych. Zapisane tak, by można je było interpretować w toposie $\mathcal{T}$-obiektów.

Przykład: wymóg niepustości podobiektów (l, u) tworzących przekrój zapiszemy tak: $(\exists_x l(x) = \top) \wedge (\exists_x u(x) = \top)$. W toposie $\mathcal{T}$-obiektów $\exists_x l(x) = \top$ dokładnie wtedy, gdy $sup(l(p) \colon p \in Q) = \top$. Ale to NIE OZNACZA, *że podobiekt l ma element globalny! l_f spełnia ten warunek, gdy istnieje pokrycie przestrzeni X takimi zbiorami otwartymi $(U_i \colon i \in I)$, że funkcje-obcięcia $f_{|U_i}\colon U_i \to \mathcal{R}$ - są ograniczone z dołu. A to wynika wprost z ciągłości funkcji f.*

Analogicznie udowodnimy niepustość podobiektu u_f.

---

[46]Krótko i mało precyzyjnie: dedekindowska liczba rzeczywista jest utożsamiana z dwoma zbiorami: liczb wymiernych od niej mniejszych i liczb wymiernych od niej większych. Dedekindowską konstrukcję zbioru liczb rzeczywistych przypomniałem krótko w „Części 1".

[47]Każda funkcja $f\colon Q \to HH$ jest charakterystyką pewnego podobiektu $\Delta(Q)$, natomiast funkcje charakterystyczne podzbiorów Q są postaci $f\colon Q \to \{\perp < \top\}$.

[48]Jak zwykle utożsamiamy podobiekt z jego charakterystyką.

[49]Gdy f jest funkcją stałą - $f(x) = r$ dla dowolnego punktu $x \in X$ - to podział wyznaczony przez f jest klasycznym dedekindowskim podziałem zbioru Q.

Ponieważ unikamy nadmiaru formalizmu, to pominiemy sformułowanie pozostałych warunków definiujących dedekindowskie przekroje $\Delta(Q)$ i dowody ich spełniania przez parę (l_f, u_f)[50]. Zatem:

dla dowolnej funkcji ciągłej $f\colon X \to \mathcal{R}$ *para* (l_f, u_f) *jest dedekindowskim przekrojem* $\Delta(Q)$ *- jest liczbą rzeczywistą.*

A potem odwracamy rozumowanie: kojarzymy z dowolnym dedekindowskim przekrojem pewną ciągłą funkcję rzeczywistą. Na koniec pokazujemy, że przyporządkowanie *„dedekindowski przekrój* $\Delta(Q) \quad \rightsquigarrow$ *ciągła funkcja rzeczywista"* jest w tym toposie wzajemnie jednoznaczne.
Poprzestaniemy na tej krótkiej wskazówce-sugestii i pominiemy szczegóły[51]. Jak zwykle, zainteresowanych odsyłam do [22].

To elegancki wynik. Ale czy rozwiewa wszelkie wątpliwości? Zachowaliśmy wypracowany w teorii mnogości paradygmat - liczba rzeczywista to dedekindowski podział obiektu liczb wymiernych. Korzystając z możliwości sformułowania warunków definiujących podział w języku interpretowalnym w toposach z NNO nadaliśmy temu paradygmatowi wymiar uniwersalny.

Czy słusznie? Może należy go odrzucić i - na przykład - definiować obiekt liczb rzeczywistych korzystając z definicji Cauchy'ego? Takie próby czyniono. Ale wiem o nich zbyt mało by je, choćby powierzchownie, omawiać[52]. Ograniczę się do cytatu z (rzetelnej) strony internetowej: *„There is also possible to define the notion of a Cauchy real number object and construct one in any* Π*-pretopos with an NNO, but as the internal logic in general lacks weak countable choice, these are usually inequivalent."*[53]. Π-pretoposy to klasa kategorii obszerniejsza niż toposy. Istotne jest to, że te dwie metody konstrukcji obiektów liczb rzeczywistych choć „teoriomnogościowo równoważne" dają w innych toposach odmienne rezultaty.
Można też wywiesić białą flagę - przyjąć, że H-obiekt liczb rzeczywistych to $\Delta(\mathcal{R})$, czyli przyznać, że wszystkie obiekty liczbowe mają w istocie nie tylko teoriomnogościowy rodowód, ale też naturę.

O jeszcze jednej możliwości powiemy wkrótce. Ale wcześniej musimy poznać *teorie geometryczne.*

Dodajmy na koniec: jeśli odpowiednio dobierzemy topos z NNO, to spełnimy postulat Brouwera - wskażemy topos z obiektem liczb rzeczywistych $\mathcal{R}$ takim, że wszystkie morfizmy z $\mathcal{R}$ do $\mathcal{R}$ są ciągłe! [22]. Może kiedyś spróbuję coś o tym napisać... .

3.3 Morfizmy geometryczne

Toposy to kategorie. Związki między kategoriami opisują funktory. Ale interesują nas tylko te spośród nich, które w pewien sposób odnoszą się do tego, co w toposach istotne.

> Podstawowe pojęcia teorii toposów H-obiektów to miary równości i istnienia. Wskazanie skali wartości dla tych miar - zupełnej algebry Heytinga H - determinuje strukturę i wewnętrzną logikę związanego z nią toposa. Różnym wyborom skal wartości tych miar odpowiadają różne toposy. Jest więc oczywiste, że interesują nas te funktory między toposami H-obiektów, które można opisać „w języku miar równości i istnienia".

Przełóżmy ten postulat na język matematyki: przyjmijmy, że związki między różnymi skalami - zupełnymi algebrami Heytinga H i H_1 - opisują funkcje $m\colon H \to H_1$ które zachowują skończone koniunkcje i dowolne (skończone i nieskończone) alternatywy: $m(p \wedge q) = m(p) \wedge m(q)$, $m(sup(p_i : i \in I)) = sup(m(p_i) : i \in I)$[54]. Takie funkcje nazywam tu f-morfizmami.

[50]Kompletną definicję przekroju znajdziemy w [22], str.321. *„Any mathematical structure whose (...) definition is formulated within set theory can be formulated internally to any category that admits all those types of operations (...) on its objects" - https://ncatlab.org/nlab/show/internalization.*

[51]Np. ten szczegół, że w $\Delta(Q)$ są też elementy lokalne - obcięcia elementów globalnych do otwartych podzbiorów $(X, \mathcal{T})$. Trzeba to uwzględnić konstruując obiekt liczb rzeczywistych.

[52]Analizę różnych definicji obiektu liczb rzeczywistych znajdziemy w pracy L.N.Stouta *Topological properties of the real numbers object in a topos (Cah.de top.et geom.diff.categoriques, t.17, no 3 (1976), p. 295-326.)*

[53]*https://ncatlab.org/nlab/show/real+numbers+object.*

[54]W szczególności $m(\top) = \top), m(\perp) = \perp$. Przykład fundamentalny: każda funkcja ciągła $h : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$

Interesują nas funktory wyznaczone przez f-morfizmy.

Zacznijmy od prostego, ale fundamentalnego twierdzenia:

„każdy f-morfizm $m\colon H \to H_1$ generuje funktor $m^*\colon \hat{H} \to \hat{H}_1$ definiowany tak:

$$m^*(A, \approx) = (A, m\cdot \approx\colon A^2 \to H \overset{m}{\to} H_1),$$
$$m^*(h\colon A \times B \to H) = m \cdot h\colon A \times B \to H \overset{m}{\to} H_1\ .$$

> Weryfikując poprawność definicji funktora m^* zrozumiemy, dlaczego tak a nie inaczej zdefiniowano f-morfizmy między zupełnymi algebrami Heytinga: formułując warunki definiujące obiekty i morfizmy w toposach H-obiektów wykorzystujemy tylko operacje geometryczne - skończone koniunkcje i dowolne alternatywy. Zagwarantowanie zachowywania tych operacji przez f-morfizm m pozwala związać z nim w naturalny sposób funktor m^*.

Funktor m^* to mutacja (wyznaczona przez f-morfizm m)[55]. Zdefiniowane wcześniej redukcje (str.51) $R_q\colon \widehat{H} \to \widehat{q_\downarrow}$ to mutacje.

Z f-morfizmem m można też związać działający w przeciwnym kierunku funktor $m_*\colon \widehat{H_1} \to \widehat{H}$ ale... nie jest on dla nas teraz specjalnie interesujący. Wspominam o nim tylko dlatego, że para funktorów (m^*, m_*) to *morfizm geometryczny* z toposa H_1-obiektów do toposa H-obiektów:

„If E and F are toposes, a geometric morphism $f\colon F \to E$ consists of an pair of adjoint functors $f^*\colon E \to F$, $f_*\colon F \to E$ such that the left adjoint f^* preserves finite limits”.

Matematyczny koszmar. Nie zamierzam jednak nikogo torturować analizą tej definicji[56]. A to dlatego, że:

każdy morfizm geometryczny między toposami H-obiektów to para (m^*, m_*) wyznaczona przez pewien f-morfizm m.

Ale dlaczego morfizm geometryczny (m^*, m_*) działa w „kierunku przeciwnym” do kierunku f-morfizmu m?

Odpowiedź na to pytanie jest bardziej historyczna niż matematyczna. Pierwsze toposy jakie pojawiły się w matematyce powiązane były z przestrzeniami topologicznymi.

„A topos is a generalized space” - Grothendieck.

Nic więc dziwnego, że definiując morfizmy między toposami snopów nad przestrzeniami $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{T}_1)$ kojarzono je z funkcjami ciagłymi z $(X, \mathcal{T})$ do $(Y, \mathcal{T}_1)$. Wiążąc z funkcją ciągłą $h\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ f-morfizm $h^{-1}: \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}$ zmieniamy kierunek po raz pierwszy. Tworząc morfizm geometryczny $((h^{-1})^*, (h^{-1})_*)$ między toposami snopów zmieniamy kierunek po raz drugi. W rezultacie otrzymujemy morfizm działający „w tym samym kierunku” co funkcja h. I o to szło.

Zupełne algebry Heytinga i f-morfizmy - nasza podstawa konstrukcji toposów H-obiektów - to późniejszy wynalazek. Jeśli chcemy zachować „zgodność z wizją Grothendiecka”, to odwrócenie kierunku morfizmów geometrycznych generowanych przez f-morfizmy jest konieczne.

> Dzielenie włosa na czworo? Przecież „odwrócenie kierunku morfizmów” zawsze jest możliwe, bo to tylko zastąpienie kategorii jej kategorią dualną. Ale zastanawiające jest to, że pojęcie „kategorii dualnej”, wprowadzające pewną symetrię w świecie kategorii, jest tak mało zgodne z doświadczeniem matematycznym: niełatwo wskazać parę $(\mathbf{C}, \mathbf{C}^{op})$ by obie kategorie matematycy postrzegali jako równie „naturalne”, zajmujące jednakowo ważne miejsce w ich wizji matematyki.
> Ale może się mylę... .

---

wyznacza f-morfizm między algebrami Heytinga zbiorów otwartych tych przestrzeni - przyporządkowanie $B \in \mathcal{T}_1 \rightsquigarrow h^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

[55]Proszę nie szukać terminu „funktor-mutacja” w literaturze przedmiotu i w internecie. Wprowadziłem go wyłącznie „na własny użytek”.

[56]Wierzę, że zasłużyłem w ten sposób na wdzięczność czytających te słowa... .

3.4 Teorie geometryczne

- Mutacje zachowują skończone produkty (w szczególności - obiekt końcowy): $m^*(\underline{A} \times \underline{B}) = m^*(\underline{A}) \times m^*(\underline{B})$, $m^*(\underline{1}) = \underline{1}$.
- Mutacje zachowują podobiekty: jeśli funkcja $\alpha \colon \underline{A} \to H$ *jest charakterystyką podobiektu* $\underline{A}$ *, to* $m^*(\alpha) = m \cdot \alpha \colon \underline{A} \to H_1$ *jest charakterystyką podobiektu* $m^*(\underline{A})$.

Dlatego *„funktory-mutacje zachowują modele języków pierwszorzędowych":*

jeśli H-obiekt $\underline{A}$ *wraz z morfizmami* $(q_i \colon A^{n_i} \to A : i = 1, 2, \ldots, n), (r_j \colon A^{m_j} \to H : i = 1, 2, \ldots, m)$ *jest modelem (interpretacją) języka pierwszego rzędu dowolnie wybranej sygnatury* Σ *w toposie H-obiektów, to jego „mutacja" - obiekt* $m^*(\underline{A})$ *z morfizmami* $(m^*(q_i) : i = 1, 2, \ldots, n), (m^*(r_j) \colon i = 1, 2, \ldots, m)$ *- jest modelem tego samego języka w toposie* H_1*-obiektów.*

Jednak funktory-mutacje NIE ZACHOWUJĄ modeli wszelkich teorii pierwszorzędowych - nie dla każdej takiej teorii T i jej modelu $\underline{M} = (\underline{A}, (q_i), (r_j))$ w toposie H-obiektów, mutacja $m^*(\underline{M}) = (m^*(\underline{A}), (m^*(q_i)), (m^*(r_j)))$ jest modelem T w toposie H_1-obiektów.

Teorie, których modele są zachowywane przez funktory-mutacje to teorie geometryczne.

Koniunkcję, alterntywę i kwantyfikację egzystencjalną w algebrach podobiektów nazwaliśmy operacjami geometrycznymi. „Po stronie syntaktycznej", wyróżnimy *formuły geometryczne* - formuły języka pierwszego rzędu zbudowane z formuł atomowych tylko za pomocą koniunkcji, alternatywy i kwantyfikatora egzystencjalnego.
Powód wyróżnienia takich formuł jest prosty: dla dowolnego f-morfizmu $m \colon H \to H_1$,

jeśli semantyką formuły geometrycznej $\phi(\bar{x})$ *w modelu* $\underline{M}$ *w toposie H-obiektów jest podobiekt o charakterystyce* $[\phi(\bar{x})] \colon \underline{A}^n \to H$*, to semantyką tej formuły w modelu* $m^*(\underline{M})$ *jest podobiekt o charakterystyce* $m \cdot [\phi(\bar{x})]$ [57].

> *„Teorie geometryczne zajmują się relacją konsekwencji ograniczoną do formuł geometrycznych."*

To oznacza, że:

aksjomaty teorii geometrycznej to stwierdzenia postaci „własność opisana przez formułę geometryczną $\psi(\bar{x})$ *jest konsekwencją własności opisanej przez formułę geometryczną* $\phi(\bar{x})$*".*

„Po stronie syntaktycznej" takie aksjomaty zapisujemy jako *sekwenty* - napisy postaci $\phi(\bar{x}) \vdash \psi(\bar{x})$ - które nazywam tu *nierównościami geometrycznymi.*

Model $\underline{M} = (\underline{A}, (q_i), (r_j))$ jest modelem teorii geometrycznej T jeżeli $[\phi(\bar{x})] \leqslant [\psi(\bar{x})]$ dla każdego jej aksjomatu $\phi(\bar{x}) \vdash \psi(\bar{x})$ - „nierówność geometryczna $\phi(\bar{x}) \vdash \psi(\bar{x})$ jest w tym modelu prawdziwa".
Wprost z tych ustaleń wynika, że:

jeśli $\underline{M}$ *jest modelem teorii geometrycznej* T*, a* $m \colon H \to H_1$ *jest f-morfizmem, to* $m^*(\underline{M})$ *jest również modelem teorii* T[58].

> Wprowadzenie nierówności geometrycznych do języka opisu teorii geometrycznych nie jest konieczne bo $[\phi(\bar{x})] \leqslant [\psi(\bar{x})]$ w dowolnym modelu dokładnie wtedy, gdy $[\forall_{\bar{x}}(\phi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))] = \top$ (str. 45).Ale jest przydatne, bo w przeciwnym wypadku trzeba by dopuścić „wyjątkowe" użycie niegeometrycznych operacji - implikacji i kwantyfikatora uniwersalnego (*„on a top level"* - jak się czasem pisze w literaturze)[59].

Sformułujmy twierdzenie, które teraz na dłuższy czas zajmie naszą uwagę:

„Każda teoria geometryczna ma model uniwersalny"

co naukowo i precyzyjnie formułuje się tak:

---

[57] Tu i dalej $\bar{x}$ to skrót: $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.
[58] f-morfizm jest funkcją monotoniczną - jeśli $p \leqslant q$ to $m(p) \leqslant m(q)$. Tym samym jeśli $[\phi(\bar{x})] \leqslant [\psi(\bar{x})]$ to $[m \cdot \phi(\bar{x})] \leqslant m \cdot [\psi(\bar{x})]$.
[59] Dodajmy, że wprowadzenie nierówności geometrycznych umożliwia też budowę sekwencyjnych systemów dowodzenia dla teorii geometrycznych, które nie angażują niegeometrycznych konstruktorów formuł [48].

„for every geometric theory T, there exists a Grothendieck topos $\mathcal{B}(T)$ (...) called the classifying topos of T, containing a model $G(T)$ of T which is generic in the sense that, for any Grothendieck topos $\mathcal{F}$, the functor(...) which sends a geometric morphism $F\colon \mathcal{F} \to \mathcal{B}(T)$ to the T-model $F^*(G_T)$, is an equivalence of categories."

Tłumacząc (ale nie dosłownie) na język polski:

- *„z każda teorią geometryczną T związany jest topos klasyfikujący $\mathcal{B}(T)$ a w nim model G_T, który jest generyczny w tym sensie, że wszelkie inne modele w toposach Grothendiecka można z niego „odtworzyć" za pomocą morfizmów geometrycznych"*[60]

Istnienie modelu generycznego pozwala ograniczyć poszukiwanie nierówności geometrycznych prawdziwych we wszystkich modelach teorii geometrycznej do wskazania tych nierówności, które są prawdziwe w tym szczególnym modelu.

Szukając odpowiednika tego twierdzenia w klasycznej teorii modeli można przywołać pojęcie algebry wolnej w klasie modeli teorii równościowej - teorii opisanej w języku bez symboli relacyjnych, której aksjomatami są równości - zdania postaci $\forall_{\bar{x}}(t(\bar{x}) = t_1(\bar{x}))$[61]*. Krótko: dla dowolnej teorii równościowej T i przeliczalnego nieskończonego zbioru X można skonstruować - w* **Set** *- algebrę $Free_T(X)$, która jest modelem T i jest „generyczna" w tym sensie, że dowolna równość prawdziwa w $Free_T(X)$ jest też prawdziwa w każdej algebrze-teoriomnogościowym modelu T.*

Teorie równościowe to teorie geometryczne. Można by nazwać wolne algebry „modelami generycznymi" teorii równościowych gdyby nie to, że są one uniwersalne (w opisanym sensie) tylko w odniesieniu do modeli w toposie **Set**. A modele generyczne są - z definicji - uniwersalne w klasie wszystkich modeli rozważanej teorii geometrycznej budowanych w dowolnym toposie Grothendiecka (wśród których są „nasze" toposy H-obiektów).

Oderwanie modelowania teorii od teoriomnogościowego uniwersum zawdzięczamy (głównie) Wiliamowi Lawvere. W 1963 roku, w swej pracy doktorskiej spojrzał on na teorie równościowe i ich modele „okiem kategorysty". Pokazał, że z każdą teorią równościową T można związać taką kategorię $\mathbf{C}(T)$, że w kategorii dualnej $\mathbf{C}(T)^{op}$ wszystkie obiekty są skończonymi potęgami (produktami) pojedynczego obiektu. Wówczas teoriomnogościowe modele teorii T można utożsamić z funktorami $F\colon \mathbf{C}(T)^{op} \to \mathbf{Set}$, które zachowują skończone produkty[62].

Mniejsza o szczegóły: ważne jest to, że postrzeganie teorii równościowych jako kategorii a ich modeli jako funktorów w naturalny sposób prowadzi do zdefiniowania i rozważania modeli teorii równościowej w dowolnej kategorii $\mathbf{D}$ w której istnieją skończone produkty: model teorii T w $\mathbf{D}$ to każdy funktor $F\colon \mathbf{C}(T)^{op} \to \mathbf{D}$ zachowujący skończone produkty.

W skrajnym przypadku można mówić o modelach T w kategorii ... $\mathbf{C}(T)^{op}$, wśród których jest funktor identycznościowy $Id : \mathbf{C}(T)^{op} \to \mathbf{C}(T)^{op}$. Jest on *generyczny* w tym sensie, że każdy model-funktor $G : \mathbf{C}(T)^{op} \to \mathbf{D}$ „faktoryzuje się przez Id" - $G = G \cdot Id$. Dlatego dowolna równość $\forall_{\bar{x}}(t_1 = t_2)$ jest prawdziwa w każdym modelu teorii T w dowolnej kategorii $\mathbf{D}$ dokładnie wtedy, gdy jest prawdziwa w modelu Id.

Wyniki Lawvere'a ustanowiły schemat poznawczy kategoryjnej teorii modeli.

Teorie	$\leftrightarrow$	*Kategorie*
Modele	$\leftrightarrow$	*Funktory*

Opisując klasę teorii wyróżnioną przez kształt ich aksjomatów - np. teorie równościowe - dążymy do związania z nimi kategorii wyróżnionych przez pewne własności strukturalne - np. kategorie ze skończonymi

[60] Słowo „generyczny" w słowniku PWN określa się jako „przestarzałe" i objaśnia tak: *„właściwy całemu rodzajowi, gatunkowi, grupie przedmiotów"*. Coś w tym jest. Inne propozycje tłumaczenia to *rdzenny, rodowy, ogólny*. Można też użyć słowa wytrychu- „uniwersalny" Nie znam powszechnie akceptowanego przez matematyków, polskiego odpowiednika tego angielskiego (i nie wierzę, że taki istnieje)".

[61] Modele takich teorii nazywamy algebrami.

[62] $F(A \times B) = F(A) \times F(B)$. Te wyniki Lawvere'a można uznać za początek *kategoryjnej algebry*.

> produktami generowane przez pojedynczy obiekt.
> Modelami teorii są wtedy funktory zachowujące te wyróżniające własności strukturalne.
> W przypadku teorii geometrycznych są to toposy Grothendiecka i morfizmy geometryczne[63].

3.4.1 Zdaniowe teorie geometryczne

Przedstawienie choćby zarysu twierdzenia o istnieniu toposów klasyfikujących dla teorii geometrycznych w sposób tu przyjęty (czyli skrajnie uproszczony) wydaje mi się niemożliwe. Dość powiedzieć, że zrozumienie przedstawionej w [22] konstrukcji takiego toposa wymaga lektury kilkudziesięciu naprawdę trudnych stron (końcowych, a nie początkowych!) tej monografii.
Nie wyklucza to jednak możliwości zrozumienia jej istoty. Warto zacząć od poznania konstrukcji toposów klasyfikujących dla zdecydowanie prostszych *zdaniowych teorii geometrycznych*.

Zaczniemy od drobnej korekty przyjętej tu definicji języka pierwszego rzędu: uznajmy, że w sygnaturze języka mogą znaleźć się też 0-argumentowe symbole relacyjne, zwane tu *zmiennymi zdaniowymi*.

> Mała dygresja: nieobecność 0-argumentowych symboli relacyjnych w teoriomnogościowej teorii modeli można tłumaczyć tym, że logika **Set** jest dwuwartościowa. Obecność 0-argumentowych relacji w języku opisu teorii można „symulować” przyjmując - na przykład - że $\top$ to zdanie $\forall_(x = x)$ a $\perp$ to negacja tego zdania.
> Taka symulacja jest jednak niemożliwa, gdy logika rozważanego toposa jest wielowartościowa.

0-argumentowe symbole relacyjne nazywam tu *zmiennymi zdaniowymi*[64]. Sygnatura, która zawiera wyłącznie zmienne zdaniowe, to *sygnatura zdaniowa*. *Zdaniowe teorie geometryczne* to teorie geometryczne opisane w językach sygnatur zdaniowych[65].

Semantyką zmiennych zdaniowych w dowolnym toposie są podobiekty obiektu końcowego, czyli wartości logiczne wewnętrznej logiki tego toposa[66]. Stąd model *pustej zdaniowej teorii geometrycznej sygnatury* Σ_0 - teorii z pustym zbiorem aksjomatów - w toposie $\mathcal{E}$, to po prostu dowolna funkcja $i\colon \Sigma_0 \to H(\mathcal{E})$, gdzie $H(\mathcal{E})$ to algebra wartości logicznych tego toposa.
Spróbujemy pokazać, że:

„topos klasyfikujący pustej zdaniowej teorii geometrycznej SKOŃCZONEJ *sygnatury Σ_0 to topos $H(\Sigma_0)$-obiektów dla pewnej skończonej (czyli zupełnej) algebry Heytinga $H(\Sigma_0)$.”*

Elementami algebry $H(\Sigma_0)$ są napisy - zredukowane alternatywy zredukowanych koniunkcji zmiennych zdaniowych - elementów zbioru Σ_0. Operacje geometryczne - koniunkcję i alternatywę - w zbiorze $H(\Sigma_0)$ definiujemy „w naturalny sposób”. Np. koniunkcja alternatyw $(a_1 \vee a_2) \wedge (a_2 \vee a_3)$ to alternatywa $(a_1 \wedge a_2) \vee (a_1 \wedge a_3) \vee (a_2 \wedge a_3)$ [67].

Oznaczmy przez $\eta\colon \Sigma_0 \to H(\Sigma_0)$ funkcję przyporządkowującą zmiennym zdaniowym jednoele-

[63] *Mam do koncepcji Lawvere'a stosunek szczególny. 10 lat po jej upubliczenieniu (czas wtedy nie pędził tak jak dziś..) jako debiutujący asystent referowałem wyniki Lawvere'a na seminarium. Nie mogę powiedzieć że mój referat wzbudził entuzjazm czy też „spotkał się ze zrozumieniem” słuchaczy. Wręcz odwrotnie. A nawet gorzej: z dzisiejszej perspektywy muszę przyznać, że referent też nie do końca rozumiał o czym mówi. Ale entuzjazmu mu nie brakowało.*

[64] Uwaga: nie traktujmy zmiennych zdaniowych jako szczególnych zmiennych przedmiotowych! To zupełnie inna bajka.

[65] W szczególności oznacza to, że w opisie teorii zdaniowych nie korzystamy ze zmiennych przedmiotowych i z kwantyfikatorów. Zdaniowe teorie nazywa się też *teoriami rzędu 0*.

[66] Semantyka n-argumentowego symbolu relacyjnego w modelu posadowionym na obiekcie A jest podobiekt A^n. Zerowa potęga obiektu to obiekt końcowy.

[67] Pomijam tu szereg detali technicznych ukrytych pod terminem „zredukowane”. W zredukowanych koniunkcjach żadna zmienna zdaniowa nie występuje wielokrotnie a koniunkcje-składniki zredukowanej alternatywy są „parami nieporównywalne” - nie może się zdarzyć, że wszystkie zmienne zdaniowe występujące w pewnej koniunkcji występują jednocześnie wspólnie w innej koniunkcji tejże alternatywy. Naukowo: $H(\Sigma_0)$ to *wolna krata dystrybutywna* generowana przez Σ_0 *(https://en.wikipedia.org/wiki/Distributive lattice)*. Zauważmy, że to właśnie dystrybutywność (rozdzielczość) koniunkcji względem alternaiywy pozwala zakończyć tę konstrukcję po dwóch krokach (konstrukcja koniunkcji alternatyw nie da nam już niczego nowego).

mentowe koniunkcje z nich utworzone. Istotą naszkicowanej tu konstrukcji algebry $H(\Sigma_0)$ jest to, że każde wartościowanie zmiennych zdaniowych $i\colon \Sigma_0 \to H$ można jednoznacznie rozszerzyć do f-morfizmu $\hat{i}\colon H(\Sigma_0) \to H$ takiego, że $\hat{i} \cdot \eta = i$.

Ponieważ f-morfizmy między zupełnymi algebrami Heytinga wyznaczają funktory-mutacje między stowarzyszonymi toposami H-obiektów, to możemy powiedzieć, że:

topos $H(\Sigma_0)$-obiektów jest toposem klasyfikującym dla pustej geometrycznej teorii zdaniowej skończonej sygnatury Σ_0 W KLASIE TOPOSÓW H-OBIEKTÓW *a $\eta\colon \Sigma_0 \to H(\Sigma_0)$ jest modelem generycznym, w tym sensie, że:*

dowolny model $i\colon \Sigma_0 \to H$ w toposie H- obiektów jest postaci $F(\eta)$ dla pewnego, wyznaczonego jednoznacznie funktora-mutacji $F\colon \widehat{H(\Sigma_0)} \to \widehat{H}$ [68].

Stąd już blisko do oryginalne twierdzenia o istnieniu toposa klasyfikującego dla pustej teorii zdaniowej skończonej sygnatury Σ_0: wystarczy pokazać, że można pominąć założenie, iż bierzemy pod uwagę jedynie modele tej teorii w toposach H-obiektów (a nie modele w dowolnych toposach Grothendiecka). Poprzestaniemy na deklaracji, że to jest możliwe.

Topos klasyfikujący dla dowolnej zdaniowej teorii geometrycznej T opisanej w języku skończonej sygnatury zdaniowej konstruujemy „tak samo": jest to topos $H(T)$-obiektów dla odpowiednio skonstruowanej, skończonej (czyli zupełnej) algebry Heytinga $H(T)$. Model generyczny to odpowiednio zdefiniowana funkcja $\eta_T\colon \Sigma_0 \to H(T)$[69].

Odrzucenie założenia o skończoności sygnatury zdaniowej jest możliwe. Trzeba tylko nieco rozszerzyć język opisu geometrycznych teorii zdaniowych, pozwalając na użycie *nieskończonych alternatyw* [48][70]. Po takim rozszerzeniu języka nadal jest możliwe skojarzenie z każdą zdaniową teorią geometryczną T zupełnej (ale już nie zawsze skończonej) algebry Heytinga $H(T)$ - takiej, że topos $H(T)$-obiektów jest toposem klasyfikującym dla T a „zanurzenie zmiennych" - odpowiednia funkcja $\eta_T\colon \Sigma_0 \to H(T)$ - jest modelem generycznym dla T.
Takie rozszerzenie języka opisu teorii pozwala też na coś istotnie nowego - udowodnienie, że:

dla dowolnej zupełnej algebry Heytinga H można wskazać zdaniową teorię geometryczną T_H taką, że $H = H(T_H)$.

Może to być - na przykład - taka teoria: *przyjmijmy*

$\Sigma_0 = \{z_p\colon p \in H\}$

i następujące sekwenty-nierówności geometryczne-aksjomaty:

$z_p \vdash z_q$ *dla wszelkich* $p, q \in H$, $p \leqslant q$,

$z_p \wedge z_q \vdash z_{p\wedge q}$ *dla wszelkich* $p, q \in H$,

$\top \vdash z_\top$,

$z_{sup(S)} = \bigvee(z_p\colon p \in S)$ *dla każdego podzbioru* $S \subseteq H$[71].

Przykład. Topos $\mathbf{Set}^{\to}$ *(topos Sierpińskiego, str.26) to topos klasyfikujący dla zdaniowej teorii geometrycznej, której modelami w dowolnym toposie H-obiektów są ... pojedyncze podobiekty obiektu końcowego (nieco dokładniej: pary $(\underline{1}_q, \underline{1})$).*

Wierzę, że teraz twierdzenie o istnieniu toposa klasyfikującego dla teorii geometrycznej jest już nieco mniej tajemnicze...[72].

---

[68] Oczywiście F to funktor wyznaczony przez f-morfizm $\hat{i}$, $F = \hat{i}^*$.

[69] Trochę szczegółów (dla wtajemniczonych). Teoria T wyznacza relację równoważności na zbiorze $H(\Sigma_0)$: $\phi \leftrightarrow_T \psi$, gdy w T dowodliwe są geometryczne nierówności $\phi \vdash \psi$ i $\psi \vdash \phi$. $H(T)$ to algebra ilorazowa - $H(T) = H(\Sigma_0)/\leftrightarrow_T$. Funkcja η_T przyporządkowuje zmiennym zdaniowym ich klasy równoważności.

[70] Gdy sygnatura Σ_0 jest nieskończona to, powielając konstrukcję algebry $H(\Sigma_0)$, musimy zadbać o zupełność budowanej algebry, o istnienie kresów górnych. Mocno upraszczając: właśnie do tego potrzebne są nieskończone alternatywy (skończonych koniunkcji zmiennych zdaniowych). Również i w tym przypadku dystrybutywność (koniunkcji względem nieskończonej alternatywy) pozwala na zakończenie budowy poszukiwanwej algebry „po dwóch krokach".

[71] $\bigvee$ to owa nieskończona alternatywa.

[72] Twierdzenie o toposach klasyfikujacych udowodniono w [22] dla teorii geometrycznych pierwszego rzędu opisywanych bez użycia nieskończonych alternatyw. O analogicznym twierdzeniu dla teorii w których opisie dopuszczamy takie alternatywy, w [48] napisano tak: *„We should now like a result of the form "every geometric type theory*

> Konstrukcja topos klasyfikującego dla zdaniowych teorii jest dwuetapowa: najpierw budujemy odpowiednie algebry Heytinga, które w drugim etapie wykorzystujemy do konstrukcji poszukiwanego toposa.
> Kategoria zupełnych algebr Heytinga z f-morfizmami to pierwotna semantyka teorii geometrycznych rzędu 0. Rozszerzenie semantyki do toposów generowanych przez te algebry to „zrównanie" teorii zdaniowych z teoriami geometrycznymi pierwszego rzędu[73].

Dodatek: czy logiki nieskończone są logikami?

Kiedyś, ktoś zadał mi prowokacyjne pytanie:

„Wiemy, że w zbiorze βN wszystkich ultrafiltrów podzbiorów liczb naturalnych można zdefiniować strukturę przestrzeni topologicznej przyjmując, że bazą zbiorów otwartych są rodziny ultrafiltrów $\mathcal{U}_A = \{F \in \beta N : A \in F\}$, gdzie A to dowolny podzbiór liczb naturanych. Ta baza jest nieprzeliczalna. Czy algebra Heytinga zbiorów otwartych tej przestrzeni może być logiką toposa, logiką jednego z wielu matematycznych uniwersów?"

Rzeczywiście, teoriomnogościowe szaleństwo... . O przestrzeni ultrafiltrów, o jej zbiorach otwartych nie wiemy nic (konstruktywnego)[74]. Skoro tak, to trudno zaakceptować tę strukturę jako matrycę wartości logicznych wewnętrznej logiki matematycznego uniwersum... .
Na to pytanie można odpowiedzieć pytaniem: czy liczby naturalne 12354978291353 i 95294561947 można przez siebie pomnożyć a potem podnieść do 7450236 potęgi? Można. Ale nie robimy tego i nie będziemy robić tak długo, jak nie jest to nam potrzebne.

-Nie ma jednej „właściwej" logiki. Są logiki „proste" i są logiki skomplikowane. To, do której z nich się odwołujemy opisując świat, jest naszym wolnym wyborem.

> Nie trzeba się z tym zgadzać. Ale jedno jest pewne: to nie oznacza, że mamy wykluczyć toposy, których logika ma nieskończoną matrycę wartości.
> G.Birkhoff i J. von Neumann definiując logikę kwantową nie wahali się przyjąć, za zbiór jej wartości logicznych nieskończony poset podprzestrzeni liniowych (zespolonej) przestrzeni stanów kwantowych[75].

Dodatek: Czy przestrzeń topologiczna powinna być trzeźwa?

> *Sobriety of X is precisely a condition that forces the lattice of open subsets of X to determine X up to homeomorphism, which is relevant to pointless topology.* *(wikipedia)*[76]

Zanim powiemy cokolwiek o toposach klasyfikujących dla teorii geometrycznych pierwszego rzędu poukładajmy to, co już wiemy o relacji między przestrzeniami topologicznymi, zupełnymi algebrami Heytinga i zdaniowymi teoriami geometrycznymi.

Świat klasycznie rozumianej topologii to kategoria **Top**, której obiektami są „punktowe" przestrzenie topologiczne, a morfizmami - funkcje ciagłe.

Świat topologii bezpunktowej to kategoria **Frames** której obiektami są zupełne algebry Heytinga ze strukturą ograniczoną do operacji geometrycznych a morfizmami f-morfizmy (które te geometryczne operacje zachowują)[77].

---

has a classifying topos". This is difficult, since our notion of geometric type theory is only informal." Nie czuję się kompetentny by dyskutować o tych niuansach. Zainteresowanych (i kompetentnych) odsyłam do prac S.Vickersa.

[73] *„A 1-topos, or (1,1)-topos, is simply a topos in the usual sense of the word. (...) Compare that a (0,1)-topos is a Heyting algebra."* To zdanie ze strony *https://ncatlab.org/nlab/show/1-topos* ma sprowokować do zainteresowania subtelnym pojęciem (n,m)-toposa... .

[74] Istnienie (nietrywialnych) ultrafiltrów wymaga akceptacji pewnika wyboru.

[75] *The Logic of Quantum Mechanics, G.Birkhoff; J.von Neumann The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 37, No. 4. (1936).* Może kiedyś uda się napisać tu „coś" o toposach odwołujących się do logiki kwantowej... .

[76] Nie odmówię sobie przyjemności przytoczenia googlowskiego tłumaczenia: *„Trzeźwość X jest dokładnie warunkiem, który zmusza sieć otwartych podzbiorów X do określenia X aż do homeomorfizmu, który jest istotny dla bezsensownej topologii."*

[77] *„Frame"* to rama, kościec a nawet... skład rzadu. Żadne z tych tłumaczeń tej angielskiej nazwy funkcjonującej w

„Points come first”: traktując priorytetowo klasyczną topologię, z każdą przestrzenią topologiczną $(X, \mathcal{T})$ możemy związać zupełną algebrę Heytinga $\mathcal{T}$ jej zbiorów otwartych - obiekt kategorii **Frames**. A funkcji ciągłej $h\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_1)$ równie naturalnie przyporządkujemy f-morfizm $h^{-1} : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}$ [78].
Mówiąc naukowo, zdefiniowaliśmy w ten sposób funktor z kategorii **Top** do kategorii **Frames**^{op}[79].

„Points come later”: odwrotny kierunek myślenia opisuje funktor działający w przeciwnym kierunku - od **Frames**^{op} do **Top**:

- zupełnej algebrze Heytinga H przyporządkujemy przestrzeń $(Pt(H), Top(H))$ taką, że:

$Pt(H)$ to zbiór wszystkich elementów H w kategorii **Frames**^{op} *(czyli f-morfizmów z H do $\{\perp < \top\}$),*

$Top(H) = \{U_p : p \in H$, gdzie $U_p = \{m \in Pt(H) : m(p) = \top\}$,

- f-morfizmowi $m : H \to H_1$ przyporządkujemy funkcję $Pt(m) : Pt(H_1) \to Pt(H)$ taką, że dla dowolnego punktu $r : H_1 \to \{\perp, \top\}$,

$Pt(m)(r) = r \cdot m : H \to H_1 \to \{\perp, \top\}$.

Te dwa funktory pozwalają przeprowadzić dwie dwukrokowe konstrukcje:

- od przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ do przestrzeni $(Pt(\mathcal{T}), Top(\mathcal{T}))$,

- od algebry Heytinga H do algebry $Top(H)$

i pytać, czy $(X, \mathcal{T}) = (Pt(\mathcal{T}), Top(\mathcal{T}))$ oraz czy $H = Top(H)$?[80]

Odpowiedź jest negatywna:

równość $(X, \mathcal{T}) = (Pt(\mathcal{T}), Top(\mathcal{T}))$ *charakteryzuje tzw. sober spaces*[81],
równość $H = Top(H)$ *wyróżnia tzw. przestrzenne (spatial) algebry Heytinga*[82].

To oznacza, że:

„kategoria trzeźwych przestrzeni i funkcji ciągłych **Sober** *oraz kategoria* **SFrames** *przestrzennych zupełnych algebr Heytinga i f-morfizmów są „dualnie równoważne”.*

$$\mathbf{Sober} \cong \mathbf{SFrames}^{op}$$

czyli - w pewnym uproszczeniu, na które możemy sobie pozwolić - odwrócenie kierunku morfizmów w kategorii **SFrame** da nam kategorię „prawie taką samą” jak kategoria trzeźwych przestrzeni topologicznych.

> Topologia bezpunktowa staje się tożsama z topologią klasyczną gdy po obu stronach zgodzimy się na pewne ustępstwa: po stronie klasycznej ograniczymy się do trzeźwych przestrzeni, a po bezpunktowej - do przestrzennych algebr Heytinga. To warte uwagi bo każdą przestrzeń można „otrzeźwić” a każdą zupełną algebrę Heytinga „uprzestrzennić” [83].

Każda zupełna algebra Heytinga jest modelem generycznym pewnej zdaniowej teorii geometrycznej (str. 56). To powód, dla którego kategorii **Frames**^{op} nadano nową nazwę i oznaczenie: *category of locales* - **Locales**

literaturze (nawet to ostatnie) nie wydaje mi się w rozważanej sytuacji adekwatne. Ale przynajmniej teraz wiadomo, skąd nazwa „f-morfizm”. To „morphism between frames”.

[78] $h^{-1}(U) = \{x \in X : h(x) \in U\}$

[79] Przypomnijmy, że kategoria dualna **Frames**^{op} to kategoria **Frames** z f-morfizmami działającymi „w przeciwnym kierunku”.

[80] W istocie nie chodzi o równości ale o homeomorfizm w pierwszym przypadku i izomorfizm w drugim.

[81] Trzeźwe przestrzenie??? Nie znam polskiego odpowiednika. Dla obytych z topologią: każda *przestrzeń Hausdorffa* jest „sober” a każda trzeźwa przestrzeń jest T_0 przestrzenią. Taka nazwa prowokuje do różnych dowcipów np. pytania *„czy każda przestrzeń polska jest trzeźwa?”*. W dyskusji internetowej o obiekcie liczb rzeczywistych jeden z dyskutantów zgłosił trafną - przynajmniej w kontekście tej dyskusji - uwagę: *„soberity seems superfluous to me”*.

[82] Przestrzenne zupełne algebry Heytinga wyróżnia implikacja $(p \neq q) \to (U_p \neq U_q)$.

[83] Jak sądzę, analizowana tu sytuacja wpisuje się w ogólna dyskuję o „dualności między przestrzenią i wielkością” (*„duality of space and quantity”*) Zainteresowanych odsyłam na stronę *nLab:space and quantity*.

„Locale is a propositional geometric theory pretending to be a space” [48]

- mam nadzieję, że to stwierdzenie jest w pełni zrozumiałe[84].

Ale dlaczego wprowadzeniu nowej nazwy towarzyszy „odwrócenie kierunku” morfizmów w kategorii **Frames**? Sądzę, że tak jest, bo *f-morfizm $m : H \to H_1$ można interpretować na dwa sposoby:*

- jako model teorii zdaniowej teorii geometrycznej stowarzyszonej z H w toposie H_1-obiektów,

- jako opis translacji modeli zdaniowej teorii geometryczej stowarzyszonej z H_1 na modele teorii stowarzyszonej z H[85].

Mówiąc o kategorii **Locales** eksponujemy tę drugą interpretację.

Można też prościej: dzięki odwróceniu kierunku morfizmów równość **Sober** $\cong$ **SFrames**^{op} przybiera elegancką postać:

$$\mathbf{Sober} \cong \mathbf{SLocales}$$

> Na koniec: dlaczego teorie geometryczne nazwano tak jak nazwano? W klasyfikacji Kleina topologia jest jednym z rodzajów geometrii. Zdaniowe teorie geometryczne to aksjomatyczno-dedukcyjny opis geometrii przestrzeni topologicznej.
> Wcale nie jestem pewny, czy to właściwe wytłumaczenie... .

Toposy snopów nad (trzeźwymi) przestrzeniami topologicznymi, toposy H-obiektów (dla przestrzennych zupełnych algebr Heytinga) czy wreszcie *localic toposes* to różnie opisywane matematyczne uniwersa, których „zaczynem” są zdaniowe teorie geometryczne.

3.5 Toposy klasyfikujące dla teorii pierwszego rzędu - przykłady

Toposy klasyfikujące dla teorii pierwszego rzędu NIE są toposami H-obiektów. Dlatego prezentacja przykładów takich toposów jest też dobrą okazją, by przedstawić podstawowe informacje o większej klasie *toposów Grothendiecka*.

W [22], w rozdziale *„Classifying toposes”* główne twierdzenie podrozdziału *„The object classifier”* sformułowano tak:

„The topos $\mathbf{Set}^{\mathbf{Fin}}$ *is the object classifier with the generic object (...) the inclusion functor* $\mathbf{Fin} \rightsquigarrow \mathbf{Set}$”$(str.437)$.

Wiedza tajemna... . Wiedząc tyle, ile wiemy, możemy się domyślać, że $\mathbf{Set}^{\mathbf{Fin}}$ to topos klasyfikujący dla pewnej teorii geometrycznej pierwszego rzędu. To prawda. Jest to przykład stosunkowo prosty, którego analiza pomoże zrozumieć, jak buduje się toposy klasyfikujące dla wielu teorii geometrycznych.

$\mathbf{Set}^{\mathbf{Fin}}$ to kategoria funktorów z kategorii skończonych zbiorów **Fin** do kategorii zbiorów **Set**. My jednak powiemy, że:

$\mathbf{Set}^{\mathbf{Fin}}$ to *kategoria presnopów nad kategorią* $\mathbf{Fin}^{\mathbf{op}}$

Presnopy nad kategorią **C** to po prostu inna nazwa funktorów z kategorii dualnej $\mathbf{C}^{op}$ do **Set**.

Morfizm między presnopami $F, G\colon \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ to *transformacja naturalna* - rodzina funkcji $\phi = (\phi_A\colon A \in Ob(\mathbf{C}))$ taka, że dla dowolnego **C**-morfimu $f\colon B \to A$ (czyli $f\colon A \to B$ w $\mathbf{C}^{op}$) , diagram

$$\begin{tikzcd} F(B) \arrow[r, "\phi_B"] & G(B) \\ F(A) \arrow[u, "F(f)"] \arrow[r, "\phi_A"] & G(A) \arrow[u, "G(f)"'] \end{tikzcd}$$

jest przemienny. Kategorię presnopów nad **C** oznaczamy tu symbolem $PSh(\mathbf{C})$.

Ponieważ $\mathbf{Fin} = (\mathbf{Fin}^{op})^{op}$, to $\mathbf{Set}^{\mathbf{Fin}} = PSh(\mathbf{Fin}^{op})$.

[84]To jest też powód, dla którego w literaturze toposy H-obiektów funkcjonują pod nazwą *localic toposes*.

[85]Jeśli $m_1 : H_1 \to H_2$ jest modelem teorii $T(H_1)$ to $m_1 \cdot m : H \to H_2$ jest modelem teorii $T(H)$.

Dla dowolnej kategorii **C** *kategoria presnopów* $PSh(\mathbf{C}$ *jest toposem Grothendiecka.*

Kategorię presnopów $PSh(\mathbf{C})$ łączą z kategorią **C** (a nie z kategorią $\mathbf{C}^{op}$!) głębokie i ważne związki:

\- 1. *Kategoria* **C** *jest zanurzalna w topos* $PSh(\mathbf{C})$.
Zanurzenie Yonedy to przyporządkowanie każdemu obiektowi $C \in \mathbf{C}$ *presnopa reprezentowalnego* $\mathbf{C}(\_, C)\colon \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ *takiego, że:*

\- $\mathbf{C}(\_, C)(A) = \mathbf{C}(A, C)$ *dla dowolnego obiektu* $A \in \mathbf{C}$,
\- $\mathbf{C}(\_, C)(f)(g) = gf$ *dla dowolnych* **C**-*morfizmów* $f\colon B \to A, g\colon B \to C$.

Natomiast **C**-*morfizmowi* $h\colon C \to D$ *przyporządkowujemy transformację* $\phi^h : \mathbf{C}(\_, C) \to \mathbf{C}(\_, D)$ *taką, że* $\phi^h_A(g) = hg$ *dla każdego* **C**-*morfizmu* $g\colon A \to C$.

To zanurzenie jest pełne - każda transformacja między presnopami reprezentowalnymi jest wyznaczona w opisany sposób przez pewien **C**-morfizm.

2\. $PSh(\mathbf{C})$ *jest „wolnym kogranicznym dopełnieniem"(free colimit completion) kategorii* **C**.
To oznacza, że:

\- *w* $PSh(\mathbf{C})$ *istnieją wszelkie kogranice,*
\- *każdy presnop nad* **C** *jest kogranicą presnopów reprezentowalnych,*
\-*każdy funktor* G *z kategorii* **C** *do toposa Grothendiecka* $\mathcal{E}$ *ma jednoznaczne rozszerzenie do funktora* $G^*\colon PSh(\mathbf{C}) \to \mathcal{E}$ *zachowującego wszelkie kogranice.*

> Kluczem do udowodnienia tych twierdzeń jest lemat Yonedy[86]:
>
> *„Każda transformacja naturalna z presnopa reprezentowalnego* $\mathbf{C}(\_, C)$ *do dowolnego presnopa* $F\colon \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ *jest jednoznacznie wyznaczona przez pewien element zbioru* $F(C)$ *(i vice versa)".*
>
> To jeden z tych wyników matematycznych, których znaczenie jest odwrotnie proporcjonalna do prostoty sformułowania.
>
> Piękno matematyki ujawnia się w prostocie jej najważniejszych twierdzeń.

Kategorie presnopów to najłatwiejsze do wyobrażenia *toposy Grothendiecka*, Są „ważne", ponieważ z tego, co powiedzieliśmy dotąd o związku z **C** i $PSh(\mathbf{C})$ wynika, że:

Dowolną katagorię **C** *można zanurzyć w topos Grothendiecka*[87]

Konstruując przykłady toposów klasyfikujących będziemy korzystali z takiego oto „wzmocnienia" opisu związków między kategorią **C** a toposem presnopów $PSh(\mathbf{C})$:

(**) *„Jeśli* **C** *jest kategorią, w której istnieją wszelkie skończone granice, to dla dowolnego toposa Grothendiecka* $\mathcal{E}$ *istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między morfizmami geometrycznymi z* $\mathcal{E}$ *do* $PSh(\mathbf{C})$ *a funktorami z* **C** *do* $\mathcal{E}$ *które zachowują skończone granice."*

To jest kompilacja dwóch twierdzeń, które znajdziemy w [22]: to Twierdzenie 2 na str. 393 i Wniosek 3 na str. 407. W rezultacie otrzymujemy naprawdę niebanalne twierdzenie i nie mam pojęcia, jak można choćby naszkicować jego dowód unikając technicznych zawiłości[88]. Powiedzmy tylko, że opisane wcześniej rozszerzenie funktora $G\colon \mathbf{C} \to \mathcal{E}$ - funktor $G^*\colon PSh(\mathbf{C}) \to \mathcal{E}$ to „część" morfizmu geometrycznego $(G^*, G_*)\colon \mathcal{E} \to PSh(\mathbf{C})$ odpowiadającego funktorowi funktorowi G.

Uzbrojeni w tę wiedzę możemy wyjaśnić, jaką to teorię geometryczną klasyfikuje topos $\mathbf{Set}^{\mathbf{Fin}} = PSh(\mathbf{Fin}^{op})$.

Kategoria **Fin** ma wszelkie skończone kogranice a każdy jej obiekt - zbiór skończony - jest koproduktem skończonej liczby kopii jednoelementowego zbioru. To oznacza, że kategoria dualna $\mathbf{Fin}^{op}$ ma wszelkie skończone granice, a każdy jej obiekt jest produktem skończonej liczby jednoelementowych zbiorów. Dlatego dowolny funktor $G\colon \mathbf{Fin}^{op} \to \mathcal{E}$ zachowujący skończone granice jest wyznaczony

---

[86]Nobuo Yoneda, matematyk japoński, 1930-1996.
[87]Właściwie powinniśmy napisać „dowolną małą kategorię" ale pomińmy te subtelności (patrz np. [22] str. 12).
[88]Nasz zapis tego twierdzenia jest nieco uproszczony ale nie przekłamany.

jednoznacznie przez pojedynczy obiekt $\mathcal{E}$ - wartość funktora G na zbiorze jednoelementowym - $G(\underline{1})$.

Łącząc tę obserwację z twierdzeniem (∗∗) wnioskujemy, że:

„istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między obiektami toposa Grothendiecka $\mathcal{E}$ a morfizmami geometrycznymi z $\mathcal{E}$ do $PSh(\mathbf{Fin}^{op})$.

The topos $\mathbf{Sets}^{\mathbf{Fin}}$ *(=* $PSh(\mathbf{Fin}^{op})$ *is the object classifier"* - prawie już wszystko jasne. Pozostaje tylko wskazać teorię geometryczną, której modelami są dowolne obiekty dowolnych toposów. Ale to proste: to teoria „pusta" - napisana w języku sygnatury pustej i bez aksjomatów[89].

Toopos klasyfikujący dla obiektów rozstrzygalnych

Obiekt A w toposie jest *rozstrzygalny (decidable)* jeżeli podobiekt produktu A^2 reprezentowany przez diagonał $\Delta_A = (id_A, id_A)\colon A \to A\times A$ jest *komplementarny* - istnieje podobiekt $\tilde{\Delta}_A\colon A_1 \to A^2$ taki, że $(\Delta_A \vee \tilde{\Delta}_A) = A^2$ oraz $(\Delta \wedge \tilde{\Delta}_A) = \underline{0}$ [90].
W toposie **Set** każdy obiekt (zbiór) jest rozstrzygalny. H-obiekt $(A, \approx_A)$ jest rozstrzygalny, gdy miara równości $\approx_A$ jest komplementarna: istnieje podobiekt $\not\approx\colon A \times A \to H$ taki, że $(\approx \vee \not\approx)$ to największy, a $(\approx \wedge \not\approx)$ to najmniejszy podobiekt $(A, \approx) \times (A, \approx)$.
Stąd np. w toposie $\mathbf{Set}^{\to}$ (którego matrycą wartości logicznych jest trójelementowy łańcuch $\perp < 1/2 < \top$) dwupunktowy obiekt $(\{a, b\}, \approx)$ taki, że punkty a, b są globalne i $a \approx b = 1/2$ nie jest rozstrzygalny.

Obiekty rozstrzygalne to modele geometrycznej teorii pierwszego rzędu, której sygnatura to pojedynczy binarny symbol relacyjny „$\neq$" a aksjomaty wyglądają tak:

$(x \neq x) \vdash \perp, \qquad \top \vdash (x \neq y) \vee (x = y)$

Nieco trudniej pokazać, że topos klasyfikujący tej teorii to topos presnopów $PSh(\mathbf{Fin}^{op}_{mono})$, gdzie $\mathbf{Fin}_{mono}$ to kategoria skończonych zbiorów z funkcjami różnowartościowymi jako morfizmami[91].

Topos klasyfikujący dla teorii pierścieni

Teoria pierścieni (przemiennych z jedynką) jest geometryczna. Opis jej toposa klasyfikującego można sprowadzić do jednego zdania: wszystko robimy tak samo jak w przypadku teorii pustej, z tą różnicą, że kategorię **Fin** zastępujemy kategorią skończenie przedstawialnych pierścieni **fpRing**.

> *Dla naszych prób zrozumienia, jaka jest rola toposa klasyfikującego, ważna jest taka uwaga:*
> *kategoria* **fpRing** *jest „konstruktywna" w tym sensie, że jej obiekty i morfizmy mają skończone opisy „w języku teorii pierścieni":*
> *- obiekty to pierścienie postaci* $\mathbf{Z}[x_1, \dots, x_n]/(p_1, \dots, p_k)$*, gdzie* $(p_1, \dots, p_k)$ *to ideał generowany przez wielomiany* $p_1, \dots, p_k \in \mathbf{Z}[x_1, \dots, x_n]$*. Wielomiany o współcznikach całkowitych o zmiennych* $x_1, \dots, x_n$ *to elementy obiektów postaci* $\mathbf{Z}[x_1, \dots, x_n]$*. Natomiast w pierścieniu ilorazowym* $\mathbf{Z}[x_1, \dots, x_n]/(p_1, \dots, p_k)$ *dwa wielomiany* $f, g \in \mathbf{Z}[x_1, \dots, x_n]$ *są nazwami tego samego elementu, gdy* $f - g = \alpha_1 p_1 + \dots \alpha_n p_n$ *dla pewnych liczb całkowitych* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$*.*
> *- morfizmy (czyli homomorfizmy pierścieni) z* $\mathbf{Z}[x_1, \dots x_n]$ *do* $\mathbf{Z}[x_1, \dots, x_k]$ *są jednoznacznie wyznaczone przez* n*- elementowe ciągi wielomianów* $(f_i(x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{Z}[x_1, \dots, x_k]\colon i = 1, 2 \dots n)$[92]

Rolę zbioru jednoelmentowego pełni teraz pierścień $\mathbf{Z}[x]$: każdy obiekt **fpRing** można skonstruować biorąc za punkt wyjścia ten pierścień i korzystając ze skończonych koproduktów i koekwalizatorów (np. pierścień $\mathbf{Z}[x, y]$ jest koproduktem dwóch kopii $\mathbf{Z}[x]$). Ta kategoria ma wszelkie skończone kogranice. Tym samym kategoria dualna $\mathbf{fpRing}^{op}$ ma wszelkie skończone granice a każdy funktor $F\colon \mathbf{fpRing}^{op} \to \mathcal{E}$ zachowujący granice jest wyznaczony przez $\mathcal{E}$-obiekt $F(\mathbf{Z}[x])$, który jest nośnikiem pierścienia w toposie $\mathcal{E}$.

---

[89] Drugi warunek wcale nie jest nadmiarowy. Można sobie wyobrazić teorię której jedynym aksjomatem jest zdanie $\forall_{x,y}(x = y)$.
[90] $\underline{0}$ to obiekt początkowy
[91] *ncatlab.org/nlab/show/theory+of+decidable+objects*
[92] Wielomiany $f_i(x_1, \dots, x_k)$ to wartości opisywanego homomorfizmu na zmiennych $x_1, \dots, x_n$. Opis dowolnego morfizmu w **fpRing** za pomocą wielomianów jest troszkę bardziej złożony, ale możliwy.

Spróbuję choćby zasugerować, dlaczego tak jest. W kategorii $\mathbf{fpRing}^{op}$ *znajdziemy taki diagram:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Z} \arrow[r, bend left, "1"] \arrow[r, bend right, "0"'] & \mathbf{Z}[x] & \mathbf{Z}[x,y] \arrow[l, bend right, "x+y"'] \arrow[l, bend left, "x\cdot y"] \end{tikzcd}$$

Niech $F(\mathbf{Z}[x]) = R$ *. Wówczas* $F(\mathbf{Z}[x,y]) = R^2$*, a obraz tego diagramu poprzez* F *w toposie* $\mathcal{E}$ *wygląda tak:*

$$\begin{tikzcd} F(\mathbf{Z}) = \underline{1} \arrow[r, bend left, "F(1)"] \arrow[r, bend right, "F(0)"'] & R & R^2 \arrow[l, bend right, "F(x+y)"'] \arrow[l, bend left, "F(x\cdot y)"] \end{tikzcd}$$

To oznacza, że z obiektem $R = F(\mathbf{Z}[x])$ *związane są operacje i stałe wymagane w definicji pierścienia*[93].

Wykorzystując ponownie twierdzenie $(**)$ stwierdzamy, że:

„istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między pierścieniami przemiennymi z jedynką w toposie Grothendiecka $\mathcal{E}$ *a morfizmami geometrycznymi z* $\mathcal{E}$ *do* $PSh(\mathbf{fpRing}^{op})$*".*

Topos presnopów nad kategorią skończenie generowanych pierścieni jest toposem klasyfikującym dla teorii pierścieni (przemiennych z jedynką).

> Jaki jest sens zamiany prostego wskazania pierścienia w toposie $\mathcal{E}$ na funktor geometryczny między $\mathcal{E}$ a toposem klasyfikującym? Pozwalając sobie na spore uproszczenia odpowiem tak: w otoczeniu obiekt-pierścieniem R w $\mathcal{E}$ można wyróżnić te obiekty i morfizmy, które można „nazwać" (opisać) używając języka teorii pierścieni - języka wielomianoów o współczynnikzch całkowtych. Np. morfizm z R^2 do R realizujący „dodawanie w R" jest opisany przez wielomian $x + y$. Może się zdarzyć, że pewien morfizm ma wiele „nazw" (opisów) - zależy to od struktury toposa $\mathcal{E}$, równości prawdziwych w teorii pierścieni i wyboru pierścienia R. Np. w skrajnym przypadku, gdy R jest obiektem końcowym, to jedynym morfizmem opisywalnym jest $id :: R \to R$ a jego nazwą - dowolny wielomian. „Po stronie syntaktycznej"ye nazwy są reprezentowane „dualnie", jako morfizmy między skończenie przedstawialnymi pierścieniami.
>
> Wszystkie obiekty w toposie $PSh(\mathbf{fpRing})$ są kogranicami diagramów w kategorii **fpRing**. Można uznać, że opisy tych diagramów to nazwy obiektów-kogranic diagramów. Podobnie możemy „nazywać" morfizmy w $PSh(\mathbf{fpRing})$. Funktor $F_R^*\colon PSh(\mathbf{fpRing}) \to \mathcal{E}$ przyporządkowuje takim nazwom ich znaczenia „w otoczeniu pierścienia R" w toposie $\mathcal{E}$ [94].

Topos klasyfikujący dla teorii pierścieni lokalnych.

Teoria pierścieni lokalnych to geometryczna teoria pieścieni z jedynką wzbogacona o aksjomat

$$\forall_x(\exists_y(xy = 1) \vee \exists_y(1 - x)y = 1) \qquad [95]$$

Topos klasyfikujący dla teorii pierścieni lokalnych NIE JEST toposem presnopów. To *topos snopów* nad pewną kategorią wyposażoną w *topologię Grothendiecka.*

To nowa jakość. Wymusza choćby powierzchowne wyjaśnienie, czym jest topologia Grothendiecka i związany z nią topos snopów.

O presnopach i snopach jako konstrukcjach związanych z przestrzenią topologiczną $(X, \mathcal{T})$ już coś wiemy (str.26). Uogólnienia tych pojęć polegają na zastąpieniu algebry Heytinga $\mathcal{T}$ (która jest posetem, a więc może być postrzegana jako kategoria) przez dowolną małą kategorię $\mathbf{C}$.
Uogólnienie pojęcia presnopa już znamy - presnop to funktor $F\colon \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$[96].

---

[93] Oczywiście trzeba pokazać, że te operacje spełniają równości - aksjomaty pierścieni przemiennych z jedynką. Ale to dość rutynowe zadanie gdyż te równości można zastąpić wymogiem przemnienności odpowiednich diagramów. Darujmy sobie.

[94] Ten akapit nie w pełni mnie satysfakcjonuje. Może się jeszcze poprawię.

[95] Równoważnie: pierścień jest lokalny, gdy ma jeden ideał maksymalny.

[96] Wcześniej opisywałem snopy jako rodziny zbiorów indeksowane zbiorami otwartymi - $(F(U)\colon U \in \mathcal{T})$ - wraz z operacjami „obcinania" punktów (str.26). Tę strukturę można opisywać jako funktor $F\colon \mathcal{T}^{op} \to \mathbf{Set}$: obcięcie punktu $a \in F(U)$ do podzbioru $V \subseteq U$ to punkt $F(V \subseteq U)(a)$.

Uogólnienie pojęcia snopa jest trudniejsze. *„Snop to presnop, w którym można sklejać zgodne rodziny punktów"*. Chcąc zdefiniować operację sklejania punktów presnopa działającego na kategorii $\mathbf{C}$ w sposób uogólniający sytuację topologiczną, musimy odpowiedzieć na dwa pytania:

- jak rozumieć (definiować) „pokrycie obiektu" $A \in \mathbf{C}$?

- jak rozumieć (definiować) „zgodną rodzinę punktów" - taką, którą można „skleić" w jeden punkt?

Na te pytania w sposób genialny odpowiedział Grothendieck. „Genialny" choćby dlatego, że - trochę wbrew topologicznemu wzorcowi - przyjął założenie, że dla danej kategorii $\mathbf{C}$ odpowiedź nie musi być jednoznaczna.

„A Grothendieck topology on a category $\mathbf{C}$ is a collection, for each object A of $\mathbf{C}$, of distinguished sieves on $\mathbf{C}$ (...) called covering sieves of A."

„a collection" a nie *„the collection'*: może tak być, że w danej ktegorii $\mathbf{C}$ znajdziemy wiele różnych „systemów pokryć obiektów", wiele różnych *topologii Grothendiecka*.

> *„Sieve"* to *„sito"*. Co to jest sito? I skąd taka nazwa?
>
> Przyjmijmy (na chwilę), że każdy $\mathbf{C}$-morfizm postaci $f\colon B \to A$ interpretujemy jako „droga dostępu z B do A". Wówczas każda rodzina morfizmów S, których wspólną kodziedziną jest A, może być postrzegana jako ograniczenie możliwości dostępu do A: morfizm-droga $f\colon B \to A$ jest *akceptowany* przez S gdy można go zapisać w postaci $f = g \cdot f_1$, gdzie $g \in S$:
>
> $$f = g \cdot f_1 \colon B \xrightarrow{f_1} A_g \xrightarrow{g \in S} A$$
>
> *„Rodzina S jest sitem chroniącym A przez które przeniknąć mogą tylko niektóre morfizmy o kodziedzinie A"*. Nazwa „sito" dla rodziny morfizmów o wspólnej kodziedzinie jest, jak sądzę, zgodna z intuicją.
>
> Jednak w matematyce toposów Grothendiecka rodzina S morfizmów o wspólnej kodziedzinie to jedynie *generator sita. Sito (generowane przez S)* to rodzina wszystkich morfizmów akceptowalnych S. (To trochę niefortunne, bo po drodze gubi się gdzieś intuicja związana z tą nazwą. Trudno).
> Tak rozumiane „sito" może być opisane na dwa sposoby:
> *- jako rodzina morfizmów $\hat{S}$ o wspólnej kodziedzinie i taką, że wraz z morfizmem $f\colon B \to A$ zawiera każdy morfizm od niego „dłuższy" - morfizm postaci $fg\colon C \to B \to A$,*
> *- jako presnop $\hat{S}\colon \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$, który jest podfunktorem presnopa reprezentowalnego $\mathbf{C}(\_, A)$*[97].

„Kolekcja sit pokrywających (*covering sieves*)" tworzących topologię Grothendiecka musi spełniać pewne warunki. Ale ich znajomość nie jest nam w tej chwili potrzebna.

Zdefiniujmy pojęcie „zgodnej rodziny punktówtów presnopa względem sita":

zgodna rodzina punktów presnopa $F\colon \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ względem sita $\hat{S} = (f\colon A_f \to A)$ to rodzina $(a_f \in F(A_f)\colon f \in \hat{S})$ taka, że $F(g)(a_f) = a_{fg}$ dla dowolnego morfizmu $g\colon A_{fg} \to A_f$. Jej *sklejenie (amalgamation)* to punkt $a \in F(A)$ taki, że $F(f)(a) = a_f$ dla dowolnego morfizmu $f \in \hat{S}$.

Możliwość sklejania zgodnych rodzin punktów wyróżnia snopy spośród presnopów:

załóżmy, że $\mathcal{J}$ jest topologią Grothendiecka w kategorii $\mathbf{C}$. Presnop $F\colon \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ jest snopem (dla pary $(\mathbf{C}, \mathcal{J})$) gdy każda rodzina elementów zgodna względem jakiegokolwiek sita $\hat{S} \in \mathcal{J}$ jest sklejalna.

Snopy „nad $(\mathbf{C}, \mathcal{J})$" tworzą topos, który oznaczamy symbolem $Sh(\mathbf{C}, \mathcal{J})$.
Topos $\mathcal{E}$ jest toposem Grothendiecka dokładnie wtedy, gdy jest równoważny toposowi snopów dla pewnej pary $(\mathbf{C}, \mathcal{J})$.

Jesteśmy już przygotowani, by podjąć próbę opisu toposa klasyfikującego dla teorii pieścieni lokalnych.

Pomysł jest prosty: chcemy wyposażyć kategorię $\mathbf{fpRing}^{op}$ w taką topologię Grothendiecka $\mathcal{LR}$, która pozwoli ustalić wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między pierścieniami lokalnymi w

[97] To oznacza, że dla dowolnego obiektu $B \in Ob(\mathbf{C})$, $\hat{S}(B) \subseteq \mathbf{C}(B, A)$ a rodzina zanurzeń $(\hat{S}(B) \to \mathbf{C}(B, A)\colon B \in Ob(\mathbf{C}))$ jest transformacją naturalną.

dowolnym toposie Grothendiecka $\mathcal{E}$ a morfizmami geometrycznymi z $\mathcal{E}$ do $Sh(\mathbf{fpRing}^{op}, \mathcal{LR})$. Kierunek poszukiwań topologii $\mathcal{LR}$ wyznacza twierdzenie, które znajdziemy w [22] str. 407:

„załóżmy, że $\mathcal{J}$ jest topologią Grothendiecka w kategorii $\mathbf{C}$, w której istnieją wszelkie skończone granice. Wówczas, dla dowolnego toposa Grothendiecka $\mathcal{E}$, istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między ciągłymi i zachowującymi skończone granice funktorami z $\mathbf{C}$ do $\mathcal{E}$ a morfizmami geometrycznymi z $\mathcal{E}$ do $Sh(\mathbf{C}, \mathcal{J})$".

Ciągłość funktora $F\colon \mathbf{C} \to \mathcal{E}$ względem topologii $\mathcal{J}$ oznacza, że *„F sends covering sites to epimorphic families"* - dla dowolego sita $\hat{S} = (f\colon A_f \to A) \in \mathcal{J}$ rodzina $\mathcal{E}$-morfizmów $(F(f)\colon F(A_f) \to F(A)\colon f \in \hat{S})$ jest *epimorficzna*: morfizmy $g, h\colon F(A) \to B$ są równe dokładnie wtedy, gdy $g \cdot F(f)) = h \cdot F(f)$ dla wszystkich $f \in \hat{S}$.

Topologię $\mathcal{LR}$ w kategorii $\mathbf{fpRing}^{op}$ należy zdefiniować tak, by funktor $F_R\colon \mathbf{fpRing}^{op} \to \mathcal{E}$ był ciągły dokładnie wtedy, gdy wyznaczający go pierścień R jest lokalny.
Łatwo powiedzieć... . Związek tak rozumianej ciągłości funktora F_R z lokalnością pierścienia R wymyka się naszej (mojej) intuicji.

Wszystko się pięknie wyjaśni, gdy przyjrzymy się fundamentalnemu przykładowi.

Niech R będzie dowolnym pierścieniem (przemiennym z jedynką) w $\mathbf{Set}$. Przyjrzymy się funkcji
$$h_1\colon R_1 = \{(a,b) \in R^2\colon ab = 1\} \to R^2 \to R,$$
(pierwsza funkcja to zanurzenie identycznościowe, a druga - rzutowanie, $\Pi(x,y) = x$.)
Nietrudno sprawdzić, że $h_1(R_1) = \{a \in R\colon \exists_{b\in R} ab = 1\}$. Inaczej mówiąc, zbiór $h_1(R_1)$ to semantyka formuły $\exists_y(xy = 1)$ w modelu-pierścieniu R.

W ten sam sposób pokażemy, że obraz funkcji
$$h_2\colon \{(a,b) \in R^2\colon (1-a)b = 1\} \to R^2 \to R$$
to semantyka formuły $\exists_y(xy = 1)$.

Para funkcji (h_1, h_2) jest epimorficzna dokładnie wtedy, gdy suma tych obrazów jest całym pierścieniem R. Ale to oznacza, że w pierścieniu R prawdziwe jest zdanie $\forall_x(\exists_y(xy = 1) \vee \exists_y((1-x)y = 1)$ czyli ... R jest pierścieniem lokalnym.

Zauważmy, że $h_1 = F_R(g_1), h_2 = F_R(g_2)$, gdzie:
$$g_1\colon Z[x,y]/(xy-1) \longrightarrow Z[x] \times Z[y] = Z[x,y] \longrightarrow Z[x]$$
$$g_2\colon Z[x,y]/((1-x)y-1) \longrightarrow Z[x] \times Z[y] = Z[x,y] \longrightarrow Z[x])$$
Dlatego dwuelementowe sito (g_1, g_2) pokrywające obiekt $Z[x]$ w kategorii $\mathbf{fpRing}^{op}$ można (należy) włączyć do poszukiwanej topologii $\mathcal{LR}$.

Zauważmy jeszcze, że za konstrukcję sita (g_1, g_2) „odpowiedzialne" są wielomiany xy oraz $(1-x)y$ których sumą jest 1.

Ta uwaga pozwala zauważyć, że rozważany przykład jest ilustracją takiego oto, ogólnego twierdzenia ([22] str.447):

„Niech R będzie pierścieniem w toposie $\mathcal{E}$ a $f_R\colon \mathbf{fpRing}^{op} \to \mathcal{E}$ wyznaczonym przez R funktorem zachowującym granice. Pieścień R jest lokalny dokładnie wtedy, gdy dla każdego skończenie przedstawialnego pierścienia A i elementów $a_1, \ldots, a_n \in A$ takich, że $a_1 + \ldots + a_n = 1$ funktor F_R przekształca sito $(g_i\colon A[y]/(a_iy-1) \to A\colon i = 1, \ldots, n)$ w rodzinę epimorficzną."

Opisane w tym twierdzeniu skończone sita pokrywające skończenie przedstawialne pierścienie to poszukiwana topologia $\mathcal{LR}$.

Topos snopów $Sh(\mathbf{fpRing}^{op}, \mathcal{LR})$ to *topos Zariskiego* (nad $\mathbf{Z}$)[98]

Koniec przykładów. Ale to jeszcze nie koniec... .

Elementy toposa = różne (zewnętrzne) punkty widzenia?

[98] Taka nazwa dla toposa klasyfikującego dla teroii pierścieni lokalnych nie jest przypadkowa: topologia Zariskiego znana jest wszystkim, którzy wiedzą cokolwiek o *geometrii algebraicznej.*

„Generyczność modelu generycznego" teorii geometrycznej T oznacza, że dowolna nierówność geometryczna $\phi(\bar{x}) \vdash \psi(\bar{x})$ jest prawdziwa we wszystkich modelach tej teorii dokładnie wtedy, gdy jest prawdziwa w modelu generycznym.
To oczywista korzyść poznawcza. Tym bardziej, że ten wynik można jeszcze bardziej „uprościć", wskazując jednocześnie na uprzywilejowaną (w kontekście tych rozważań) rolę kategorii zbiorów.

Już wyjaśniam. Najprostszą mutację generuje f-morfizm $\{\bot < \top\} \to H$. Ta mutacja to znane już nam zanurzenie toposa **Set** w topos H-obiektów - $A \rightsquigarrow \Delta(A)$. Jest to „część" jedynego morfizmu geometrycznego z toposa H-obiektów do **Set** co oznacza, że:

„topos zbiorów jest obiektem końcowym w kategorii toposów H-obiektów i morfizmów geometrycznych"[99].

Jeśli tak, to morfizmy geometryczne z **Set** do $\widehat{H}$ - mutacje wyznaczone przez f-morfizmy postaci $m : H \to \{\bot < \top\}$ - można nazwać... elementami toposa H-obiektów.

To nie zabawa w słowa, to ma głębszy sens. Łatwo sprawdzić, że dowolny f-morfizm $m\colon H \to \{\bot < \top\}$ jest wyznaczony jednoznacznie przez zbiór $m^{-1}(\top) = \{p \in H : m(p) = \top\}$.
Oczywiście:
- $\top \in m^{-1}(\top)$,
- $p \wedge q \in m^{-1}(\top)$ jeśli tylko $p, q \in m^{-1}(\top)$,
- $sup(p_i : i \in I) \in m^{-1}(\top)$ dokładnie wtedy, gdy $p_{i_0} \in m^{-1}(\top)$ dla pewnego $i_0 \in I$.

Podzbiory algebry H które mają te trzy własności to *zupełne filtry pierwsze*.

Matematyczne szaleństwo... . Aby zrozumieć, że w tym szaleństwie jest metoda[100] przyjmijmy na chwilę, że H to algebra Heytinga zbiorów otwartych pewnej przestrzeni topologicznej $(Z, \mathcal{T})$ - $H = \mathcal{T}$. Wówczas otwarte otoczenia dowolnego punktu tej przestrzeni tworzą filtr pierwszy.

„Punkty przestrzeni $(Z, \mathcal{T})$ wyznaczają elementy toposa $\mathcal{T}$-obiektów".

Oznaczmy przez $\hat{z} : \mathcal{T} \to \{\bot < \top\}$ f-morfizm wyznaczony przez punkt $z \in Z$ i sprawdźmy, jak wygląda wyznaczona przez ten punkt mutacja $\mathcal{T}$ -obiektu $\underline{A} = (A, \approx)$ - zbiór $\hat{z}^*(\underline{A})$.

Elementy tego zbioru są wyznaczone przez te punkty $a \in A$ których miara istnienia - zbiór otwarty $\mathbf{E}(a) \in \mathcal{T}$ - jest otoczeniem punktu z. Pozostałe punkty zbioru A „znikają". Punkty $a, b \in A$ wyznaczają ten sam element zbioru $\hat{z}^*(\underline{A})$, gdy dla pewnego otoczenia U punktu z obcięcia $a_{|U}$ i $b_{|U}$ są równe.

Jeśli $\underline{A}$ jest nośnikiem modelu $\underline{M}$ pewnej teorii geometrycznej T w toposie H-obiektów, to zbiór $\hat{z}^*(\underline{A})$ jest nośnikiem teoriomnogościowego modelu tej teorii. Nierówność geometryczna $\phi(\bar{x}) \vdash \psi(\bar{x})$ jest prawdziwa w tym teoriomnogościowym modelu dokładnie wtedy, gdy można wskazać otoczenie U punktu z, takie, że w modelu $\underline{M}$, $[\phi(\bar{x})] \wedge \gamma_U \leqslant [\psi(\bar{x})]$.

> Logika toposa $\mathcal{T}$-obiektów jest wielowartościowa. Kusi, by uprościć ten świat i podzielić wartości logiczne - zbiory otwarte - na dwie części: te, które (z bliżej nieokreślonego powodu...) uznajemy za odpowiadajace prawdzie i pozostałe, odpowiadające fałszowi. Takie podziały wyznaczają punkty przestrzeni $(Z, \mathcal{T})$[101]. Każdy z elementów toposa $\mathcal{T}$-obiektów można rozumieć jako różne od pozostałych spojrzenie na ten topos przez teoriomnogościowe okulary, jego „dychotomiczną redukcję". Obserwator stojący w punkcie $z \in Z$ i oglądający model teorii geometrycznej w toposie $\mathcal{T}$-obiektów uznaje za „prawdy geometryczne" to, co jest prawdziwe w pewnym jego otoczeniu... .

Co istotne (a nawet ciekawe), „suma pozytywnej geometrycznej wiedzy" wszystkich obserwatorów rozmieszczonych w punktach przestrzeni $(Z, \mathcal{T})$ jest „pełnią wiedzy" o prawdziwości zdań geometrycznych w modelu w toposie $\mathcal{T}$-obiektów.
Matematycznie:

[99] Tak naprawdę, to **Set** jest obiektem końcowym w kategorii wszystkich toposów Grothendiecka i morfizmów geometrycznych. Ograniczamy się do toposów H-obiektów (i modeli geometrycznych w takich toposach jedynie ze względu na względną prostotę uzasadnień pewnych faktów

[100] *„there's a method to his madness" , W. Shakespeare, Hamlet.*

[101] Trochę oszukuję: każdy zupełny filtr pierwszy zbiorów otwartych jest filtrem otoczeń pewnego punktu przestrzeni wtedy, gdy ta przestrzeń jest trzeźwa.

„geometryczna nierówność $\phi(\bar{x}) \vdash \psi(\bar{x})$ jest prawdziwa w modelu $\underline{M}$ w toposie $\mathcal{T}$-obiektów w dokładnie wtedy, gdy jest prawdziwa we wszystkich teoriomnogościowych mutacjach $\hat{z}^*(\underline{M})$ wyznaczonych przez punkty przestrzeni $(Z, \mathcal{T})$".

(Zarys dowodu: nierówność geometryczna $\phi(\bar{x}) \vdash \psi(\bar{x})$ NIE JEST *prawdziwa w modelu $\underline{M}$ posadowionym na $\mathcal{T}$-obiekcie $\underline{A}$ jeśli dla pewnego punktu $\bar{a} \in A^n$ zbiór otwarty $\phi(\bar{a}) = [\phi(\bar{x}))](\bar{a})$ nie jest podzbiorem $\psi(\bar{a})$. To oznacza, że istnieje punkt $z_0 \in Z$, którego otoczeniem jest zbiór $\phi(\bar{a})$, ale nie jest nim zbiór $\psi(\bar{a})$. Tak więc w teoriomnogościowym modelu $\hat{z}_0^*(\underline{m})$ ...[102])*

Czy można porzucić założenie, że rozważamy model w toposie $\mathcal{T}$-obiektów dla pewnej przestrzeni topologicznej $(Z, \mathcal{T})$ i pokazać, że prawdziwość nierówności geometrycznej w pojedynczym modelu w dowolnym toposie (lub: toposie H-obiektów) jest równoważna jej prawdziwości we wszystkich jego teoriomnogościowych mutacjach? Szczerze mówiąc - nie wiem[103]. Znam tylko podobne, ale jednak nieco inne twierdzenie:

„nierówność geometryczna $\phi(\bar{x}) \vdash \psi(\bar{x})$ jest prawdziwa w modelu uniwersalnym teorii T (czyli w każdym modelu tej teorii w dowolnym toposie) dokładnie wtedy, gdy jest prawdziwa w każdym jej modelu teoriomnogosciowym"[104].

Równoważnie: dowodem prawdziwości nierówności geometrycznej $\phi(\bar{x}) \vdash \psi(\bar{x})$ we wszystkich modelach rozważanej teorii geometrycznej jest klasyczny dowód zdania $\forall_{\bar{x}}(\phi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))$.

> Nie należy pochopnie wnioskować, że teoria mnogości i jej logika jest „najlepszą z możliwych" bo pozwala dowodzić geometrycznych prawd uniwersalnych. Jest wręcz odwrotnie: ten wynik pokazuje, że takie dowodzenie jest „najsłabsze z możliwych".
> Poszukiwanie „uniwersalnych prawd geometrycznych" to tylko wstępny etap, minimum wiedzy o modelach teorii geometrycznej w ustalonym *a priori* toposie, odmiennym do **Set** matematycznym uniwersum.
> Włączenie do rozważań morfizmów geometrycznych to tylko wzbogacenie „kategoryjnerj teorii modeli", pozwalające badać zależności między modelami w różnych toposach.
> Co więcej: badając modele T w ustalonym *a priori* toposie H-obiektów możemywzbogacić język i teorię T dodając do niej zdaniową teorię geometryczną opisująca algebrę H (str. 56). Dzięki temu w języku opisu teorii pojawiają się nowe nierówności geometryczne, nieobecne w języku opisu uniwersalnych nierówności geometrycznych, np. $\exists_{\bar{x}}\phi(\bar{x}) \vdash v_p$ czy też $v_\vdash \exists_{\bar{x}}\phi(\bar{x})$, gdzie $p \in H$.

Kłopot z teorią ciał

Teoria ciał to wzbogacenie teorii pierścieni przemiennych z jedynką o aksjomat który mówi, że *„każdy element ciała różny od zera jest odwracalny"*. Formalnie ten warunek zapiszemy tak: $\forall_x((x = 0) \vee \exists_y xy = 1)$ lub tak: $x(\neg(\exists_y xy = 1) \to (x = 0)$.
To, że te formalne zapisy są równoważne udowodni ok. 43,52% studentów. Ale tylko dlatego, ze żyją w świecie klasycznej logiki.
Przyjmujac pierwsze sformułowanie tego aksjomatu otrzymamy geometryczną teorię ciał. Jeśli wybierzemy drugie sformułowanie, to już nie.

Która z tych dwóch wersji teorii ciał jest „właściwa"?
W toposie snopów nad $\mathcal{R}$ dedekindowski obiekt liczb rzeczywistych to snop rzeczywistych funkcji ciągłych. Oczekujemy - chcielibyśmy - że jest to ciało - model teorii ciał w tym toposie (gdzie dodawanie i mnożenie funkcji definiujemy „punktowo"). Ale ta struktura jest modelem niegeometrycznej teorii ciał a nie jest modelem jej geometrycznej wersji! Pominiemy dowód, który można znaleźć w [22].

> Która z dwóch wersji teorii ciał jest „właściwa"?
> Z jednej strony uznajemy uniwersalny charakter konstrukcji Dedekinda. Z drugiej chcielibyśmy by geometryczność teorii była synonimem jej uniwersalności.

[102] Dokończ.
[103] Sądzę, że tak nie jest
[104] To twierdzenie (nieco inaczej sformułowane), mozna znaleźć w [22] str.569.

Dodatek: logika toposa presnopów

Matryca wartości logicznych w $PSh(\mathbf{C})$ to, jak w każdym toposie, algebra Heytinga podobiektów obiektu końcowego - presnopów postaci $\underline{1}_{\mathcal{K}}\colon \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$, gdzie:

1. $\mathcal{K} \subseteq Ob(\mathbf{C})$ to klasa $\mathbf{C}$-obiektów taka, że jeśli $A \in \mathcal{K}$ $f\colon B \to A$, to $B \in \mathcal{K}$,

2. $\underline{1}_{\mathcal{K}}(A)$ jest zbiorem jednoelementowym, gdy $A \in \mathcal{K}$ i jest zbiorem pustym, w przeciwnym wypadku.

Wydaje się, że w kategorii $\mathbf{C}$ posiadającej nieskończenie wiele obiektów, klas obiektów spełniających warunek 1. jest nieskończenie wiele. Ale tak być nie musi:
gdy $\mathbf{C} = \mathbf{Fin}$ to są trzy takie klasy: klasa wszystkich zbiorów skończonych, klasa zbiorów skończonych niepustych, i klasa pusta. Tym samym algebra wartości logicznych w $PSh(\mathbf{Fin})$ to trójelementowy łańcuch.

Zanim opiszemy klasyfikator podobiektów przyjrzyjmy się przykładowi, który wiele wyjaśni.

Presnop $F\colon \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ jest podobiektem presnopa $G\colon \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ jeśli $F(A) \subseteq G(A)$ i dla każdego $\mathbf{C}$-obiektu A i $F(f)(a) = G(f)(a)$ dla każdego morfizmu $f\colon B \to A$ i $a \in F(A)$[105]. Na pytanie: *„czy element $a \in G(A)$ należy do podzbioru $F(A)$?”* można odpowiadać dychotomicznie: należy lub nie. Ale można też odpowiedzieć bardziej subtelnie: *„wprawdzie $a \notin F(A)$, ale dla pewnych $\mathbf{C}$-morfizmów $f\colon B \to A$, $G(f)(a) \in F(B)$”.* Jeszcze lepszą, bo bardziej precyzyjną odpowiedzią jest stwierdzenie, że $\mathbf{C}$-morfizmy o kodziedzinie A które mają tę własność to... sito dla obiektu A: $\lambda^F_A(a) = \{f \in \mathbf{C}(B, A)\colon B \in Ob\mathbf{C}, G(f)(a) \in F(B)\}$.
To pomaga zrozumieć opis presnopa-klasyfikatora podobiektów: to presnop $\Omega\colon \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ taki, że $\Omega(A)$ to zbiór wszystkich sit dla $\mathbf{C}$-obiektu A[106].
Morfizm $true\colon \underline{1} \to \Omega$ wybiera z każdego ze zbiorów $\Omega(A)$ „pełne sita” - presnop reprezentowalny $\mathbf{C}(\_, A)$.

W naszym przykładzie: rodzina $\lambda^F = (\lambda^F_A\colon A \in Ob(\mathbf{C}))$ jest transformacją naturalną z G do Ω. Λ^F jest podobiektem G reprezentowanym kanonicznie przez F jeśli uda nam się pokazać, że prostokąt:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\lambda^F"] & \Omega \\ F \arrow[u] \arrow[r] & \underline{1} \arrow[u, "true"'] \end{tikzcd}$$

jest pullbackiem. To nietrudne jeśli wiemy, że granice w toposach presnopów konstruujemy „punktowo” (*„pointwise”*)[107]

Działania w algebrze Heytinga podobiektów dowolnego presnopa G opiszemy korzystając z ich kanonicznej reprezentacji.

Działania geometryczne opisujemy „punktowo”: dla dowolnych podobiektów $F, F_1, F_2 \subseteq G$ i $\mathbf{C}$-obiektu A:

$$(F_1 \vee F_2)(A) = F_1(A) \cup F_2(A), \quad (F_1 \wedge F_2)(A) = F_1(a) \cap F_2(A),$$

$$(\exists F)(A) = \begin{cases} \{*\} & gdy\ F(A) \neq \emptyset \\ \emptyset & gdy\ F(A) = \emptyset \end{cases}$$

---

[105]Dokładniej: f jest kanoniczną reprezentacją podobiektu bo, jak wiemy, podobiektem G jest morfizm z G do klasyfikatora podobiektów Ω.

[106]Opis działania presnopa Ω na morfizmach i wykazanie, że ta definicja jest poprawna to zadanie, które wykonuje się raz w życiu. Ja już to zrobiłem... .

[107]Tzn. rozważany prostokąt (zbudowany z transformacji naturalnych) jest pullbackiem $PSh(\mathbf{C})$ dokładnie wtedy, gdy pullbackami w $\mathbf{Set}$ są prostokąty

$$\begin{tikzcd} G(A) \arrow[r, "\lambda^F_A"] & \Omega(A) \\ F(A) \arrow[u] \arrow[r] & \underline{1}(A) = \{*\} \arrow[u, "true_A"'] \end{tikzcd}$$

dla każdego $\mathbf{C}$-obiektu A.

Operacje niegeometryczne - implikacje i kwantyfikator uniwersalny - definiujemy tak:

$$(F_1 \to F_2)(A) = \{a \in G(A) \colon \forall_{f \colon B \to A} : (G(f)(a) \in F_1(A) \longrightarrow G(f)(a) \in F_2(A)\}$$

$$(\forall F)(A) = \begin{cases} \{*\} & F(B) = G(B) \text{ dla każdego } f \colon B \to A \\ \emptyset & \text{w przeciwnym przypadku}^{108} \end{cases}$$

Ostatni przykład: teoria liczby rzeczywistej

Teoria liczby rzeczywistej to zdaniowa teoria geometryczna $Th(\mathcal{R})$ definiowana tak:[109]

- zmienne zdaniowe teorii $Th(\mathcal{R})$ odpowiadają parom liczb wymiernych - $\Sigma_0 = \{p_{sr} \colon s, r \in Q\}$,

- zbiór aksjomatów tej teorii jest nieskończony:

dla każdej czwórki liczb wymiernych s, r, s_1, r_1 mamy dwa aksjomaty - nierówności geometryczne:

$$p_{sr} \wedge p_{s_1 r_1} \vdash \bigvee\{p_{mn} : max(s, s_1) < m < n < min(r, r_1)\},$$

oraz

$$\bigvee\{p_{mn} : max(s, s_1) < m < n < min(r, r_1)\} \vdash p_{sr} \wedge p_{s_1 r_1},$$

ponadto dla każdej pary liczb wymiernych (s, e) gdzie $e > 0$, aksjomatem jest nierówność geometryczna:

$$\top \vdash \bigvee\{p_{s-e,s+e} \colon s \in Q\}$$

Można dowieść, że związana z tą teorią algebra Heytinga (*locale*) $H(Th(\mathcal{R}))$ jest „taka sama" (izomorficzna) jak zupełna algebra Heytinga otwartych podzbiorów prostej rzeczywistej $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$. Stąd:

topos $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$-obiektów to topos klasyfikujący dla teorii liczby rzeczywistej.

> Uniknijmy nieporozumień: to, że topos klasyfikujący dla teorii $Th(\mathcal{R})$ jest wyznaczony przez algebrę $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ nie wspiera tezy, że prosta rzeczywista to (transcedentny) obiekt pierwotny, a cała reszta to tylko opowieść o tym obiekcie w innym języku.
>
> To nie tak: pierwotne jest „dzieło człowieka" - teoria $Th(\mathcal{R})$. Związaną z nią zupełną algebrę Heytinga można skonstruować bez odwołań do topologii prostej rzeczywistej. Użycie algebry $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ do opisu toposa klasyfikującego tę teorię wynika wyłącznie z chęci ułatwienia życia wyznawcom teorii mnogości.

Topos $H(Th(\mathcal{R}))$-obiektów to bezpunktowe kontinuum opisane w języku zdaniowej logiki geometrycznej i teorii kategorii. Modelem generycznym tej teorii jest algebra Heytinga wartości logicznych tego toposa.

Uwzględniając izomorfizm $H(Th(\mathcal{R}) \cong \mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ możemy utożsamić, modele teroii $Th(\mathcal{R})$ w toposach H-obiektów z f-morfizmami, których dziedziną jest algebra $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$. W szczególności, modele teoriomnogościowe tej teorii są wyznaczone przez f-morfizmy postaci $f \colon \mathcal{T}_{\mathcal{R}} \to \{\bot < \top\}$, które, jak wiemy, odpowiadają zupełnym filtrom pierwszym w $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$. A te filtry są wyznaczone przez dedekindowskie liczby rzeczywiste.

> Teoriomnogościowe modele $Th(\mathcal{R})$, ,morfizmy geometryczne, f-morfizmy, zupełne filtry pierwsze, wreszcie dedekindowskie liczby rzeczywiste... . Wielość opisów nie jest wadą, ale zaletą. Uznanie jednego z nich za „właściwy", za opis definiujący obiekt, jest kwestią pozamatematyczną.Teoriomnogościowiec uznający prymat ZFC i transcedentny rodowód dedekindowskiej definicji powie zapewne z satysfakcją, że:
>
> *Teoriomnogościowym modelem $Th(\mathcal{R})$ jest pojedyncza „dedekindowska" liczba rzeczywista.*
>
> Nie trzeba się tym zgadzać.
>
> Liczba rzeczywista jest obiektem matematycznym opisanym przez jej relację ze zbiorem (obiektem) liczb wymiernych. Tym opisem jest teoria geometryczna $Th(\mathcal{R})$ Liczby rzeczywiste istnieją nie tylko w **Set** ale i w innych matematycznych uniwersach.

---

[108] Opisujemy tu tylko najprostszą kwantyfikacje - jako operatory przyporządkowujące podobiektom wartości logiczne.

[109] Tę definicję znajdziemy w [48]. Podkreślmy: to *„theory of a real number"* a nie *„theory of real numbers"*!. Skąd taka nazwa stanie się jasne już za chwilę.

> Powszechnie akceptowana metafora geometryczna - „liczby rzeczywiste to punkty prostej" oznacza tylko tyle, że w ramach ZFC można w zbiorze teoriomnogościowych modeli $Th(\mathcal{R})$ zdefiniować dobry porządek. Marząc o powtórzeniu tego wyniku w innym toposie należy najpierw zdefiniować w nim pojęcie dobrego porządku[110].

Zauważmy też, że modele $Th(\mathcal{R})$ w toposie snopów nad przestrzenią topologiczną $(Y, \mathcal{T})$ odpowiadają jednoznacznie ... rzeczywistym funkcjom ciągłym działającym na przestrzeni $(Y, \mathcal{T})$.

Czy liczby rzeczywiste - modele teorii $Th(\mathcal{R})$ w toposach H-obiektów to elementy obiektów liczb rzeczywistych w tych toposach?

I tak i nie. Tych liczb jest trochę za mało. To tylko elementy globalne obiektu liczb rzeczywistych. Musimy jeszcze dołączyć lokalne liczby rzeczywiste:

lokalna liczba rzeczywista w toposie H-obiektów, dla której miarą istnienia jest wartość logiczna $q \in H$ to f-morfizm postaci $m\colon H(Th(\mathcal{R})) \to q_\downarrow = \{p \in H : p \leqslant q\}$ (str.51).

Zbiór wszystkich lokalnych liczb rzeczywistych staje się H-obiektem, jeśli miarę równości w tym zbiorze zdefiniujemy tak: *dla dowolnej pary lokalnych liczb rzeczywistych - f-morfizmów* $(m_i\colon H(Th(\mathcal{R})) \to q^i_\downarrow : q_i \in H, i = 1, 2)$ *:*

$m_1 \approx m_2$ to największa wartość $r \in H$, $r \leqslant q^1 \wedge q^2$ taka, że $m_1(a) \wedge r = m_2(a) \wedge r$ dla dowolnego $a \in H(Th(\mathcal{R}))$

Lokalne liczby rzeczywiste z tak zdefiniowaną miarą równości to obiekt liczb rzeczywistych w toposie H-obiektów[111].

Próba podsumowania

Teoria toposów to słoń" - P. Johnstone (str. 3). Grothendieckowi ten słoń przypomina przestrzeń topologiczną:

„a topos is a generalized space".

Opisując toposy H-obiektów nie porzucamy wizji Grothendiecka, ale jesteśmy bliżej takiego słonia, jakim go widzi Lawvere. Jego punkt widzenia trafnie opisuje przywołane już wcześniej stwierdzenie Goldblatta:

„a topos is a category that looks and behaves like **Set***".*

> *„Grothendieck sheaf toposes is the notion relevant for applications in geometry and geometric logic, whereas the notion of elementary toposes is relevant for more general applications in logic*[112]

A teorie geometryczne to dobre „spoiwo" obu tych wizji:

„a topos is (the extensional essence of) a first-order (infinitary) geometric theory".

Jeśli te trzy zdania są choćby w części zrozumiałe, to bardzo dobrze... . Jednak muszę ostrzec: teoria toposów H-obiektów - *„theory of localic toposes"* - to najłatwiejsza część teorii toposów (na dodatek przedstawiona tu w sposób uproszczony i powierzchowny). Z toposem spoza tej klasy spotkamy się w następnym, ostatnim rozdziale.

„Koniec i bomba, a kto czytał ten (wie, co to słonia) trąba"
- W.Gombrowicz, Ferdydurke (z moim wtrętem)

[110] To jednak ryzykowne jeśli pamiętamy, jak blisko od „dobrego porządku" do pewnika wyboru.
[111] Wydaje się, że w ten sam sposób można zbudować obiekt liczb rzeczywistych w dowolnym toposie Grothendiecka (a nie tylko w toposach H-obiektów). Ale tego nie sprawdziłem.
[112] (https://ncatlab.org/nlab/show/topos).

Rozdział 4

Topos Hylanda i realizowalność Kleene'ego

The pleasing feature of the effective topos is that in it, ideas about effectivity in mathematics seem to have their natural home.
J.M.E.Hyland [17]

Topos Hylanda[1] to rozwinięcie idei *realizowalności* Kleene'ego. Tak zazwyczaj się pisze nie tłumacząc, „co autor miał na myśli". Spróbujemy to wyjaśnić, wykraczając poza prostą prezentację definicji (czyli przepisanie ich z oryginalnych prac).

Naszą opowieść rozpoczniemy tak:

> „Rzeczy" (wielkości, fakty, jedności) to obiekty uniwersum. Stają się dostępne, gdy są opisane, nazwane, czyli „zakodowane jako słowo". Te opisy to *realizacje* rzeczy[2].

Nie trzeba jednak zakładać, że pojedynczy opis rzeczy jednoznacznie ją identyfikuje - rzecz może być opisana, zrealizowana na wiele sposobów.
Rzeczy grupujemy - arbitralnie(?) - w kolekcje - *typy*. Wyróżnikiem (spoiwem) typu jest funkcja, która każdej rzeczy z rozważanej kolekcji przypisuje jej opisy.[3]. Opisy to słowa (teksty).

O uniwersum rzeczy myślimy nie jako o pewnym zbiorowisku tak opisanych typów ale jako o kategorii: interesują nas nie tylko typy, ale i związki między nimi - morfizmy. Te morfizmy to funkcje przyporządkowujące rzeczom (pewnego typu) rzeczy (innego typu), ale tylko te, które można realizować wykorzystując opisy rzeczy: morfizm ma być realizowany jako przekształcenie opisów jednej rzeczy w opisy drugiej.
Jeśli dodatkowo zażądamy, by nasz model był konstruktywny, to przekształcanie opisów powierzymy maszynom Turinga.

Możemy pójść krok dalej i zaproponować ockhamowską wersję tej kategorii: słowa-opisy zastąpić liczbam naturanymi a maszyny Turinga realizujące morfizmy - funkcjami obliczalnymi - „Kleene zastępuje Turinga". Ponieważ funkcje obliczalne umiemy ponumerować to - upraszczając nasz opis do granic możliwości - można uznać, że morfizmy są też realizowane przez liczby naturalne.

---

[1] J. Hyland, angielski matematyk, zdefiniował ten topos w 1982 roku. Oczywiście nie nazywał go „toposem Hylanda". Używał nazwy *„effective topos"*. Słowo *„effective"* można tłumaczyć bądź jako „efektywny" „rzeczywisty" lub „skuteczny". Na stronie *Dictionary.com* znajdujemy takie objaśnienie znaczenia tego przymiotnika: *adequate to accomplish a purpose; producing the intended or expected result* lub *actually in operation or in force.* Przyznam, że nie znam powszechnie akceptowanego polskiego odpowiednika tej nazwy. Dlatego pozwoliłem sobie na unik i użycie określenia *topos Hylanda.* Nasz opis tego toposu opiera się głównie na [17], [28] i [46].

[2] Z tą ideą zetknęliśmy się już mówiąc o λ-rachunku. Pokazaliśmy, jak korzystając z λ-termów opisać (kodować) „typ boolowski" - czyli wielkości boolowskie `true, false` wraz z operacjami logicznymi. Pokazaliśmy jak kodować liczby naturalne i funkcje obliczalne.

[3] Unikam terminu „zbiór" by nie wpaść w pułapkę „myślenia teoriomnogościowego". Jeśli kogoś - znawcę *teorii typów* - razi użycie w tym kontekście terminu „typ", to przepraszam. W literaturze można też spotkać termin *assembly*

4.1 Kategoria zbiorów efektywnych

Powiedzmy to samo używając języka teorii kategorii. Ustalmy, że symbolem $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ oznaczamy zbiór wszystkich podzbiorów liczb naturalnych. Zdefiniujemy kategorię *efektywnie reprezentowanych zbiorów* - **ESet**.

Obiekty kategorii **ESet** *(„typy") to pary* $(A, E\colon A \to \mathcal{P}(\mathbf{N}))$ *taka, że* $E(a) \neq \emptyset$ *dla każdego* $a \in A$. *Morfizm z* (A, E^A) *do* (B, E^B) *to funkcja* $f\colon A \to B$ *dla której można wskazać funkcję obliczalną* $\phi\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *taka, że* $\phi(E^A(a)) \subseteq E^B(f(a))$ *dla dowolnego* $a \in A$[4].

> Mówimy wtedy, że *morfizm* f *jest instancją* ϕ *i że* ϕ *realizuje* f.
> Jeśli mamy ustaloną numerację funkcji obliczalnych $n \rightsquigarrow \phi_n$ to mówimy, że *„n realizuje morfizm $f\colon (A, E^A) \to (B, E^B)$" jeżeli n-ta funkcja obliczalna ϕ_n realizuje f*[5].

Zainteresowanych analizą struktury tej kategorii odsyłam do [28].

Dodatek (krok w bok): polimorfizmy

Spróbujmy wyjaśnić, dlaczego kategoria **ESet** jest warta naszej uwagi.
Morfizm $f\colon (A, E^A) \to (B, E^B)$ w **ESet** może być realizowany przez wiele funkcji obliczalnych. To jasne[6]. Ale jest też odwrotnie: wprawdzie funkcja obliczalna ϕ może realizować co najwyżej jeden morfizm między USTALONĄ parą obiektów, ale może realizować wiele morfizmów działających między RÓŻNYMI parami obiektów - może mieć wiele *instancji*. Np. funkcja identycznościowa $id\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ realizuje wszystkie morfizmy identycznościowe. Dlatego mówimy, że:

„każda (częściowa) funkcja obliczalna $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *jest* POLIMORFIZMEM *w kategorii* **ESet**".

> Polimorfizmy pojawiły się w informatyce teoretycznej pod koniec lat sześćdziesiątych XX w. za sprawą Ch. Strachey'a w odpowiedzi na to, co było obecne w praktyce programistycznej[7].

> W czym rzecz? *„Wstawienia elementu a na początek listy $[a_1, \dots, a_n]$ - $(a, [a_1, \dots, a_n]) \rightsquigarrow [a, a_1, \dots, a_n]$ - można opisać tak: „napisz znak „[", potem przepisz „a" a następnie przepisz listę $[a_1, \dots, a_n]$ zastępując nawias otwierający „[" przecinkiem".*
> Tak opisana procedura jest zrozumiała bez względu na to, czy mówimy o listach liczb, słów, „listach list" czy listach dowolnych innych obiektów. Skoro tak, to chciałoby się dysponować językiem programowania w którym można napisać pojedynczy program „wstawiania elementu na początek listy"i który można aplikować (zastosować) do wszelkich list - niezaleznie od tego, czy elementami takiej listy są liczby (całkowite, rzeczywiste) , litery, słowa, funkcje itp. itd.

Systemem formalnym opisującym obliczenia z użyciem polimorfizmów (w stylu Curry'ego, czyli utożsamiając proces obliczenia z redukcją wyrażeń) jest np. *System F* - rozszerzenie λ-rachunku z typami (str. 8). w którym dodatkowo pojawia się konstruktor „typów polimorficznych" i związane z nim reguły budowy „polimorficznych λ-termów" [1].

O ile jednak λ-rachunek z typami można interpretować w **Set** (i w każdej kategorii kartezjańsko-domkniętej) to wskazanie takiej kategoryjnej interpretacji dla *Systemu F* nie jest proste. Spróbujmy wyjaśnić dlaczego[8]. Relacja między polimorfizmem a jego aplikacjami - np. relacja między proce-

[4] A to zbiór „rzeczy" a $E(a)$ to zbiór opisów rzeczy a. Mówiąc „funkcja obliczalna" mamy na uwadze wszelkie (nie tylko totalne) funkcje obliczalne. Zawieranie $\phi(E^A(a)) \subseteq E^B(f(a))$ oznacza, że dla dowolnego $m \in E^A(a)$, $\phi(m)$ jest określone i $\phi(m) \in E^B(f(a))$.

[5] W [28] tę kategorię nazywa się *kategorią ω-zbiorów* a w [**?**] - *category of assemblies*".

[6] Nieformalnie: morfizm f to „zadanie programistyczne" a funkcja obliczalna ϕ która ją realizuje to „program". To samo zadanie można rozwiązać na wiele sposobów... .

[7] Christofer Strachey (1916-1975, brytyjski teoretyk informatyki) wyróżnił dwie klasy polimorfizmów: *polimorfizmy parametryczne* i *„polimorfizmy ad hoc*. Teraz interesują nas te pierwsze. Polimmorfizmy *ad hoc* też są ciekawe, ale to raczej element pragmatyki języka a nie jego struktury.

[7] Współczesne języki programowania - np. *Haskell* - dają taką możliwość. Możemy w nich tworzyć *programy polimorficzne* które można wykorzystywać w sposób zgodny z opisanymi tu oczekiwaniami.

[8] Oczywiście dopuszczam się tu daleko idących uproszczeń.

durą *„wstawiania elementu na początek listy”* a *„wstawianiem liczby na początek listy liczb”*, *„wstawianiem słowa na początek listy słów”* itd. - jest relacją „jeden do wielu”. Interpretując *System F* w kategorii zbiorów (czy też w jakiejkolwiek innej kategorii kartezjańsko domkniętej) można mieć nadzieję, że tę szczególną relację można modelować za pomocą produktów: wszak element produktu - morfizm $e\colon \underline{1} \to \Pi(A_i\colon i \in I)$ wyznacza rodzinę elementów $e_i\colon \underline{1} \to \Pi(A_i\colon i \in I) \to A_i$ [9]. Ale to nie jest dobry pomysł bo to oznacza, że każdy zbiór elementów różnych typów wyznacza polimorfizm - element produktu tych typów. To gubi istotę problemu gdyż redukuje relację między polimorfizmem i jego aplikacjami do relacji między zbiorem elementów i jego elementami. A przecież polimorfizm to nie dowolna rodzina morfizmów lecz taka, która ma „wspólny rdzeń”. Np. rodzina wszystkich morfizmów identycznościowych w kategorii **ESet** ma „wspólny rdzeń” - funkcję identycznościową $id\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ która realizuje te wszystkie morfizmy.

Kategoria **ESet** jest ważna właśnie dlatego, że pozwala rozwiązać ten problem - dostarcza *semantyki denotacyjnej* dla *Systemu F* w którym relacja między polimorfizmem i jego aplikacjami jest modelowana zgodnie z oczekiwaniami.
Pokażemy, dla przykładu, jak w **ESet** zbudować obiekt reprezentujący klasę „polimorfizmów endomorficznych” - funkcji rekurencyjnych, które dla dowolnie wybranego obiektu $\underline{A} \in \mathbf{ESet}$ realizują pewien morfizm z $\underline{A}$ do $\underline{A}$. Jest to możliwe, bo kategoria **ESet** ma szczególną własność: można w niej wyróżnić pełną podkategorię PER której obiekty tworzą zbiór wraz z zdefiniować funktor $F\colon \mathbf{ESet} \to PER$ taki, że dowolny morfizm $f\colon \underline{A} \to \underline{A}$ jest realizowany przez tę samą funkcję rekurencyjną co $F(f)$[10].

To oznacza, że wystarczy rozwiązać nasz problem w PER - skonstruować w tej małej podkategorii obiekt reprezentujący polimorfizmy endomorficzne w PER.

PER to skrót od *Partial Equivalence Relation*: każdy obiekt tej podkategorii jest wyznaczony przez pewną relację równoważności na pewnym podzbiorze zbioru liczb naturalnych. Dlatego obiekty PER tworzą zbiór a nie klasę. Obiekt reprezentujący polimorfizmy endomorficzne w PER jest wyznaczony przez parę $(R \subset \mathbf{N}, \tau \subset R^2)$ gdzie $R \subseteq \mathbf{N}$ to zbiór numerów funkcji rekurencyjnych opisujących polimorfizmy endomorficzne w PER a τ to relacja równoważności[11] Podkreślmy: ta definicja jest możliwa i poprawna tylko dlatego, że w PER obiekty i morfizmy tworzą zbiory (a nie klasy)

Tyle o polimorfizmach. Na koniec istotna uwaga: niech nam się nie zdaje, że wiążąc funkcje z obliczalnymi realizacjami zmniejszyliśmy teoriomnogościowe uniwersum. Przeciwnie: łatwo zauważyć, że kategorię **Set** można zanurzyć w kategorię **ESet** przyporządkowując każdemu zbiorowi A obiekt $\nabla(A) = (A, \approx_A)$, taki, że:

$$[a \approx_A b] = \begin{cases} \mathbf{N} & a = b \\ \emptyset & a \neq b \end{cases}$$

. Wówczas dowolna funkcja $f : A \to B$ jest morfizmem z $\nabla(A)$ do $\nabla(B)$ (realizowanym przez każdą wszędzie określoną funkcję rekurencyjną np. przez funkcję identycznościową).

> W $\nabla(\mathbf{Set})$ każda funkcja rekurencyjna realizuje każdy morfizm co oznacza, że ... „realizacja” nie daje żadnych informacji o tym morfizmie. Ot, subtelności języka matematyki... .

Kategoria **ESet** ma wiele cech oczekiwanych przez teoretyków informatyki. Jest też niebanalna z matematycznego punktu widzenia: jest *kartezjańsko domknięta* - ma skończone produkty i obiekty funkcyjne. Jednak dla tych, którzy chcą budować matematykę konstruktywną opartą na obliczalności „od podstaw”, kategoria **ESet** ma zasadniczą wadę - nie jest toposem[12].

[9] Wówczas „typy polimorficzne” byłyby reprezentowane jako produkty zbiorów reprezentujacych „zwykłe” typy.

[10] Naukowo: podkategoria PER jest małą refleksywną podkategorią **ESet** [28].

[11] $n \in R$ gdy dla dowolnego obiektu $\underline{C}$ w PER istnieje morfizm $f\colon \underline{C} \to \underline{C}$ realizowany przez funkcję ϕ_n. $n\,\tau\,m$ gdy funkcje ϕ_n i ϕ_m realizują ten sam endomorfizm dla każdego obiektu $\underline{C} \in PER$. Zainteresowanych szczegółami odsyłam do [28]. Rozważana tu tu klasa wszystkich polimorfizmów epimorficznychnie ma większego (żadnego) znaczenia praktycznego, ale nie o to tu przecież chodzi.

[12] W toposie każdy morfizm, który jest jednocześnie mono- i epimorfizmem musi być izomorfizmem. Tymczasem w

Ale można ją poszerzyć - „zanurzyć" w *topos Hylanda* - topos **Eff**.

4.2 Topos Hylanda

> „∇(**Set**) *should be regarded as the world of classical mathematics within* **Eff**." *[17]* . Eff zawiera w sobie kategorię **ESet** (i tym samym kategorię zbiorów). W ten sposób **Set** stał się fragmentem nowego większego matematycznego uniwersum, fragmentem, w którym „zapomniano" o obliczalności.

Zanim przedstawimy definicję tego toposa, ustalmy pewną, dowolnie wybraną, numerację funkcji obliczalnych $n \rightsquigarrow \phi_n$ i pewne „kodowanie par liczb" - bijekcję $< \_, \_ >: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ [13].

Szczęśliwie, formalna definicja toposu Hylanda przypomina znaną nam definicję toposa H-obiektów. Na przykład obiekty tego toposa definiujemy tak:

> *Obiekty to pary* $(A, \approx_A : A \times A \to \mathcal{P}(\mathbf{N}))$ *takie, że dla dowolnych* $a, b, c \in A$:
> $(a \approx b) \preceq_A (b \approx a)$
> $((a \approx b) \wedge (b \approx c)) \preceq (a \approx c)$

Mówimy, że *liczba n realizuje (opisuje, uzasadnia) „równość" $a \approx b$* gdy $n \in a \approx b$. Piszemy $\mathbf{E}(a)$ zamiast $(a \approx a)$.

Podobieństwo do definicji H-obiektu jest widoczne. Ale aby właściwie interpretować ten zapis musimy poznać znaczenie symboli $\preceq$ i $\wedge$.

1. $\preceq_A$ to binarna relacja na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbf{N})^A$ - zbiorze wszystkich funkcji działających ze zbioru A do $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ zdefiniowana tak: dla dowolnych funkcji $f, g : A \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$

$f \preceq_A g$ gdy istnieje funkcja obliczalna ψ taka, że dla każdego $a \in A$, $\psi(f(a)) \subseteq g(a)$ [14]

> $f \preceq_A g$ gdy istnieje WSPÓLNA dla wszystkich punktów $a \in A$ procedura translacyjna liczb ze zbiorów $f(a)$ na liczby ze zbiorów $g(a)$. Istotę żądania, by ta procedura była wspólna, pokazuje taki przykład: *zdefiniujmy funkcje* $f, g : \{0,1\} \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$ *tak:*
> $f(0) = \mathbf{N} \setminus C,\ f(1) = C$,
> $g(0) = \{0\},\ g(1) = \{1\}$,
>
> *gdzie $C \subseteq \mathbf{N}$ to dowolnie ustalony niepusty zbiór. Łatwo wskazać parę funkcji obliczalnych ϕ_0, ϕ_1 takich, że $\phi_0(f(0)) \subseteq g(0)$, $\phi_1(f(1)) \subseteq g(1)$. A wskazanie pojedynczej funkcji obliczalnej ψ takiej, że $\psi(f(0)) \subseteq g(0)$, $\psi(f(1)) \subseteq g(1)$ jest możliwe tylko wtedy, gdy C jest zbiorem rozstrzygalnym!*

2. dla dowolnych $f, g \in \mathcal{P}(\mathbf{N})^A$.

$$(f \wedge g)(a) = \{< n, m >: n \in f(a), m \in g(a)\}$$

Warunki definiujące obiekty odczytamy teraz tak:

- pierwszy warunek jest spełniony, gdy istnieje funkcja obliczalna, która - dla dowolnych $a, b \in A$ - przekształca dowolną realizację $a \approx b$ w realizację $b \approx a$.

- drugi warunek jest spełniony, gdy istnieje funkcja obliczalna ϕ która - dla dowolnych $a, b \in A$- przekształca każdą parę realizacji $a \approx b$ i $b \approx c$ w realizację $a \approx c$.

> *Punkty zbioru A należy traktować jako wyrażenia oznaczające elementy jakiegoś „rzeczywistego" zbioru. Zbiór $a \approx_A b$ jest zbiorem kodów dowodów na to, że element oznaczony przez a jest równy elementowi oznaczonemu przez b". - E.Robinson,G.Rossolini, Colimit completions and the effective topos, J.of Symb.Log. vol.55, 1990.)*
> Nie trzeba się z tym zgadzać - to tylko jedna z możiwych interpretacji.

ESet tak nie jest [28].

[13] Można np. przyjąć numerację Cantora: $< n, m >= \frac{1}{2}(m+n)(m+n-1)+n$.
To ustalenie obowiązuje odtąd w całym rozdziale.

[14] *O ile to nie spowoduje nieporozumień, będę pisać $f(a) \preceq g(a)$ zamiast $f \preceq_A g$. Pozwoli to uprościć formalne zapisy i ułatwić ich odczytywanie.*

Definicje morfizmów w toposie Hylanda poprzedzimy definicją *r-morfizmów* - funkcji reprezentujących morfizmy:

> *r-morfizmy z* $(A, \approx_A)$ *do* $(B, \approx_B)$ *to funkcje* $f\colon A \times B \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$ *takie, że:*
> $$\big(f(a,b) \wedge ([a \approx_A a_1) \wedge (b \approx_B b_1)\big) \preceq f(a_1, b_1),$$
> $$f(a,b) \preceq (\mathbf{E}(a) \wedge \mathbf{E}(b),$$
> $$f(a,b) \wedge f(a,b_1) \preceq (b \approx_B b_1),$$
> $$\mathbf{E}(a) \preceq \textstyle\bigcup_{b \in B} (\mathbf{E}(b) \wedge f(a,b)).$$

Z drugiego warunku wynika, że $\mathbf{E}(a) \wedge f(a,b) \preceq_A \mathbf{E}(b)$. Odwołując się do ustalonej interpretacji symboli „$\preceq$" oraz „$\wedge$" wnioskujemy, że:

„liczbę $n \in f(a,b)$ można interpretować jako kod procedury, która - wykorzystana przez funkcję obliczalną realizującą relację „$\preceq$" - pozwala każdej realizacji a - liczbie $n \in \mathbf{E}(a)$ przyporządkować pewną realizację b - $m \in \mathbf{E}(b)$" - liczba $n \in f(a,b)$ realizuje lokalnie r-morfizm f".

Złożenie r-morfizmów $(f\colon A \times B \to H)\colon (A, \approx_A) \to (B, \approx_B)$ i $(g\colon B \times C \to H)\colon (C, \approx_C) \to (B, \approx_B)$ to funkcja $h\colon A \times C \to H$ taka, że:

$$h(a,c) = \bigcup (f(a,b) \wedge \mathbf{E}(b) \wedge g(b,c) : b \in B).$$

„n realizuje złożenie h w punktach a, c jeśli $n =< n_1, , k, n_2 >$ i istnieje $b \in B$ takie, że n_1 realizuje..." dokończ, to proste.

Podobieństwo tych definicji do definicji morfiżmów w toposie H-obiektów jest widoczne. Jednak tak zdefiniowane obiekty i r-morfizmy NIE tworzą kategorii! Dlaczego? Podobnie jak w toposach H-obiektów chcemy, by funkcja $\approx_A\colon A \times A \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$ była morfizmem identycznościowym na obiekcie $(A, \approx_A)$. Ale gdy zaczniemy liczyć złożenie dowolnego morfizmu $f\colon (A, \approx_A) \to (B, \approx_B)$ z morfizmem identycznościowym $\approx_A\colon (A, \approx_A) \to (A, \approx_A)$ to pokażemy jedynie, że

$$f\cdot \approx_A \preceq f \quad \text{oraz} \quad f \preceq f\cdot \approx_A$$

A powinny być równości... .Podobne wyniki otrzymamy gdy obliczymy złożenie $\approx_B \cdot f$ i gdy zechcemy sprawdzić łączność tak zdefiniowanego składania r-morfizmów[15].

Remedium na tę przypadłość jest „proste":

> *Topos Hylanda to kategoria, której obiektami są opisane powyżej obiekty, a morfizmy z $(A, \approx_A)$ i $(B, \approx_B)$ są* REPREZENTOWANE *przez r-morfizmy między tymi obiektami (a nie* SĄ *r-morfizmami).*
> *Dwa r-morfizmy $f, g : A \times B \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$ reprezentują ten sam morfizm gdy są równoważne* tzn. $f \preceq G$ i $g \preceq f$ [16].

Remedium jest proste ale ... znacząco utrudnia zrozumienie, czym w istocie jest topos Hylanda. Nawet sprawdzenie, czy tak zdefiniowane obiekty i morfizmy rzeczywiście tworzą topos wymaga naprawdę sporej biegłości. I benedyktyńskiej cierpliwości[17] .

Upraszaczając: trzeba posługiwać się r-morfizmami pokornie godząc się z tym, że „prawdziwe" morfizmy to „coś" mało uchwytnego, co jest nam dostępne tylko poprzez taką reprezentację[18].

Przykład. Produkt $(A, \approx_A) \times (B, \approx_B)$ w toposie H-obiektów to obiekt $(A \times B, \approx)$, gdzie $(a,b) \approx (a_1, b_1) = a \approx_A a_1 \wedge b \approx_B b_1$ a morfizm-rzutowanie $\Pi_A\colon (A \times B, \approx) \to (A, \approx_A)$ to funkcja $\Pi_A\colon (A \times B) \times A \to A$ taka, że $\Pi_A((a,b), a_1) = \mathbf{E}(b) \wedge a \approx_a a_1$.

Produkt $(A, \approx_A) \times (B, \approx_B)$ i rzutowanie Π_A w toposie Hylanda opiszemy „tak samo" pamiętając jednak o odmiennej interpretacji symbolu „$\wedge$" i o tym, że tak opisana funkcja Π_a to jedynie r-morfizm reprezentujący rzutowanie w toposie Hylanda. Są też inne r-morfizmy reprezentujące to rzutowanie, ale po co nam one?

---

[15] Bardziej naukowo: opisana struktura bH nie jest kategorią lecz bikategorią (równoważnie: jest to *weak 2-category* (mam nadzieję, że się nie mylę). Ale nie zaprzątajmy sobie głowy nowymi definicjami.

[16] Możemy więc powiedziec, że liczba $n \in f(a,b)$ realizuje lokalnie nie tylko r-morfizm f ale i reprezentowany przez f morfizm. Warunki definiujące r-morfizm gwarantują (rozumianą bardzo subtelnie!) „zgodność" tych lokalnych realizacji.

[17] Zainteresowanych odsyłam np. do [46]. A w [28] napisano, że ten dowód jest „pretty hard"... .

[18] Tak jest przynajmniej w moim przypadku.

Zbiory efektywne i obiekt liczb naturalnych

Brak prostych intuicji, czym są morfizmy w toposie Hylanda nie jest wielkim zmartwieniem[19]. Ten topos stworzono głównie po to, by zbudować matematyczne uniwersum zawierające kategorię zbiorów efektywnych. To się udało: każdy zbiór efektywne są obiektami a morfizmy w **ESet** są morfizmami w toposie Hylanda[20]. Co więcej, między zbiorami efektywnymi w toposie Hylanda nie ma innych morfizmów niż te, które są w kategorii **ESet** [28].

Jednym z efektywnych zbiorów jest obiekt $\mathcal{N} = (\mathbf{N}, \mathbf{E}_N)$, gdzie $\mathbf{E}(n) = \{n\}$. To jest obiekt liczb naturalnych w toposie Hylanda.

> Obiekt liczb naturalnych $\mathcal{N}$ jest istotnie różny od $\nabla(\mathbf{N})$ - teoriomnogościowego zbioru liczb naturalnych „przeniesionego" do toposa Hylanda. Np. endomorfizmy $\mathcal{N}$ to wyłącznie (totalne) funkcje obliczalne a endomorfizmy $\nabla(\mathbf{N})$ to wszelkie teoriomnogościowe funkcje z $\mathbf{N}$ do $\mathbf{N}$.
> To jeszcze jeden ważny przyczynek do dyskusji, czym właściwie są liczby naturalne... .

Podkategoria **ESet** to centrum toposa Hylanda. Jego jądrem jest obiekt liczb naturalnych, gdyż każdy obiekt w tym toposie można z niego zbudować korzystając z prostych konstrukcji kategoryjnych: *„every effective object is a quotient by a closed equivalence relation of a closed subobject of NNO" [28]*

4.2.1 Logika toposa Hylanda

Ta logika jest ... intrygująca.

Zaczniemy od opisu matrycy wartości logicznych. Wiemy, że ta matryca jest tożsama ze strukturą podobiektów obiektu końcowego którym w toposie Hylanda jest jednopunktowy obiekt $\underline{1} = (\{*\}, \mathbf{N})$ Każdy podzbiór $D \subseteq \mathbf{N}$ wyznacza jednoelementowy obiekt $\underline{1}_D = (\{*\}, D)$. Ale jeśli tylko $D \neq \emptyset$ to obiekt $\underline{1}_D$ jest izomorficzny z obiektem końcowym.

> Logika toposa Hylanda jest dwuwartościowa. Ale to nie oznacza, że topos Hylanda jest boolowski![21]

Klasyfikator podobiektów $\Omega_{\mathcal{H}}$ to obiekt posadowiony na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbf{N})$. Do zdefiniowania operacji równości w klasyfikatorze - funkcji $\approx_H : \mathcal{P}(\mathbf{N})^2 \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$ - użyjemy opisanej wcześniej operacji „$\wedge$" i operacji „$\to$" takiej, że:

$$C \to D = \{n \colon \phi_n(C) \subseteq D\}$$

Definiujemy

$$C \approx_H D = (C \to D) \wedge (D \to C) = \{< n, m >\colon \phi_n(C) \subset D, \phi_m(D) \subset C\}$$

. Łatwo sprawdzić, że klasyfikator podobiektów ma tylko dwa punkty globalne: $\emptyset$ i $\mathbf{N}$.

Podobiekty dowolnego obiektu $\underline{A} = (A, \approx)$ są - podobnie jak w toposie $\hat{H}$ - wyznaczone przez *funkcje charakterystyczne* - funkcje $g : A \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$ spełniające dwa warunki [46]:

- $g(a) \preceq \mathbf{E}(a)$,
- $g(a) \wedge (a \approx b) \preceq g(b)$

Będę pisał $g\colon \underline{A} \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$ gdy $g\colon A \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$ spełnia te dwa warunki (czyli jest funkcją charakterystyczną podobiektu $\mathcal{A}$).

Kanoniczną reprezentacją tak opisanego podobiektu jest obiekt $(A, \approx_g)$, gdzie $a \approx_g b = a \approx b \wedge g(a)$[22].

---

[19]Być może jest odwrotnie: ponieważ nie potrafię zbudować takich intuicji (jak np. w toposach H-obiektów) to udaję, że się tym nie interesuję... .

[20]Morfizm $f \in \mathbf{ESet}((A,E),(B,E))$ generuje jednoznacznie morfizm między tymi obiektami w toposie Hylanda opisany przez funkcję $\hat{f} : A \times B \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$ taką, że $\hat{f}(a, f(a)) = \{(n, \phi(n)) : n \in E(a)\}$ gdzie ϕ to funkcja obliczalna realizująca f. W pozostałych przypadkach $\hat{f}(a,b) = \emptyset$.

[21]Cierpliwości, zaraz się wszystko wyjaśni.

[22]Oczywiście równoważne funkcje charakterystyczne wyznaczają ten sam podobiekt.

Możemy teraz „punktowo" zdefiniować operacje „$\wedge$" i „$\rightarrow$" w zbiorze funkcji charakterystycznych podobiektów $\underline{A}$:

$$(p \wedge q)(a) = p(a) \wedge q(a), \quad (p \rightarrow q)(a) = \mathbf{E}(a) \wedge (p(a) \rightarrow q(a))$$

Dodajmy jeszcze jedną operację „$\vee$" na podzbiorach liczb naturalnych:

$$C \vee D = \{< 0, m >: n \in C\} \cup \{< 1, m >: m \in D\}$$

i funkcjach charakterystycznych podobiektów $\underline{A}$:

$$(p \vee q)(a) = p(a) \vee q(a)$$

Jeśli operacje „$\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$" nazwiemy odpowiednio *koniunkcją, alternatywą i implikacją* to ponownie zauważymy daleki idące podobieństwo do opisu logiki wewnętrznej toposów H- obiektów. Ale jest tu istotna różnica: zarówno struktura $(\mathcal{P}(\mathbf{N}), \wedge, \vee, \rightarrow)$ jak też funkcje charakterystyczne podobiektów $\underline{A}$ z opisanymi wyżej działaniami NIE SĄ algebrami Heytinga. Jednak:

- *(dwuelementową) algebrę Heytinga wartości logicznych otrzymamy ze struktury* $(\mathcal{P}(\mathbf{N}, \wedge, \vee, \rightarrow)$ *dzieląc ją przez opisaną relację* $\approx_H$,
- *algebrę Heytinga podobiektów* $\underline{A}$ *otrzymamy utożsamiając równoważne funkcje charakterystyczne.*

Jeszcze jedna istotna różnica: w toposach H-obiektów podobiekty (ich funkcje charakterystyczne) porównuje się właśnie „po współrzędnych"[23]. . Tymczasem w toposie Hylanda podobiekt reprezentowany przez funkcję charakterystyczną $g\colon \underline{A} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{N})$ jest mniejszy od podobiektu reprezentowanego przez $f\colon \underline{A} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{N})$ gdy $g \preceq f$. To uporządkowanie jest istotnie różne od uporządkowania „po współrzędnych"

Semantyka języka pierwszego rzędu

> O semantyce języka pierwszego rzędu w toposie Hylanda można (trzeba) myśleć tak:
> Pierwotną semantyką zdania α jest pewna funkcja charakterystyczna podobiektu obiektu końcowego $\underline{1}$ czyli ... podzbiór $[\alpha] \subseteq \mathbf{N}$. Liczby ze zbioru $[\alpha]$ to *realizacje* zdania α:
> *The* MEANING *of a proposition is determined by (...) what counts as a verification of it - Martin Löf*[24].

> *Wartość logiczna* zdania α to podobiekt obiektu końcowego wyznaczony przez zbiór $[\alpha]$. Ta wartość jest wtórna: zdanie α jest prawdziwe - $[[\alpha]] = true$ - gdy zbiór $[\alpha]$ jest niepusty czyli gdy zdanie α ma jakiekolwiek uzasadnienie. W przeciwnym przypadku wartością logiczną zdania α jest *false*[25].

> Podobnie pierwotną semantyką formuły $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ (z jedną wolną zmienną) w modelu którego nośnikiem jest obiekt $\underline{A} = (A, \approx)$ jest pewna funkcja charakterystyczna $[\psi(x_1, \ldots, x_n)]\colon \underline{A}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{N})$. Wtórną semantyką tej formuły jest podobiekt $[[\psi(v)]]$ obiektu $\underline{A}^n$ wyznaczony przez tę funkcję[26].

Niezbędnym dopełnieniem opowieści o interpretacji języka pierwszego rzędu jest opis kwantyfikacji:
jeśli $g\colon \underline{A} \times \underline{A}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{N})$ jest funkcją charakterystyczną podobiektu produktu $\underline{A} \times \underline{A}^n$ to funkcje charakterystyczne $\forall(g), \exists(g)\colon \underline{A}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{N})$ (opisujące podobiekty $\underline{A}^n$) definiujemy tak: dla dowolnego punktu $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$:

$$(\forall(g)(\bar{a}) = \bigcap_{a \in A} (\mathbf{E}(a) \rightarrow g(a, \bar{a})) \qquad , \qquad (\exists(g))(\bar{a}) = \bigcup_{a \in A} (\mathbf{E}(a) \wedge g(a, \bar{a}))$$

Zatem jeśli np. $\psi(x)$ jest formułą z jedną zmienną wolną $\forall\psi(x), to \exists\psi(x)$ są zdaniami, których pierwotną semantyką są podzbory liczb naturalnych:

$$[\forall\psi(x)] = \bigcap_{a \in A} (\mathbf{E}(a) \rightarrow [\psi(x)](a)) \qquad , \qquad , [\exists_\psi(x)] = \bigcup_{a \in A} (\mathbf{E}(a) \wedge [\psi(x)](a))$$

„liczba n realizuje zdanie $\forall\psi(x)$ *jeżeli funkcja rekurencyjna* ϕ_n *każdą realizację każdego zdania* $\mathbf{E}(a)$ *przekształca w realizację zdania* $\psi(a)$ *dla każdego punktu* $\in A$*",*

„liczba n realizuje zdanie $\exists\psi(x)$ *jeżeli* $n =< n_1, n_2 >$ *i* n_1 *realizuje* $\mathbf{E}(a)$ *dla pewnego* $a \in A$ *a* n_1 *realizuje zdanie* $\psi(a)$*".*

---

[23] $g \leqslant f$ gdy $g(a) \preceq f(a)$ dla każdego $a \in A$.

[24] *On the meanings of the logical constants and the justifications of the logical laws.Nordic Journal of Philosophical Logic, 1(1):11–60, 1996*

[25] To jest zgodne z koncepcją Brouwera: prawdziwość jest konsekwencją istnienia (wskazania) „konstruktywnej realizacji".

Te zdania są prawdziwe (w rozważanym modelu) gdy opisane zbiory są niepuste.

> Powiemy, że *formuła* $\psi(x)$ *jest punktowo uzasadniona w punkcie* $a \in A$ gdy zbiór $[\psi(x)](a)$ jest niepusty. Przekrój niepustych zbiorów nie musi być niepusty. Dlatego uzasadnienia zdania $\forall\psi$ to - w toposie Hylanda - coś więcej niż istnienie wszystkich punktowych uzasadnień formuły ψ! Potrzebne jest wspólne, *jednolite* uzasadnienie.
> Wymóg jednolitego uzasadnienia zdań uniwersalnych jest bliski naszej intuicji. Czy uzasadnieniem sokratesowskiego zdania *„każdy człowiek jest śmiertelny"* jest OSOBNY dowód śmiertlności każdego człowieka czy też oczekujemy JEDNOLITEJ argumentacji obejmującej wszystkie przypadki?[27].

Poświęćmy jeszcze chwilę negacji, która w $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ jest implikacji: $\neg D = D \to \emptyset$. Nietrudno zauważyć, że dokładnie jeden z dwóch zbiorów $(D, \neg D)$ jest zawsze niepusty, czyli $D \vee \neg D$ jest też zbiorem niepustym.

Ale to nie oznacza, że podobiekt $\underline{A}$ opisany przez funkcję charakterystyczną $[\phi(x) \vee \neg[\phi(x)]$ jest zawsze równy $\underline{A}$. Tak jest np. w obiekcie $\nabla(\{0,1\})$ jeśli tylko $[\phi] = (C \neq \emptyset, \emptyset)$ [28]
Dopełnijmy tę opowieść o „podwójnej semantyce" przykładem Przyjmijmy, że $[\alpha(x)], [\beta(x)] : \{0,1\} \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$ są funkcjami takimi, że:

$$[\alpha(x)](0) = \mathbf{N} \setminus C,\ [\alpha(x)](1) = C\ ,$$
$$[\beta(x)](0) = \{0\},\ [\beta(x)](1) = \{1\}\ ,$$

gdzie $C \subseteq \mathbf{N}$ to dowolnie ustalony niepusty zbiór.

Bez względu na wybór zbioru C, zdania-implikacje $(\alpha(x) \to \beta(x))[x := a]$ są realizowalne w obu punktach - dla $a = 0$ i $a = 1$. Natomiast zdanie $\forall\,(\alpha(x) \to \beta(x))$ jest prawdziwe tylko wtedy, gdy zbiór C jest rozstrzygalny! [29]

Co więcej, - dla rozstrzygalnego zbioru C - żadne ze zdań $\neg\forall_x\,(\alpha(x) \to \beta(x))$ i $\exists_x\,\neg(\alpha(x) \to \beta(x))$ nie jest prawdziwe. Wbrew prawom klasycznej logiki.

> Wewnętrzna logika ZDANIOWA toposu Hylanda to dwuwartościowa logika klasyczna a wewnętrzna logika PIERWSZEGO RZĘDU jest „tylko" intuicjonistyczna. *„This situation seems at first sight anomalous (at least it did to the author)"* pisał R.Goldblatt [14]. „Anomalous" można tłumaczyć jako „nienormalna", będąca anomalią.
> Tego zaskoczenia nie da się wytłumaczyć matematycznie. Ale można spróbować „psychologicznie". Nawet matematycy (nie zajmujący się na co dzień logika matematyczną) skłonni są uznać, że prawdziwość formuły postaci $\phi(x) \vee \neg\phi(x)$ to konsekwencja prawa wyłączonego środka sformułowanego w logice zdaniowej, że „jakoś" można tego dowieść. Ale to nieprawda: ta formuła jest prawdziwa wyłącznie na mocy „hiperaksjomatu" FOL który mówi, że każda instancja dowolnego prawa rachunku zdań jest zawsze formuła prawdziwą... [30].

Dodajmy jeszcze dwie uwagi:

1. Obiekt końcowy NIE JEST generatorem w toposie Hylanda: równoległe morfizmy id, $\neg\neg\colon \Omega_{\mathcal{H}} \to \Omega_{\mathcal{H}}$ są równe na elementach klasyfikatora $\Omega_{\mathcal{H}}$ - $\neg\neg true = true$, $\neg\neg false = false$ - ale nie są równe[31]. Podobnie było w toposach H-obiektów ale tam wszystkie podobiekty obiektu końcowego były zbiorem generatorów. W toposie Hylanda obiekt końcowy nie ma nietrywalnych podobiektów.
Zapewne dlatego tak trudno o intuicje związane z morfizmami w tym toposie.
Topos boolowski zawarty w toposie Hylanda i wyznaczony przez morfizm podwójnej negacji $\neg\neg$:

---

[27]Przeanalizuj interpretację kwantyfikatora egzystencjalnego i zauważ, że realizacja zdania $\exists\phi(x)$ ma charakter „konstruktywny" ... .

[28]Gdyby podobiekt $[\phi] \vee \neg[\phi]$ był równy całemu obiektowi, to $(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \preceq \{<0, n>: n \in \}, \{<1, m>: m \in \mathbf{N}\}$ - a to jest niemożliwe: $(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \preceq (C, D)$ tylko wtedy, gdy $C \cap D \neq \emptyset$.

[29]Powielamy tu przykład który ilustrował sutelności relacji „$\preceq_A$". Nic dziwnego: $f \preceq_A g$ dokładnie wtedy, gdy $\forall(f \to g) \neq \emptyset$.

[30]Instancje prawa wyłączonego środka - $p \vee \neg p$ - otrzymamy wstawiając w miejsce p dowolną formułę pierwszego rzędu. Można też inaczej, „semantycznie": interpretacją $\neg\phi(x)$ jest - w modelu teoriomnogosciowym -dopełnienienie zbioru-interpretacji $\phi(x)$.

[31]Równość $\neg\neg = id$ implikuje boolowskość toposu [22].

$\Omega_{\mathcal{H}} \to \Omega_{\mathcal{H}}$ (str. 32) to topos **Set** (dokładniej: $\nabla(\mathbf{Set})$)[32]

2. Skoro w toposie Hylanda jest obiekt liczb naturalnych to są też obiekty liczb całkowitych, wymiernych i rzeczywistych, konstruowane według schematu, który opisaliśmy dla toposów H-zbiorów. Obiekt „liczb rzeczywistych" to tutaj para $(\mathcal{R}_{rec}, \approx)$ gdzie $\mathcal{R}_{rec}$ to liczby rzeczywiste wyznaczone przez rekurencyjne ciągi Cauchy'ego a $n \in (r \approx r_1)$ gdy $r = r_1$ i ϕ_n opisuje ciąg rekurencyjny zbieżny do r [17]. „Miarą istnienia" tak definiowanej liczby rzeczywistej jest zbiór (kodów) wszystkich rekurencyjnych ciągów, które ją aproksymują. A każdy morfizm z $(\mathcal{R}, \approx)$ do $(\mathcal{R}, \approx)$ jest ciągły...

4.3 Realizowalność Kleene'ego

Kleene's realizability was, at least conceptually, a major advance [27].

Gdybyśmy chcieli zachować chronologię zdarzeń, to o realizowalności Kleene'ego powinniśmy mówić przed przedstawieniem toposa Hylanda. W istocie to idea Kleene'ego była głównym impulsem do zdefiniowania tego toposa.

Pojęcie realizowalności pojawiło się w pracy Kleene'ego *„On the interpretation of intuitionistic number theory" Journal of Symb. Log, vol. 10, no. 4, 1945.* Mówiąc o realizowalności „zapominamy" o spełnianiu formuły i prawdziwości zdań. Co jest w zamian? Uzasadnienie.

> Realizowalność to implementacja BHK-postulatów odwołująca się do teorii obliczalności.
> *„Uzasadnienie (arytmetycznego) zdania musi być zrealizowane proceduralnie".*

Pomoże nam przykład, który - jak się zdaje - był zaczynem myślenia o realizowalności. Prawdziwość zdania arytmetycznego postaci $\forall_x \exists_y \psi(x, y)$ w modelu standardowym pozwala teoriomnogościowcom mowić, że *„istnieje funkcja $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ taka, że dla dowolnej liczby naturalnej m zdanie $\psi(x, y)[x := m, y := f(m)]$ jest prawdziwe" - wystarczy skorzystać z* PEWNIKA WYBORU. Ale myślący konstruktywnie matematycy postulowali od zawsze, by KONSTRUKCJĘ takiej funkcji uznać za jedyny akceptowalny dowód zdania $\forall_x \exists_y \psi(x, y)$.
Wystarczy teraz enigmatyczną „konstrukcję" zastąpić maszyną Turinga i wykorzystać istnienie numeracji tych maszyn by zrozumieć stwierdzenie *„liczba n realizuje zdanie $\forall_x \exists_y \psi(x, y)$"*: ono mówi, że:

„maszyna Turinga T o numerze n zatrzymuje się zawsze gdy rozpoczyna pracę z zapisanym na taśmie kodem dowolnej liczby naturalnej m i zwraca liczbę $f_T(m)$ (jej kod) taką, że zdanie $\psi(m, f_T(m)))$ jest prawdziwe".

Oczywiście Kleene zamiast do maszyn Turinga odwołuje się do zdefiniowanych przez siebie funkcji obliczalnych.

Definicja realizowalności jest rekurencyjna. Wykorzystujemy w niej ustaloną numerację funkcji obliczalnych i kodowanie par ; *Liczba n realizuje zdanie arytmetyczne ψ - $n \vdash_{real} \psi$ - jeżeli*[33]*:*

- $\psi \equiv (t = t_1)$ jest prawdziwym zdaniem atomowym - prawdziwą równością termów domkniętych - i n to wspólna wartość tych termów. Żadna liczba nie realizuje tej równości, gdy jest ona fałszywa.

- $\psi \equiv \alpha \wedge \beta$ i $n =< n_1, n_2 >$, gdzie n_1 realizuje α a n_2 realizuje β,

- $\psi \equiv \alpha \vee \beta$ i $n =< 0, n_1 >$, gdzie n_1 realizuje α albo $n = (1, n_2)$, gdzie n_2 realizuje β,

- $\psi \equiv \alpha \to \beta$ i dla dowolnego m realizującego α, $\phi_n(m)$ realizuje β,[34]

- $\psi \equiv \exists_x \alpha(x)$ i $n =< n_1, n_2 >$, gdzie n_1 realizuje zdanie $\alpha(x)[x := \underline{n_2}]$,

[32] Mała wskazówka: rezultat złożenia $\neg\neg$: $\mathcal{P}(\mathbf{N}) \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$ z jakąkolwiek funkcją $f: A \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$ to zastąpienie kazdej wartosci $f(a) \neq \bot$ przez $\top$ i pozostawienie jej bez zmian gdy $f(a) = \bot$.

[33] *Realize* to „realizować" lecz także „urzeczywistniać". W niektórych pracach zamiast zwrotu *„n realizes ψ"* pisze się *„n is an evidence of ψ"* czy nawet *„n is a witness of ψ"* . Nie mam pojęcia jaką terminologię uznano za obowiązującą w języku polskim.

[34] Dokładniej: *„$\phi_n(m)$ jest określone i realizuje β".*

- $\psi \equiv \forall_x \, \alpha(x)$ *i* $\phi_n(m)$ *realizuje zdanie* $\alpha(x)[x := \underline{m}]$ *dla dowolnej liczby* m*.[46]*

Powiemy, że:

zdanie jest uzasadnione (realizowalne) jeżeli istnieje realizująca je liczba naturalna.[35]

oraz

formuła $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ *jest realizowalna gdy uzasadnione jest zdanie* $\forall_{x_1,\ldots,x_n} \alpha(x_1, \ldots, x_n)$.

Zgodność z BHK-postulatami jest widoczna. Z drugiej strony oczywiste jest też podobieństwo reguł Kleene'ego do reguł ustalania pierwotnej semantyki formuł w toposie Hylanda.

Pomińmy szczegóły. Upoważnia nas do tego następujące twierdzenie:

„A sentence ψ can be realized in Kleene's sense if and only if it is true for the standard L-structure in Eff." [46] str. 25

Eff to topos Hylanda. A *„standard L-structure"* to model arytmetyki posadowiony na obiekcie liczb naturalnych $\mathcal{N}$.

Jaki jest związek między realizowalnością a prawdziwością zdania arytmetycznego? Skoro jednak nie wierzymy już w „absolutną" prawdziwosć zdań, musimy zapytać bardziej konkretnie:

I. „Wersja logiczno-klasyczna": *Czy każde zdanie arytmetyczne, które jest instancją prawa klasycznej logiki pierwszego rzędu, jest realizowalne?*

Już wiemy, że nie. Ale dodajmy jeszcze jeden przykład: przyjmijmy, że A to zbiór par liczb (m, n) takich, że *„m-ta maszyna Turinga pracując na własnym kodzie zatrzyma się po n krokach"*. Ten zbiór jest rozstrzygalny a jego funkcja charakterystyczna - λ_A - jest prymitywnie rekurencyjna. To oznacza, że zbiór A jest opisany przez arytmetyczną formułę atomową - równość $\lambda_A(x, y) = 1$. Wówczas formuła

$halt(x) \equiv \exists_y \, (\lambda_A(x, y) = 1)$ opisuje problem stopu[36].

Alternatywa $\forall_x (halt(x) \vee \neg halt(x))$ jest instancją prawa klasycznej logiki pierwszego rzędu. Ale nie ma realizacji, bo to oznaczałoby rozstrzygalność problemu stopu![37]

II. Pytanie: *„czy formuły dowodliwe w PA są zawsze uzasadnione"* jest - w świetle powyższego wyniku - bezzasadne. Ale można pytać: *„czy każda formuła arytmetyczna dowodliwa w HA ma uzasadnienie?"*. Odpowiedź jest pozytywna. Więcej: dowód w HA pozwala nie tylko udowodnić istnienie uzasadnienia lecz *„(..) the proof of ϕ gives us a recipe for* CONSTRUCTION *of a realizer" [28].*

W szczególności realizowalne są aksjomaty Peano. Np. realizowalnosć aksjomatu indukcji - $\alpha(0) \wedge (\forall_n \, (\alpha(n) \to \alpha(n+1))) \to \forall_n \, \alpha(n)$ - dowodzimy tak: *jeśli liczba k realizuje zdanie $\alpha(0)$ a liczba m realizuje zdanie $\forall_n \, (\alpha(n) \to \alpha(n+1))$, to aksjomat indukcji jest realizowany przez liczbę $s(k,m)$ która jest numerem funkcji rekurencyjnej definiowanej tak:*

$\phi_s(0) = k,$

$\phi_{s(k,m)}(n+1) = \phi_m(\phi_{s(k,m)}(n))$

Wówczas liczbą, realizującą ten aksjomat jest numer funkcji rekurencyjnej, która każdej parze $< k, m >$ przyporządkowuje liczbę $s(k, m)$.[38]

> Skoro zdanie $\forall_x (halt(x) \vee \neg halt(x)$ nie jest realizowalne to nie jest dowodliwe w HA. A to oznacza, że dodanie do HA zaprzeczenia $\neg(\forall_x (halt(x) \vee \neg halt(x))$ nie prowadzi do sprzeczności... [39].

[35] To nie oznacza, że potrafimy ją wskazać tzn. skonstruować realizację zdania A na podstawie struktury syntatycznej i zgodnie z regułami opisanymi powyżej! Tak jest w przypadku alternatywy $A \vee \neg A$ gdy A jest zdaniem.

[36] Maszyna Turinga o numerze n się zatrzyma gdy zdanie $halt(\underline{n})$ jest prawdziwe.

[37] Uzasadnieniem tego zdania - gdyby istniało - była by funkcja obliczalna ϕ_m taka, że dla dowolnej liczby n, $\phi_m(n) =< 0, k_0 >$, gdzie k_0 jest uzsadnieniem zdania $\exists_y \, (\lambda_A(\underline{n}, y) = 1)$ (czyli „uzasadnia" stwierdzenie , że maszyna o numerze n się zatrzymuje) lub $\phi_m(n) =< 1, k_1 >$ gdzie k_1 uzasadnia zdanie „maszyna o numerze n się nie zatrzymuje".

[38] To samo nieco inaczej: uzasadnieniem aksjomatu indukcji jest procedura-schemat rekursji.

[39] Nieco ogólniejsza uwaga: jeśli formuła $\forall_x \alpha(x) \vee \neg\alpha(x)$ jest realizowalna, to własność opisana przez formułę $\alpha(x)$ jest rozstrzygalna.

Jednak nie każde uzasadnione zdanie jest dowodliwe w arytmetyce intuicjonistycznej[40]. Takim zdaniem jest *prawo Markova*[41].

Prawo Markova

> Paradygmaty konstruktywizmu Markova:
> - *The objects of mathematics are algorithms. Algorithms are meant in a mathematically precise sense in the sense that they should be presented as „words" in some finite alphabet of symbols.*
> - *Limitations due to finite memory capacity are disregarded, the length of symbol strings is unbounded (though always finite). - Logically compound statements not involving $\exists, \vee$ are understood in a direct way, but existential statements and disjunctions always have to be made explicit.*
> IF IT IS IMPOSSIBLE THAT AN ALGORITHMIC COMPUTATION DOES NOT TERMINATE, WE MAY ASSUME THAT IT DOES TERMINATE [42].

Ostatni paradygmat to *prawo Markova: „jeśli jest niemożliwe, by praca algorytmu była nieskończona, to jest skończona"*. Dla wychowanych w kręgu klasycznej logiki ten postulat jest „oczywistą oczywistością" - wystarczy skorzystać z prawa podwójnej negacji: *„nieprawda, że nieprawda, że praca algorytmu jest skończona* $\rightsquigarrow$ *praca algorytmu jest skończona"*. Tego nie uznają konstruktywiści. Ale Markov tak: *„Suppose that someone tells us that it is impossible that the machine never halts, do we know that it indeed halts? Markov argued 'yes'. The decision procedure for the halting in this case consists of turning on the machine and waiting for it to halt. An intuitionist would not buy the argument. When somebody claims that a Turing machine will stop, the natural question is 'when?' We want an actual bound on the computation time. [11]*

Prawo Markova formalnie zapiszemy tak:

$$(*) \qquad (\forall_x\,(r(x) \vee \neg r(x)) \wedge \neg\neg\exists_x\, r(x)) \to \exists_x\, r(x)$$

gdzie $r(x)$ to formuła arytmetyczna opisująca własność *„rozważany algorytm (maszyna Turinga) pracując na własnym kodzie zatrzyma się po x krokach"*

Schemat logiczny tego zdania to formuła

$$(**) \qquad (\forall_x\,(a(x) \vee \neg a(x)) \wedge \neg\neg\exists_x\, a(x)) \to \exists_x\, a(x)$$

która oczywiście jest prawem klasycznej logiki.
Ta formuła nie ma dowodu w arytmetyce intuicjonistycznej. Ale każda formuła arytmetyczna-instancja schematu $(**)$ jest realizowalna! [11][43]
Dowód (nieformalny, dla przypadku, gdy ta implikacja jest zdaniem): opiszemy procedurę przekształcającą dowolną realizację poprzednika tej implikacji w realizację jej następnika[44]*. (Hipotetyczną) realizacją poprzednika jest para procedur:*

- procedura ϕ, która dla dowolnej liczby n wskazuje to spośród pary zdań $(a(\underline{n}), \neg a(\underline{n}))$ które jest realizowalne,

- stwierdzenie, że istnieje realizacja zdania $\neg\neg\exists_x\, a(x)$ (co oznacza, że istnieje realizacja zdania $\exists_x\, a(x)$ ale nie oznacza, że znam liczbę, która je realizuje!)

Możemy teraz łatwo opisać procedurę uzasadniającą $\exists_x\, a(x)$ - wystarczy kolejno uruchamiać procedurę ϕ dla $0, 1, \ldots$ tak długo, aż znajdziemy liczbę, dla której zdanie $a(\underline{n})$ jest uzasadnione. Drugie

[40] Implikacja odwrotna - „istnienie uzasadnienia" $\rightsquigarrow$ „dowodliwość w HA" - jest prawdziwa tylko dla *prawie negatywnych (almost negative)* formuł - takich, które są zbudowane z formuł atomowych i formuł postaci $\exists_x\, t = s$ jedynie za pomocą $\to$, $\wedge$ oraz kwantyfikatora $\forall$ [41].

[41] A.A. Markov (1903-1979) - twórca tzw. rosyjskiego konstruktywizmu matematycznego. Ojciec A. Markova (o tym samym imieniu) (1856-1922) to równie znakomity matematyk rosyjski, znany z dokonań w zakresie teorii prawdopodobieństwa (procesy Markova).

[42] A.E.Troelstra, D. van Dalhen, Constructivism in Mathematics, vol 1, Elsevier, 1988)

[43] Należy to rozumieć tak: formuły-instancje schematu $(**)$ otrzymamy zastępując $a(x)$ konkretną formułą arytmetyczną (tak samo, jak np. w przypadku indukcji matematycznej). „Niedowodliwość" tego schematu oznacza, że nie każda taka formuła-instancja jest dowodliwa w HA.

[44] Uniknijmy pułapki: chodzi o wskazanie procedury przekształcajacej realizacje poprzednika w realizację następnika a nie o dowód, że jeśli poprzednik implikacji jest realizowalny to i następnik jest realizowalny (co jest banalne).

z powyższych założeń gwarantuje, że poszukiwanie tej liczby musi zakończyć się sukcesem... .

> Skoro tak, to może należy zrewidować poglądy i dodać prawo Markova do aksjomatów arytmetyki intuicjonistycznej? Jednak trudno ten schemat uznać za aksjomat specyficzny, gdyż w jego sformułowaniu nie odwołujemy się do żadnych pojęć arytmetycznych. To by oznaczało, że jest to nowy aksjomat logiczny „poprawionej" logiki intuicjonistycznej pierwszego rzędu.
> Ale czy ten jeden - ważny, ale tylko jeden - model upoważnia do takiej zmiany?

Przeciwko tej zmianie przemawia też to, że wprawdzie prawo Markova - *Markov principle* - nie jest dowodliwe w HA, ale niewiele (na pozór) różniąca się od niego *reguła Markova*:

„dla dowolnej formuły $a(x)$: jeżeli $HA \vdash \forall_x(a(x) \vee \neg a(x)) \wedge \neg\neg\exists_x\, a(x)$ to $HA \vdash \exists_x\, a(x)$"

- jest zgodna z tą teorią [11],[37].

Warto choć przez chwilę zadumać się nad różnicą między prawem a regułą Markova... .

Dodatek: od hiperdoktryny do toposu

Analizujac definicję toposu odkrywaliśmy jego wewnętrzną logikę. To droga „od matematyki do logiki". Ale możliwa jest też wędrówka w odwrotnym kierunku - „od logiki do matematycznego uniwersum (toposu)". I właśnie w ten sposób konstruowany jest każdy topos $\hat{H}$ i topos Hylanda. Różnica polega na tym, że w pierwszym przypadku opis logiki jest prosty: ta logika wyznaczona przez pojedynczą zupełną algebrę Heytinga H. W przypadku toposu Heytinga jest to coś bardziej skomplikowanego - to *hiperdoktryna*. Cóż to takiego?

Hiperdoktryna pierwszego rzędu jest zadana przez wskazanie:

- funktora $Hd : \mathbf{Set}^{op} \to Heyt$, gdzie $Heyt$ to kategoria zupełnych algebr Heytinga,

- rodziny funkcji (indeksowanej parami zbiorów (A, B)) $\forall_A, \exists_A\colon Hd(A \times B) \to Hd(B)$ powiązanych z rzutowaniami $\Pi_A : A \times B \to A$ przez takie oto nierówności:

$$c \leqslant Hd(\Pi)(d) \;\Leftrightarrow\; \exists_A(c) \leqslant d \qquad , \qquad Hd(\Pi)(d) \;\leqslant\; c \Leftrightarrow d \leqslant \forall_A(c)$$

dla wszelkich elementów $c \in Hd(A \times B)$ i $d \in Hd(B)$

Darujemy sobie analizę tej definicji[45]. Niech nam wystarczy, że są tu algebry Heytinga (nie jedna, ale wiele!) i działające między nimi funkcje, których opisy sugerują związki z kwantyfkacją.

Każda zupełna algebra Heytinga H wyznacza swoją hiperdoktrynę: funktor $\hat{H} : \mathbf{Set}^{op} \to Heyt$ przyporządkowujący każdemu zbiorowi A algebrę Heytinga posadowioną na zbiorze H^A wszystkich funkcji z A do H. Działania są tu określone „po współrzędnych" (np. $(f \vee g)(a) = f(a) \vee g(a)$). Funkcje $\forall_A, \exists_A\colon H^{B\times A} \to H^B$ opisaliśmy wcześniej, gdy mówiliśmy o kwantyfikacji w toposie $\hat{H}$.

Hiperdoktryna - punkt wyjścia do budowy toposu Hylanda - jest bardziej skomplikowana. Aby ją zbudować musimy - dla dowolnego zbioru A - wskazać odpowiednią zupełną algebrę Heytinga $\mathcal{H}(A)$. Zdefiniowanie struktur $(\mathcal{P}(\mathbf{N})^A, \wedge, \vee, \to)$ zdaje się sugerować, że to właśnie one są poszukiwanymi algebrami. Niestety, jak wiemy, - NIE SĄ to algebry Heytinga.

Musimy powtórzyć manewr, który już raż wykonaliśmy definiując morfizmy w toposie Hylanda - musimy przyjąć, że elementy zbiorów $\mathcal{P}(\mathbf{N})^A$ jedynie REPREZENTUJĄ elementy poszukiwanych algebr Heytinga:

funkcje $f, g\colon A \to \mathcal{P}(\mathbf{N})$ reprezentują ten sam element algebry $\mathcal{H}(A)$ gdy są równoważne.

O tym, że możliwa jest droga „od logiki do (lokalnego) uniwersum" - od hiperdoktryny do toposu - mówi takie oto twierdzenie [29]:

Każda hiperdoktryna (spełniająca pewne dodatkowe warunki) wyznacza topos[46].

Jego obiekty to pary $(A, \approx_A) \in \hat{H}(A \times A))$ takie, że:

---

[45] Podana tu definicja hiperdoktryny jest niepełna. Pełną wersję można znaleźć np. w pracy A.M.Pittsa [29].

[46] Hiperdoktryny spełniające te dodatkowe warunki to *triposy*. Rezygnuję tu ze szczegółowego omawiania tych pojęć, gdyż wymagało by to użycia języka daleko wykraczającego poza przyjęte tu samoograniczenie.
Co oznacza słowo "tripos"? *P.Johnstone (...) suggested naming these structures with the acronym tripos - standing for Topos Representing Indexed Partially Ordered Set"* ale zaraz dodaje: *it is partly a joke: the Tripos is the name Cambridge University gives to examinations" [29]*

- $\forall_{a,b} a \approx_A b \to b \approx_A a,$
- $\forall_{a,b,c} (a \approx_A b \wedge b \approx_A c) \to a \approx_A c$

Natomiast morfizm z $(A, \approx_A)$ *do* $(B, \approx_B)$ *to każdy element* $f \in \hat{H}(A \times B)$ *taki, że:*

$\forall_{a,b}\, a \approx b \to (\mathbf{E}_A(a) \wedge \mathbf{E}_B(b)),$
$\forall_{a,b,a_1,b_1} (a \approx_A a_1 \wedge b \approx_B b_1 \wedge f(a,b)) \to f(a_1,b_1)$
$\forall_{a,b}\ (f(a,b) \wedge f(a,b_1)) \to b \approx_B b_1$
$\forall_a\ \mathbf{E}_A(a) \leqslant \exists_b\, f(a,b)$

Ot, cała tajemnica... . [47].

To nie koniec

Proces dochodzenia do rozumienia matematyki jest (potencjalnie) nieskończony.

> **„It is hubris to think that by mathematics alone we can determine what the human mind can or cannot do in general"**
> *- S.Feferman in: Gödel, Nagel, minds and machines.*

Czy zdanie okrągłe wypowiesz,
czy księgę mądrą napiszesz,
będziesz zawsze mieć w głowie
tę samą pustkę i ciszę.(...)

Zwieść cię może ciągnący ulicami tłum,
wódka w parku wypita albo zachód słońca,
lecz pamiętaj: naprawdę nie dzieje się nic
i nie stanie się nic - aż do końca. (...)
M. Zabłocki

to be continued ... (???))

[47] Pewnie trochę przesadziłem... . Zainteresowanych szczegółami odsyłam do [29]

Bibliografia

[1] H.P.Barendregt, *The Lambda Calculus, its syntax and semantics, Studies in Logic and the Foundation of Mathematics vol.103, North-Holland Publ. Comp. 1981*

[2] M.Barr, Ch.Wells, *Toposes, Triples and Theories (http://www.cwru.edu/artsci/math/wells/pub/ttt.html) (30.11.2011)*

[3] J. L. Bell, *Category Theory and the Foundations of Mathematics, (Brit.J.Phil.Set.32 (1981), 349-358)*

[4] N.Bezhanishvili, D.de Jongh, *Intuitionistic Logic, (http://www.cs.le.ac.uk/people/ nb118 /Publications/ESSLLI2705.pdf) (20.01.2013)*

[5] G. Birkhoff, J.von Neumann, *The Logic of Quantum Mechanics, The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 37, No. 4. (1936).*

[6] A.Bundy, *The Automation og Proof by Mathematica Induction, in Handbook of Automated Reasoning vol.1 , North-Holland, 1992*

[7] S.Buss,*First-Order Proof Theory of Arithmetic - Rozdział II książki o nieznanym mi tytule, (http://www.math.ucsd.edu/ sbuss/ResearchWeb/handbookII/ChapterII.pdf)(24.07.2012)*

[8] A.Döring, Ch.Isham,*„What is a Thing?": Topos Theory in the Foundationsof Physics (internet)*

[9] U.Eco,*W poszukiwaniu języka uniwersalnego, Wyd. Marabut, 2002*

[10] *Companion Encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences*, ed. I. Grattan-Guiness

[11] D. van Dalen,*Intuitionistic logic, The Blackwell Guide to Philosophica Logic. Ed. L.Gobble. Blackwell, Oxford.2001, 224-257.*

[12] A.Döring, C.Isham,*Topos theory in the foundations of Physics (w New Structure for Phisics" (ed. B.Coecke), internet*

[13] J.Y.Girard,*The Blind Spot, Lectures on Logic, Rome, Autumn 2004. (http://iml.univ-mrs.fr/ girard/coursang/coursang2.pdf.gz)*

[14] R.Goldblatt,*Topoi - the categorical analysis of Logic, Studies in Logic and Foundation of Mathepatisc, vol.98, North-Holland 1979*

[15] D.Higgs,*Injectivity in the topos of complete Heyting algebra valued sets, Can. J. Math., Vol. XXXVI, No. 3, 1984, pp. 550-568.*

[16] S.Hawking, L.Mlodinow,*Wielki projekt, Wyd. Albatros,2017*

[17] J.M.E.Hyland, *The Effective Topos, internet*

[18] B. Jacobs,*Categorical logic and Type theory, Studies in Logic and Foundation of Mathematics, vol.141*

[19] P.Johnstone, *The point of pointless topology, Bull. AMS vol.8, No.1, 1983*

[20] F.W.Lawvere, *An elementary theory of the category of sets, Proc. Nat. Acad. Sci U.S.A vol.52, 1506-11, 1964.*

[21] F.W.Lawvere, R.Rosebrugh, *Sets for Mathematics, Cambridge Univ.Press, 2003 (internet)*

[22] S.Mac Lane, I.Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic - a first introduction to topos theory, Springer-Verlag,1992*

[23] S.Mac Lane, *Category theory for the working mathematicians.*

[24] M. McLuhan, *Wybór tekstów, Zysk i S-ka Wydawnictwo,2001*

[25] E.Nelson, *Hilbert's mistake, https://web.math.princeton.edu/ nelson/papers/hm.pdf*

[26] E.Nelson, *Understanding intuitionism, http://www.math.princeton.edu/ nelson/papers.html*

[27] J.van Oosten,*Realizability: a historical essay (internet)*

[28] W.Phoa, *An introduction to fibrations,topos theory the effective topos and modest sets, http://www.lfcs.inf.ed.ac.uk/reports/92/ECS-LFCS-92-208/*

[29] A.M.Pitts, *Tripos theory in retrospect, Math.Struc.in Comp.Sci., 2002, vol.12, 265-279.*

[30] H.Putnam,*Models and reality, Journal of Symbolic Logic, Vol. 45, No. 3 (Sep., 1980), pp.464-482.*

[31] P.Raatikainen, *Hilbert's program revisited, (Synthese 137: 157ďż˝177, 2003.) http://www .mv.helsinki.fi/home/praatika/Hilbert's Program Revisited.pdf*

[32] B.Rosenblum, F.Kuttner, *Zagadka teorii kwantów, Prószyński i S-ka, 2013.*

[33] C.Rovelli,*Tajemnica czasu, Wydawnictwo JK, 2019.*

[34] G.Sambin, *Intuitionistic formal spaces,http://www.math.unipd.it/ sambin/txt/ifs87-97.pdf,*

[35] J.P.Seldin, *Lambda-Calculus and Functional Programming, internet*

[36] J.P.Seldin, *The Logic of Curry and Church, http://www.logic.amu.edu.pl/images/c/c5/Currychurch.pdf*

[37] M.H.Soersten, P.Urzyczyn, *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, Studies in Logic and the Fund. of Math. vol 149.*

[38] Ch.Strachey, *Fundamental Concepts in Programming Languages, Higher-Order and Symbolic Computation, 13, 11ďż˝49, 2000*

[39] L. F. Stout *Dedekind finiteness in topoi, J.Pure.App.Alg., 49 (1985), 219-225*

[40] T.Streicher, *Introduction to Constructive Logic and Mathematics, http:www.mathematik.tu-darmstadt.de/ streicher/CLM/clm.pdf.*

[41] T.Streicher, *Realizability, http:www.mathematik.tu -darmstadt.de/ streicher/REAL/ REAL.pdf*

[42] L.Susanka, *What are we (mathematicians) doing? internet (???).*

[43] M.Tiles, *Philosophy of Mathematics, The Blackwell Companion to Philosophy, Second Ed.,Edited by N.Bunnin, E.P.Tsui-James, 1996*

[44] A.S.Troelstra, *Constructivism and proof theory, internet*

[45] A.S.Troelstra, *History of constructivism in the 20th century, http://staff.science.uva.nl/ anne/hhhist.pdf (15.10.2011)*

[46] S.Vermeeren, *Realizability Toposes, https://stijnvermeeren.be/download/ mathematics/ essay.pdf*

[47] S.Vickers, *Continuity and Geometric logic, Journal of Applied Logic 12 (2014)*

[48] S.Vickers, *Locales and toposes as spaces (internet)*

[49] L. A. Zadeh, *Fuzzy sets, (Information and Control 8(3), 1965)*

[50] H. Volger, *Ultrafilters, ultrapowers and finitness in a topos, J.Pure.App.Alg, 6(1975), 345-356*