Poukładać matematykę

(lub przynajmniej próbować)

część 1:

Matematyka teoriomnogościowa

Grzegorz Jarzembski
d. Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu M. Kopernika w Toruniu.

Spis treści

Proces nie jest rzeczą.
Raczej rzecz jest stanem procesu.

Jeśli uważasz, że trud poznania jest uzasadniony tylko wtedy, gdy przynosi praktyczną korzyść - daj sobie spokój.

Jeśli choć raz na jakiś czas pytasz o sens tego, co robisz, to ten tekst jest dla ciebie. To tekst dla tych, którzy zechcą zmierzyć się z pytaniem „czym jest matematyka?" w sposób wolny od edukacyjnego przymusu, powodowani li tylko czystą ciekawością. Wykształcenie matematyczne jakie zdobywamy w szkołach i na uczelniach jest, delikatnie mówiąc, niedoskonałe[1]. We wspomnieniach większości edukacja matematyczna to ciągła konfrontacja naszych ograniczonych zdolności z doskonałością jaką w wydaniu szkolnym i uniwersyteckim jest matematyka. Ta konfrontacja zawsze - wcześniej lub poźniej - kończy się kapitulacją[2].

Powszechne przekonanie o doskonałości matematyki to skutek edukacji, kt cyjnych założeń czyni warunek przynależności do grona wtajemniczonych. Trafnie - choć nie wiem, czy w sposób zamierzony - napisał o tym J. Pogonowski rozpoczynając jeden ze swoich wykładów: *„Proszę, aby słuchacze na czas tego wykładu uwierzyli w pewne dogmaty. Nie jest tego wiele: aksjomaty teorii mnogości (Zermelo-Fraenkla) oraz aksjomaty arytmetyki Peana (...) . W szczególności, proszę (...) wierzyć w istnienie co najmniej jednego zbioru nieskończonego." [58].* Te słowa, kierowane do słuchaczy popularnonaukowego wykładu, zdają się sugerować, że matematycy potrafią zastąpić wiarę wiedzą o słuszności i niepodważalności podstawowych założeń matematyki. Ale to nieprawda.

Matematyka szkolno-uniwersytecka to świat aż nadto poukładany, bez luk i czarnych dziur. Pewność i niezawodność. Raj[3]. Ogrom matematyki przytłacza jak rzymska bazylika św. Piotra. Jako studenci przyjmujemy z pokorą, że nie wszystko rozumiemy. Gotowi jesteśmy akceptować prezentowane (narzucane) koncepcje w nadziei, że kiedyś poznamy argumenty przekonujące o ich słuszności. Ale to zdarza się nader rzadko - wiekszość studentów matematyki opuszcza uniwersytety raczej z wiarą w sens matematyki niż ze zrozumieniem jej źródeł i podstaw[4].
To nie ich wina. Tak jest, bo - w większości - wykładowcy zachowują się tak, jakby dyskusja o podstawach matematyki była czymś wstydliwym. Niby znamy ograniczenia teorii mnogości ujawnione przez Gödla i Cohena, ale rzadko o tym mówimy (myślimy)[5]. Uznajemy, że podstawy matematyki to tylko jeden z wielu działów matematyki, domena grupy specjalistów, tzw. „podstawowców". Nam nic do tego.
M. Kordos pisał o takim kształtowaniu postaw adeptów matematyki tak: *„Model jest jasny. Wprawiamy siebie i swoich uczniów w pewnego rodzaju mistyczny sen, w którym przeżywamy nasze matematyczne sukcesy, porażki, odkrycia i rozczarowania. I można by to nawet prześladować, jako zbiorową hipnozę, (...) gdyby nie jedno, co budzi w pospólstwie zabobonny lęk:*
zdumiewająca i niewytłumaczalna skuteczność matematyki." [43][6]

[1] *Nikt nic nie czyta, a jeśli czyta, to nic nie rozumie, a jeśli nawet rozumie, to nic nie pamięta.* - S. Lem.

[2] Nie dotyczy to nielicznej grupy prawdziwych matematyków i licznej grupy zarozumialców. Trzeba bowiem ogromnej wiedzy (bądź równie wielkiej zarozumiałości) by stwierdzić „ogarniam i rozumiem matematykę". Nawet będąc wybitnym specjalistą w jednej dziedzinie matematycznej skazani jesteśmy na ignorancję w innych.

[3] *„Nikt nas nie wyprowadzi z raju stworzonego przez Cantora"*

[4] Są i tacy, którzy kończą studia z mniejszą wiarą niż ta, z którą przyszli...

[5] B. Russell, jedna z głównych postaci tego tekstu twierdził, że jego (wspólne z A. Whiteheadem) dzieło *„Principia Mathematica"* przeczytało ... pięć osób. A liczba odwołań do niego jest niemal nieskończona. Dla ścisłości: ja też nie.

[6] Profesorowie J. Pogonowski i M.Kordos to znakomici polscy popularyzatorzy matematyki.

The courses in the foundations of mathematics (...) emphasize the mathematical analysis of formal systems, at the expense of philosophical substance. Thus it is the mathematical profession that tends to equate philosophy with the study of formal systems, which require knowledge of technical theorems for comprehension. They do not want to learn yet another branch of mathematics and therefore leave the philosophy to the experts. As a consequence, WE PROVE THESE THEOREMS AND WE DO NOT KNOW WHAT THEY MEAN. - to z kolei opinia E. Bishopa[7].
S.Shaprio, filozof nauki, we wstępie do swej książki *„Philosophy of Mathematics -structure and ontology”* umieścił takie zdanie: *„To tylko hipoteza, że matematycy prawdopodobnie wiedzą, o czym mówią („)i że mają na myśli to, co mówią.”...* .

Myślą tyle, co warto
ani chwili dłużej,
bo za tą chwilą
czai się wątpliwość ...[8]

Czasem jednak zdarza się coś szczególnego. Oto jak swój przypadek opisał P.J. Davis, współautor książki „Świat matematyki” [22]: *„Jeszcze pięć lat temu byłem normalnym matematykiem. (...) Miałem swoją dziedzinę - równania różniczkowe cząstkowe - i w niej tkwiłem (...). Mój sposób myślenia i moje prawdziwe życie intelektualne opierały się na kategoriach i metodach analizy, które przyswoiłem wiele lat temu (...). Ponieważ* NIE WYCHYLAŁEM SIĘ *daleko poza te kategorie i metody, miałem jedynie ich niejasną świadomość. (...) Mój awans zależał od moich badań i publikacji (...) Osąd innych osób pracujących w mojej dziedzinie decydował o wartości tego, co robiłem. Nikt inny nie miał po temu kwalifikacji i jest wątpliwe, czy ktokolwiek poza nimi byłby tym zainteresowany. Moje uwolnienie od takiej postawy tzn. uświadomienie sobie, że jest ona tylko jednym z wielu sposobów patrzenia na świat, (...) wcale nie było potrzebne w mojej karierze. Przeciwnie, takie nieortodoksyjne i wątpliwe przedsięwzięcie w najlepszym razie mogły się wydać głupim marnowaniem czasu, a w najgorszym - rozwiązłym zanurzeniem w tak wątpliwych i podejrzanych sprawach jak psychologia, socjologia czy filozofia...”*

> Refleksja nad istotą matematyki ustąpiła pragmatyzmowi. To postawa „pracujących matematyków”, którzy stanowią zdecydowaną większość matematycznej społeczności[9]. Rozważanie podstawowych dylematów jest dla niespecjalistów przedsięwzięciem wysokiego ryzyka, gdyż - jak miał odwagę napisać L. Susanka -*„dithering about foundational matters can easily get you branded as a crank or a heretic, not a career enhancing event”* [80][10].

Paradoksalnie, taką postawę większości matematyków można tłumaczyć... chęcią sprostania wymagom naukowej rzetelności. Przecież przed sformułowaniem własnego sądu w kwestii podstaw matematyki, winniśmy poznać i zrozumieć(?) poglądy genialnych myślicieli, logików i matematyków, od Arystotelesa do Gödla. A my, zajęci karierą, zobowiązani do zdobywania kolejnych stopni, po prostu nie mamy czasu! Jeśli nawet podejmiemy wyzwanie, to szybko odkrywamy, że utknęliśmy w gąszczu specjalistycznej terminologii i utonęliśmy w morzu cytatów. Jeśli cudem przebrniemy przez choćby ułamek tego, co dostępne w bibliotekach i internecie, to stwierdzamy, że poznanie różnych - często przeciwstawnych - poglądów niewiele zbliżyło nas do określenia własnego stanowiska. Ogarnia nas zwątpienie i zniechęcenie. Jaką mamy szansę powiedzieć coś własnego o fundamentalnych problemach dogłębnie przemyślanych przez takich geniuszy jak Arystoteles, Leibniz, Kartezjusz, Cantor, Hilbert, Church, Gödel, Tarski? Narasta poczucie, że jesteśmy intruzem w świecie gigantów. A skoro tak, to jakie mamy prawo do głoszenia własnego sądu? Jaką szansę, że będzie on choć odrobinę oryginalny?

To nie jest zażalenie na reguły współczesnej nauki. Tak nie tylko jest, ale tak powinno być.

[7] *E. Bishop: The Crisis in Contemporary Mathematics, Historia Mathematica 2, 507-515, 1975.*Erret Bishop (1928-1983), amerykański matematyk-konstruktywista, autor *„Foundations of Constructive Analysis”.*

[10] Pragmatyk = człowiek odznaczający się praktycznym sposobem myślenia i działania. *„ primum vivere, deinde philosophari”*- najpierw żyć, potem filozofować. A termin „pracujący matematyk” („robotnik matematyki”) - „working mathematician” pożyczyłem od S. McLane'a [**?**].

Brutalnie kawę na ławę wyłożył C.F. von Weizsäcker:

Ogólnie rzecz biorąc, fizyk podobnie jak każdy inny naukowiec - ma za zadanie odpowiedzieć na (...) pytania, na które aktualnie jest w stanie odpowiedzieć. Nie wolno stawiać pytań za trudnych.(...) Fizyk nie może pytać: co to jest materia? co to jest czas lub przestrzeń? Biolog nie może pytać: co to jest życie? Psycholog nie może pytać: co to jest umysł? Wszyscy oni stawiają szczegółowe pytania, na które da się odpowiedzieć przy pomocy stosowanych przez nich metod. W tym sensie UNIKANIE FILOZOFII JEST WARUNKIEM MOŻLIWOŚCI UPRAWIANIA NAUK[11]

Mowa tu wprawdzie o fizyce, ale to bez znaczenia: aby być skutecznym, należy zadawać tylko takie pytania, które można zadać. Ale za chwilę, w tym samym artykule, Weizsäcker pisze:

„(...) reguła ta załamuje się, gdy nauka dokonuje tzw. wielkich kroków. Nawiązuję tu do znanej koncepcji (...) T. Kuhna[12]*. Według niego nauka rozwija się wzdłuż łańcucha składającego się z dwu typów ogniw. Ogniwa jednego typu to tzw. normalne okresy rozwoju, kiedy to naukowcy stawiają i rozwiązują zagadnienia wewnątrz określonego paradygmatu, posługując się dobrze ustalonymi metodami. Normalne okresy są oddzielone od siebie przez fazy drastycznych zmian, zwane rewolucjami naukowymi; polegają one na przejściu od jednego paradygmatu do drugiego. Podczas takich przejść (...) naukowiec musi filozofować, musi stawiać przynajmniej niektóre z tych pytań, których w okresach normalnych należy unikać.”*

Ostatnią rewolucję matematyka przeżyła za sprawą matematyków dwóch pokoleń - Hilberta i Gödla. Współczesny mainstream matematyczny został wyznaczony przez teorię mnogości i wspierającą ją klasyczną logikę. To teraźniejszy paradgmat. Dziś jesteśmy zanurzeni w teorii mnogości po uszy i czubek rozumu. Trwa stan upojenia jej oszałamiającymi sukcesami w XX wieku. Tak zostaliśmy wychowani i tak kształcimy studentów.

> Czy matematyka ma przetrwać nietknięta w czasie największej od wynalezienia druku rewolucji technologiczno-cywilizacyjnej, która zmienia wszystkie dziedziny nauki, kultury i obyczajowości?
> Trzeba szczególnego rodzaju ortodoksji by trwać w przekonaniu, że matematyka jest ponad tę rewolucję.

Sądzę, że właśnie teraz warto pytać, czym właściwie jest matematyka. Jednak by dać sobie szansę zrozumienia istoty matematyki nie wystarczy czytać i kolekcjonować bezrefleksyjnie poglądy wielkich. Trzeba wyjść poza ograniczenia wyznaczone przez edukacyjne schematy i podjąć ryzyko sformułowania własnego sądu. Bez tego nie mamy szans na zrozumienie czegokolwiek. To tak, jakby próbować nauczyć się matematyki nie rozwiązując samodzielnie żadnego zadania.

> *„To really understand something, I believe that one must discover it oneself, not learn it from anyone else!”*[13].
> Nie szukajcie tu odpowiedzi na te podstawowe pytania a jedynie pomocy i zachęty do poszukiwania własnych.

Cztery uwagi, a nawet siedem

1. Ten tekst jest przeznaczony wyłącznie do rozpowszechniania elektronicznego. Wracam do niego i go zmieniam, poprawiam, uzupełniam. Twierdzenie, że można napisać o podstawach matematyki w sposób kompletny, bez luk, niedopowiedzeń i błędów, to czysta arogancja. *„Plain success is not the only possible goal; this might simply be the exposition of a disorder in this apparently well-organised universe”. J.-Y. Girard [31]*

2. Będę starał się oszczędzić czytelnikom zmagań ze specjalistycznym językiem i rozbudowanym

[11] *Filozofia grecka a fizyka współczesna, Zagadnienia Filozoficzne w Nauce II, 1979/80.* Carl Friedrich Freiherr baron von Weizsäcker (1912 - 2007), niemiecki fizyk i filozof.

[12] Thomas Kuhn (1922-1996) amerykanski filozof nauki autor dzieła *„The Structure of Scientific Revolutions”* w którym wprowadził pojęcie paradygmatu. Paradygmat to zbiór pojęć, stwierdzeń, teorii stanowiacych podstawę danej dziedziny nauki. W odróżnieniu od dogmatu paradygmat nie jest wieczny, jest rodzajem „umowy społecznej” badaczy odgrywających w danym czasie dominująca rolę.

[13] G.J. Chaitin - *„Information Theoretic Incompleteness”*

formalizmem. Ale bez przesady. Podziwiam fizyków, którzy wychodzą ze skóry by wytłumaczyć zawiłości teorii kwantów czy teorii względności pomijając zupełnie opis matematyczny[14]. Ale to tylko zabieg marketingowy. Bezskuteczny, bo przecież *„Krótka historia czasu”* S.Hawkinga zajmuje drugie miejsce na liście tzw. *„unread bestseller” („the books many start but few finish”)* (za Biblią). Może pora uznać, że bez matematyki nie da się pewnych rzeczy wytłumaczyć? Podzielam pogląd prof. M. Hellera, który w [35] napisał: *„Trzeba po prostu bardzo ściśle trzymać się struktur matematycznych; interpretacja teorii winna być „egzegezą” jej matematycznej struktury.”*.

3. Nie traciłem (niestety) zbyt dużo czasu na tworzenie hiperpoprawnej dokumentacji źródeł. Ale zapewniam, że szanuję reguły obowiązujące w świecie akademickiej nauki parametryzowanej i punktowanej na wszelkie sposoby. Dlatego nazywam ten tekst „notatkami” a nie pracą (para)naukową.

4. Cytatów jest tu wiele. Ktoś powie - zbyt wiele. Ale dlaczego mam szukać własnych sformułowań, gdy uznaję cudzą wypowiedź za trafną? A że po angielsku? No cóż, w tym kraju prawie na każdych drzwiach instytucji publicznych widzimy słowa „push” lub „pull”. A tłoku jakoś nie ma ...[15].

5. Ten tekst nie powstałby bez internetu - niewyczerpywalnego źródła informacji. *„There are millions of preprints/articles/books on every topic (be warned this may use up all your spare time for the rest of your life!)”* jak napisano w pewnym artykule dostępnym w ... internecie (niestety nie pamiętam gdzie).

6. Chociaż słowo „filozofia” pojawia się tu często, nie należy kojarzyć tych prób poukładania matematyki z filozoficzną refleksją nad matematyką. Nie mam po temu ani kompetencji ani ambicji.

7. *„Im bardziej zaawansowane technicznie (doskonalsze) medium, tym bardziej prymitywne, błahe i bezużyteczne wiadomości są przy jego pomocy przekazywane”* - S. Lem (Gazeta Wyborcza, lipiec 2011). Zapewniam, że starałem się pamiętać o tej złośliwie przenikliwej uwadze ... .

Nie należy tych zapisków traktować ze śmiertelną powagą. To tylko rodzaj zabawy (intelektualnej - jeśli mogę nieskromnie dodać), rezultat subiektywnych doświadczeń a nie dogłębnych, obiektywnych i niesłychanie wnikliwych studiów nad podstawami matematyki.

O roli wątpienia

1. Kartezjusz[16] *„Rozprawa o metodzie”*:

Poznanie zaczyna się od wątpienia[17]. *„Dawno już dostrzegłem, że (...) zachodzi czasem potrzeba, by dać się wieść mniemaniom, o których wiemy, że są bardzo niepewne (...); ponieważ jednak wówczas pragnąłem oddać się wyłącznie poszukiwaniom prawdy, pomyślałem, że należało postąpić wręcz przeciwnie i odrzucić jako bezwzględnie fałszywe wszystko, co do czego mógłbym sobie wyobrazić najlżejszą nawet wątpliwość, aby zobaczyć, czy potem nie zostałoby w zespole mych wierzeń nic takiego, co by było całkowicie niewątpliwe. Tak więc (...) zamierzałem przyjąć, że nie istnieje ani jedna rzecz, która by była taka, jaka wydaje nam się za ich sprawą. Ponieważ zaś są ludzie, którym się zdarza, że mylą się (...) , to sądząc, iż tak jak każdy inny byłem podatny omyłkom, odrzuciłem jako błędne wszystkie racje, które brałem poprzednio za dowody.”*

2. O. Tilmann Pesch SI, *„Chrześcijańska filozofia życia”*. Wydanie drugie. Kraków, 1930 (tekst znaleziony w internecie),

„Jednym z najsilniejszych dowodów słabości ludzkiego rozumu jest (...) mania powątpiewania, która jak niebezpieczna choroba grozi wszystkim myślącym. Nierozumne powątpiewanie pochodzi tak samo ze słabości ducha, jak nierozumna łatwowierność. Człowiek zarażony tą choroba, jest

[14] Popularne wśród nich jest stwierdzenie, że *„każdy wzór w książce zmniejsza liczbę potencjalnych czytelników o połowę” (S.Hawking, R. Penrose).* C.Rovelli w książce „Tajemnica czasu” wręcz przeprasza za przytoczenie jednego jedynego równania.

[15] Można tę ilość cytatów tłumaczyć inaczej: *„Mam okulary (...) i stawiam wniosek, że to one, w połączeniu z wrodzoną smykałką do przywłaszczania sobie urywków erudycyjnych dzieł, które są zbyt głębokie, bym je zrozumiał, (...) (mogą) wywrzeć mylne wrażenie, iż wiem więcej, niż wiem.” - W.Allen.*

[16] Kartezjusz (René Descartes, 1596 - 1650), francuski filozof, matematyk i fizyk.

[17] Najlepsi studenci to ci, którzy nie przyjmują do wiadomości, że „Słowacki wielkim poetą był”.

niezadowolony z tego, co na pewno wiemy. A ponieważ tyle jest rzeczy, których umysł ludzki nie może do gruntu zbadać, chciałby i te nieliczne pewne rzeczy usunąć, aby mógł o wszystkim wątpić. (...) wątpienie pochodzące ze sceptycyzmu prowadzi do wolnodumstwa; gdyż polega na niechęci do wszelkich przekonań. Wolnodumstwo rodzi się z dążności do umysłowej niesforności, z usposobienia lekkomyślnego, nie lubiącego obowiązków, dlatego swawola i wolnodumstwo tak ściśle ze sobą się łączą. Wątpienie jest wtedy nierozumne, kiedy się wątpi w te prawdy, do których przyjęcia są wystarczające powody.

Gdzie jest przyczyna tej wadliwej skłonności do powątpiewania? Zawsze albo w słabości ducha, albo w namiętności. Pierwsza prowadzi do gnuśnej bezmyślności i obojętności, a druga kryje się poza fałszywym wyobrażeniem o istocie i zadaniu nauki."

I jeszcze jedno zdanie tegoż Autora:

„Matematyczną pewność spotykamy tylko w matematyce; czyż dlatego wszystko inne ma być niepewne?"

Zamiast komentarza, takie oto poruszające wyznanie Bertranda Russella[18]:

Pożądałem pewności, jak ludzie pożądają religijnej wiary. Sądziłem, że łatwiej znaleźć pewność w matematyce niż gdziekolwiek indziej. Odkryłem wszakże, że liczne matematyczne dowody (...) pełne były zwodniczych argumentów i że, o ile pewność daje się w matematyce odkryć, powinna być ona w jakiejś nowej dziedzinie matematyki. (...) Jednakże w miarę postępów w pracy stale przypominałem sobie bajkę o słoniu i żółwiu. Skonstruowawszy słonia, na którym matematyka mogłaby się opierać, zauważyłem, że się on chwieje. Przystąpiłem zatem do skonstruowania żółwia, by powstrzymywał przed upadkiem słonia. Ale i żółw nie był pewniejszy i po dwudziestu latach wysiłków doszedłem do przekonania, że niczego więcej dla zapewnienia matematyce pewności nie potrafię zrobić" .[19]

Czy poukładałem matematykę? Nie sądzę.

> *„Niels Bohr (...) uczestniczył kiedyś w konferencji filozofów - pozytywistów. Wygłosił tam odczyt o najnowszych postępach mechaniki kwantowej. Następnego dnia był... powiedzmy, w złym humorze; najwidoczniej konferencja nie przypadła mu do gustu. Gdy zapytaliśmy go dlaczego, odparł: „Ależ oni wszyscy zgadzają się ze mną! Gdy ktoś po raz pierwszy słyszy o teorii kwantów i nie budzi to w nim głębokiego sprzeciwu, to znaczy, że niczego nie zrozumiał" [87]*

[18]Bertrand Arthur William Russell (1872-1970), angielski arystokrata, logik, matematyk, filozof. Laureat Nagrody Nobla w dziedzinie literatury (1950).

[19]Bertrand Russell , *„Portraits from Memory"*

Rozdział 1

Liczby naturalne

Co Pan uważa za główne zadanie matematyków?
Dostrzec, które twierdzenia są ciekawe. *K. Gödel [28]*

Zdarza się, że opracowania przedstawiające problemy leżące u podstaw matematyki rozpoczynają się od prezentacji teorii mnogości. Radzę porzucić taką lekturę. Cantorowska teoria zbiorów ze swoja stukilkudziesięcioletnią historią to ledwie jeden z rozdziałów matematyki. Wspaniały, zgoda. Ale ogląd matematyki przez pryzmat teorii mnogości jest *ex definitione* zawężony[1]. Jeśli tak widzimy matematykę, to trudno dyskutować o jej podstawowych problemach. Można jedynie rozmawiać o problemach teorii mnogości. Lepiej zacząć próbę zrozumienia matematyki od tego, co było w niej zawsze. Od liczb naturalnych.

1.1 Liczba naturalna - co to jest?

Natural numbers were made by God; all else being the works of Man. *L. Kronecker*[2]

Liczby naturalne to najprostsza struktura liczbowa i zarazem fundament konstrukcji większych struktur - liczb całkowitych, wymiernych, itd. To jądro matematyki. Stwierdzenie Kroneckera, sformułowane zapewne w okresie jego sporu z Cantorem, winniśmy dziś odczytać tak: *„liczby naturalne są dobrem powszechnym. Są wytworem cywilizacji stworzonym przez wszystkich dla wszystkich. Reszta jest dziełem... matematyków"*.
Liczby naturalne zostały utworzone, bo były potrzebne. By panować nad rzeczywistościa, musimy umieć nazywać rzeczy i zjawiska. *„Man gave names to all the animals, in the beginning"* - pisał (śpiewał) Bob Dylan. G.G. Marquez w „Stu latach samotności" napisał jeszcze piękniej: *„Świat był jeszcze tak młody, że wiele rzeczy nie miało nazwy i mówiąc o nich trzeba było wskazywać je palcem."* Zdolność do tworzenia nazw nie tylko indywiduowych, ale i takich, które obejmują klasy obiektów wyróżnionych w procesie abstrakcji[3], to podstawowa cecha umysłowości człowieka.

Człowiek stworzył te liczby bo potrzebował uniwersalnego systemu nazw. Na czym polega ta uniwersalność?
Nazwy-liczby nie nawiązują w żaden sposób do fizycznych cech nazywanych (numerowanych) przedmiotów. Możemy nazywać-numerować elementy dowolnej kolekcji, niezależnie od charakteru tych elementów. To sprawiło, że człowiek zaczął posługiwać się abstrakcyjnym pojęciem „liczebności zbioru". Zaczął porównywać zbiory fizycznie nieporównywalne. Dzięki temu jeden władca mógł powiedzieć do drugiego satrapy (chcąc go pognębić): *„mam więcej żon niż ty wojowników"*. I było to stwierdzenie, które można było weryfikować.

[1] *„Jednym z bardziej szokujących faktów jest to, że wszystko w matematyce można sprowadzić do zbioru"* (internet - *(jabba.pl/hyperreal/klucz/teoria-mnogosci)*. Straszne są skutki edukacji matematycznej opartej na jedynie słusznej teorii mnogości... .

[2] Leopold Kronecker, matematyk niemiecki (1823-91). Wielki i nieprzejednany oponent Cantora.
Georg Cantor (1845- 1918) matematyk niemiecki, pionier i twórca podstaw teorii mnogości (teorii zbiorów).

[3] Abstrahować - pomijać pewne cechy, sprawy na rzecz innych (...) - słownik W. Kopalińskiego.

Ten zasób nazw jest niewyczerpywalny. Liczb naturalnych jest wystarczająco wiele, by za ich pomocą nazywać-numerować wszystko, co spotkamy w otaczającym nas świecie. Uniwersalność liczb naturalnych polega na tym, że są składową wszystkich wymyślanych przez nas języków opisu rzeczywistości. „Języków” a nie pojedynczego języka, bo, z natury rzeczy, zawsze postrzegamy i opisujemy tylko fragment reczywistości.
Te liczby to nie tylko zasób, ale uporządkowany liniowo SYSTEM nazw. Z każdą liczbą-nazwą związany jest jej *następnik* - *„dwa - trzy” „sto - sto jeden”,...* . Dlatego nazywanie-numerowanie elementów dowolnej kolekcji oznacza automatycznie jej *uporządkowanie*, ustalenie kolejności[4].

> Liczby naturalne są uniwersalnym systemem ZLICZANIA I KOLEJKOWANIA[5].

Zliczanie i kolejkowanie to procesy - czynności dziejące się w CZASIE. Dlatego człowiek wpadł na pomysł, by wykorzystać liczby naturalne do (dyskretnego) skalowania czasu. To konieczne, by próbować zrozumieć dziejące się procesy i planować działania. Któż nie zna dziecięcego *„raz, dwa, trzy,..., piętnaście - szukam!”*? Dzięki temu umownemu skalowaniu czasu chowający się wiedzą, ile mają czasu na znalezienie kryjówki a szukający może określić granice obszaru poszukiwań.

> Odpowiedź na pytanie *„do czego służą liczby naturalne?”* jest ważniejsza niż rozważania o tym, *„co to jest liczba naturalna?”* Poza matematyką liczba jest narzędziem opisu rzeczy a nie rzeczą. Jest nośnikiem informacji[6].

Liczby naturalne nie należą do matematyków. Są dobrem powszechnym. Każdy człowiek w wieku powyżej trzech lat łatwo wskaże kolekcje złożone z dwóch, trzech, itd. elementów, znajdując w tym oparcie dla swego wyobrażenia o liczbach. A pytany „cóż to jest liczba trzy?” ograniczy się do takiego wskazania, nie siląc się na formułowanie definicji. I ma rację.

To jest sens stwierdzenia Kroneckera.
Ten pogląd podzielał Hilbert[7]. Mówił, że - w odróżnieniu od innych pojęć matematycznych - *„liczby naturalne są obecne w naszej intuicji.”* Podobnie myślał Poincare[8]: *„struktura liczb naturalnych i związana z nią zasada indukcji są intuicyjnie i nie wymagają podstawy; w istocie, (...) zakłada się je w każdej próbie budowy podstaw (matematyki)”[29].*

> „Wynalezienie liczb naturalnych” sprawiło, że skończoność stała się policzalna (mierzalna). Dwie skończone mnogości można było odtąd nie tylko porównywać (na zasadzie „większa-mniejsza”) ale precyzyjnie opisywać różnicę między nimi. Zamiast o „skończonej ilości” zaczęliśmy mówić precyzyjnie o „skończonej liczbie” obiektów wskazując jednocześnie tę liczbę.

„Uniwersalny, uporządkowany i niewyczerpywalny system nazw” to jeden z najbardziej udanych pomysłów człowieka. Liczby naturalne są obecne w każdej kulturze, są elementem każdego języka. Wraz z postępem cywilizacyjnym rósł zakres ich zastosowań. Dziś trudno sobie wyobrazić, jak ważny był wynalazek zera.[9]. Jednym z najwcześniejszych przełomowych momentów była działalność Pitagorasa i jego uczniów, którzy skojarzyli arytmetykę z geometrią i zaczęli używać liczb do

---

[4]Używając języka mainstreamowej matematyki: liczby naturalne to *zbiór dobrze uporządkowany*.

[5]Podwójna rola liczb naturalnych została odwzorowana w teorii mnogości: liczby naturalne to jednocześnie najprostsze *liczby kardynalne* (zliczanie) i *liczby porządkowe* (kolejkowanie). W gramatyce języka polskiego mówimy o *liczebnikach głównych* i *porządkowych*. A kognitywiści mówią o *kardynalnym* i *porządkowym* aspekcie liczb [9].

[6]*„Jeden, dwa, trzy...”* to *liczebniki* a nie *rzeczowniki*.

[7]David Hilbert (1862 - 1943) - genialny matematyk niemiecki. To jeden z głównych bohaterów tego tekstu.

[8]Jules H. Poincaré (1854- 1912).

[9]Zero nie było znane startożytnym Grekom ani i Rzymianom. *„The addition of* 0 *to the natural numbers was a major intellectual accomplishment in its time. The addition of negative integers to form Z already constituted a* DEPARTURE FROM THE REALM OF IMMEDIATE EXPERIENCE TO THE REALM OF MATHEMATICAL MODELS.*” (wikipedia, transfer principle)..*„Zero” pojawiło się (zapewne) w Indiach około V wieku naszej ery.

Był sobie raz. Wymyślił zero.
W kraju niepewnym. Pod gwiazdą
dziś może ciemną. Pomiędzy datami,
na które któż przysięgnie. Bez imienia
nawet spornego. Nie pozostawiając
poniżej swego zera żadnej myśli złotej

badania obiektów geometrycznych, do opisu rezultatów mierzenia odległości i ich porównywania[10].

Liczby naturalne w teorii mnogości

Liczba staje się rzeczą gdy czynimy ją przedmiotem badań. Liczba jest obiektem (rzeczą) w matematyce. Dlatego teoria mnogości musiała zaproponować własną definicję liczb naturalnych.

> Teoria mnogości odrzuca wszelkie pre-intuicje. Poza jedną - jedynym pierwotnym pojęciem teorii mnogości jest „zbiór"[11]. Dlatego liczby naturalne musiały być zdefiniowane w tej teorii jako pojęcie wtórne, poprzez odwołanie do tego jedynego pojęcia podstawowego.

Zrobiono to tak: jeden z aksjomatów ZFC[12] to postulat istnienia *zbioru induktywnego*:

„Zbiór $\mathcal{A}$ jest induktywny, jeżeli zawiera zbiór pusty i wraz z każdym zbiorem B zawiera zbiór $B \cup \{B\}$.[13]

ZBIÓR LICZB NATURALNYCH $\mathbf{N}$ TO NAJMNIEJSZY ZBIÓR INDUKTYWNY[14]. Jego pierwszym elementem - *zerem* - jest zbiór pusty $\emptyset$. Jedynką - zbiór $\{\emptyset\}$. Dwójką - zbiór $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
Następnikiem dowolnego zbioru-liczby $A \in \mathbf{N}$ jest zbiór $A \cup \{A\}$.

> Niech to nie umknie naszej uwadze: pojęciem definiowanym jest ZBIÓR LICZB NATURALNYCH. Same liczby to „tylko" elementy tego zbioru. I też są zbiorami.
> Liczba abdykowała na rzecz zbioru[15].

To nie jest miła definicja. Jaki pożytek ze stwierdzenia, że liczba to zbiór? Przecież to w żaden sposób nie pomaga zrozumieć dlaczego $2 + 2 = 4...$.

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} + \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \stackrel{?}{=} \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}\},$$

Nie w tym rzecz. Ta teoriomnogościowa definicja to element języka *metaarytmetyki* - nie ma służyć prowadzeniu obliczeń, ale badaniu *własności* obliczeń. Nie ma ułatwiać obliczenia, że $3+4 = 7$, ale ma pomóc zrozumieć (uprawomocnić?) zasadę indukcji matematycznej[16].

To pierwsze to rachunki, to drugie to matematyka.

---

o życiu, które jest jak. Ani legendy,
że dnia pewnego do zerwanej róży
zero dopisał i związał je w bukiet.
że kiedy miał umierać, odjechał w pustynię
na stugarbnym wielbłądzie. Że zasnął
w cieniu palmy pierwszeństwa. Że się zbudzi,
kiedy już wszystko zostanie przeliczone
aż do ziarenka piasku. Cóż za człowiek.

Szczeliną między faktem a zmyśleniem
uszedł naszej uwagi. Odporny
na każdy los. Strąca ze siebie
każdą, jaką mu daję, postać.
Cisza zrosła się nad nim, bez blizny po głosie.
Nieobecność przybrała wygląd horyzontu.
Zero pisze się samo.
W. Szymborska, „Wiersz ku czci"

(Równie zaskakujące jest to, że symbol równości - „=" pojawił się w matematyce dopiero w ... XVI wieku).

[10]Pitagorejczycy byli tak zachwyceni swoim pomysłem, że popadli w przesadę. Uznali, że istotne w świecie jest tylko to, co można wyrazić liczbowo. Wyróżniamy te obiekty przestrzenne (i nazywamy geometrycznymi), które charakteryzuje pewna doskonałość stosunków liczbowych - trójkąt (równoboczny), kwadrat, koło, kula. Zdumieni możliwościami jakie dawał taki opis świata uznali, że „liczbowy ład" nie jest przez nich kreowany ale odkrywany. Jest zasadą organizującą rzeczywistość. To stało się paradygmatem ich oglądu świata - doszukiwać się wszędzie „ładu liczbowego i geometrycznego". Dlatego np. Ziemia - centrum ich wszechświata - winna być kulą. *„Sens istnienia człowieka polega na poszukiwaniu harmonii, którą się utrzymuje wszystko, nie wyłączając bogów" [43].*

[11]Pojęcie pierwotne danej teorii to takie, które nie jest w niej definiowane (np. punkt w geometrii).

[12]ZFC - aksjomaty teorii mnogości Zermelo-Fraenkla wraz z pewnikiem wyboru. Będę często pisał „teoria ZFC" zamiast „teoria mnogości".

[13]$\{B\}$ to oznaczenie zbioru, którego jedynym elementem jest zbiór B. Teoria mnogości tak ma. Musisz się z tym pogodzić i np. zrozumieć, że zbiór pusty $\emptyset$ to nie to samo co $\{\emptyset\}$.

[14]Nazywany też *modelem standardowym* arytmetyki.

[15]*„(...) od chwili powstania ZFC każda wielkość matematyczna, w szczególności każda liczba naturalna, jest zbiorem. Z formalnego punktu widzenia to ma tę zaletę, że istnieje tylko jedno pierwotne pojęcie, ale (...) dlaczego liczby powinny być zbiorami (w matematyce formalistycznej po ożywieniu liczb naturalnych w postaci zbiorów, fakt ten jest jak najszybciej ukrywany)? - J. Ponstain, Nonstandard Analysis (internet)*

[16]Teoriomnogościowe sformułowanie zasady indukcji wygląda tak: jeśli podzbiór $A \subseteq \mathbf{N}$ zawiera zbiór pusty i wraz z każdym zbiorem B zawiera zbiór $B \cup \{B\}$ to $A = \mathbf{N}$. Pomyśl: skoro $\mathbf{N}$ to NAJMNIEJSZY zbiór induktywny, to jakikolwiek induktywny zbiór w nim zawarty musi mu być mu równy.

1.2 Nieskończoność potencjalna czy aktualna?

Gdyby oczyścić drzwi percepcji, każda rzecz jawiłaby się taka, jaka jest: nieskończona.
W. Blake[17]

The existence of ... infinite object? Show me one and I will then show you a cuple of angels engaged in the "macarena" on the head of the pin [80]

Zasób uniwersalnych nazw - liczb naturalnych - jest niewyczerpywalny. NIE JEST skończony. Teoriomnogościowcy idą krok dalej: mówią, że definiowany w teorii mnogości zbiór liczb naturalnych JEST *zbiorem nieskończonym.*

> Stwierdzenie: „liczby naturalne nie tworzą zbioru skończonego" nie musi oznaczać, że tworzą one zbiór nieskończony. Ale teoriomnogościowcy, nie akceptujący niczego co nie jest zbiorem, MUSIELI uznać, że liczby naturalne tworzą inny rodzaj zbioru - zbiór nieskończony.

Pytanie o nieskończoność to nie problem wyłącznie matematyczny. To jedno z fundamentalnych pytań człowieka myślącego. Każdy kiedyś przeżył to szczególne uczucie, jakie budzi ogrom i fizyczne niemal odczucie nieskończoności rozgwieżdżonego nieba i świadomość „bycia cząstką kosmosu". Nieskończoność fascynuje. Czy wszechświat jest nieskończony? Czy czas jest nieskończony? To kontrapunkt dla naszej egzystencji zdeterminowanej przez skończoność. Niepogodzeni, chętnie wierzymy w nieskończoność czasu i przestrzeni. Jako rodzaj absolutu nieskończoność jest obecna w niemal każdej religii, a obietnica nieskończonego istnienia jest największą wartością. *„Pragniemy transcendentnego, nadludzkiego usprawiedliwienia dla naszych skończonych, ucieleśnionych myśli i działań - Kant*[18].

Jest jednak przepaść między uzasadnioną psychologicznie potrzebą odniesienia się do nieskończoności a świadomą akceptacją jej istnienia. Wbrew temu, że to pojęcie nie ma żadnego desygnatu w fizycznej czasoprzestrzeni.

Nieskończoność... ale jaka? Ciut upraszczając można powiedzieć, że spór o nieskończoność to ścieranie się dwóch koncepcji ukształtowanych i dyskutowanych zawzięcie już w starożytności.

Arystoteles[19] uważał, że istnieje tylko *nieskończoność potencjalna. „Nieskończoność istnieje w ten sposób, że jedna rzecz występuje zawsze po drugiej i każda rzecz tego ciągu jest skończona i zawsze różna" (...) Nieskończoność jest przeciwieństwem tego, co się tak zazwyczaj określa. Nie to bowiem jest nieskończone, co już nie ma niczego poza sobą, lecz właśnie to, co zawsze ma coś poza sobą" (Arystoteles, Fizyka)*[20]. Stanowisko przeciwne to uznanie istnienia nieskończoności aktualnej, akceptacja „bytów nieskończonych". Arystotelesowska nieskończoność potencjalna jest wówczas tylko drogą poznania „właściwej" nieskończoności.

> Liczby naturalne postrzegane jako niewyczerpywalny zasób nazw to nieskończoność potencjalna.
> Definiowany w teorii mnogości zbiór liczb naturalnych jest zbiorem aktualnie nieskończonym.
> *„Nieskończoność potencjalna oznacza nieograniczoną zdolność umysłu do konstruowania obiektów. W tym ujęciu sama* NIESKOŃCZONOŚĆ NIE JEST OBIEKTEM PODLEGAJĄCYM OPERACJOM MATEMATYCZNYM, *ale wyłącznie źródłem tych obiektów.*
> *Nieskończoność aktualna charakteryzuje się tym, że sama jest obiektem podlegającym rozmaitym operacjom" [32].*

Uznanie nieskończoności aktualnej w matematyce teoriomnogościowej oznacza, że staje się ona przedmiotem badań. Zgodzono się - nieco bezkrytycznie - że w świecie zbiorów nieskończonych

[17] Willam („Mad") Blake (1757-1827)- poeta i mistyk angielski. Ten cytat to ukłon w stronę tych, którzy pamiętają zespół „The Doors".

[18] (6.08. 2011 roku zmarł polski malarz-konceptualista, Roman Opałka, który od 1965 roku tworzył cykl *„Opałka 1965/1 - ∞"*. Ten cykl to wypisywanie na obrazach kolejnych liczb naturalnych... *„Jestem przejęty czasem i jego upływem. Idea malowania czasu stała się moim programem, który zostanie zakończony wraz z moją śmiercią.".*

[19] Arystoteles, (384 - 322 p.n.e.) - jeden z trzech, obok Platona i Sokratesa, najważniejszych filozofów greckich.

[20] Jeszcze jeden cytat z tego dzieła: *„Teraz „być" oznacza albo „być potencjalnie" albo „być faktycznie", a rzecz może być nieskończona albo przez dodawanie, albo przez dzielenie. Twierdziłem, że żadna rzeczywista wielkość nie może być nieskończona, ale nadal może być nieskończenie podzielna (...) ."* - cytuję za [44].

obowiązuje większość praw świata obiektów-zbiorów skończonych. Dlatego mówimy (myślimy) o „zbiorze wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych" tak samo jak o zbiorze podzbiorów zbioru sześcioelementowego... . Można, ale trzeba pamiętać, że to tylko apriorycznie przyjęte założenie a nie fakt, który można jakkolwiek potwierdzić.

Teoria mnogości nie tylko akceptuje, ale wręcz afirmuje nieskończoność aktualną. E. Zermelo nazywał matematykę „logiką nieskończoności". Ta teoria odwraca relację między skończonością a nieskończonością: początkujący adept matematyki dowiaduje się, że *„zbiór skończony to taki, który nie jest nieskończony"*. Skołowany nie pyta, czy to zgodne z intuicją skończoności, czy np. tak rozumiany skończony zbiór można opróżnić w skończonym czasie wyjmując kolejno pojedyncze elementy...[21].

Dzielenie włosa na czworo? Z dzisiejszej perspektywy - tak. Ale przed Cantorem nieskończoność aktualna wcale nie dominowała w matematyce. W antycznej Grecji wręcz jej unikano: *„Nieskończoności (aktualnej - GJ) unikano zarówno w filozofii jak i geometrii. Rozważania matematyczne, w których (...) pojawiała się nieskończoność, prowadziły do paradoksów i różnego rodzaju aporii (trudności). Dlatego w miarę możliwości eliminowano z matematyki wszelkie takie „podejrzane" sytuacje. Jeśli przyjrzymy się dokładnie „Elementom", to zauważymy, ze nieskończoność jest z nich wyeliminowana całkowicie. Linia prosta jest ograniczona - kończy się punktami (...)"*[22].

Oto jedna z takich podejrzanych sytuacji:
„Czy Achilles dogoni żółwia, od którego dzieli go (skończony) dystans D? Achilles biega dziesięć razy szybciej i dlatego musi dogonić zwierzę - tak nam się zdaje. Ale gdy Achilles, przebiegnie dystans D, to żółw przeczłapie jedną dziesiątą tego dystansu i odległość między nimi będzie wtedy równa $\frac{1}{10}D$. Gdy Achilles przebiegnie dystans równy tej nowej odległości, to żółw w tym czasie oddali się na odległość równą $\frac{1}{100}D$. I tak dalej, W NIESKOŃCZONOŚĆ*... . Dystans między Achillesem i żółwiem będzie coraz mniejszy, ale Achilles nigdy nie dogoni gada... ."*

To jeden z paradoksów Zenona z Elei[23]. Są dwa powody zamieszania wokół tej opowiastki, oba związane z nieskończonością. Pierwszy to przekonanie, że możliwe jest nieskończone dzielenie skończonego odcinka - dystansu w rzeczywistej przestrzeni. Grecy tego nie wiedzieli, ale my wiemy (powinniśmy wiedzieć), że *„jeżeli będziemy wciąż zmniejszać odległość między dwoma punktami, to w pewnym momencie dosięgniemy tak małej skali, że samo* POJĘCIE ODLEGŁOŚCI STRACI SWÓJ ZWYKŁY SENS" [55][24]. Ten sens utracimy szybciej, niż się zdaje: gdy, na przykład, pierwotna odległość między Achillesem a żółwiem to kilometr, to już przy 13-15 pomiarze odległości będziemy operowali wielkościami porównywalnymi ze średnicą atomu wodoru... .

Drugi powód to niefrasobliwe przekonanie, że „nieskończone sumowanie" skończonych wielkości musi dać wynik nieskończony. Ponieważ można dokonać nieograniczenie wielu obserwacji pozycji żółwia i Achillesa a kolejne obserwacje oddzielają trwające pewien czas przerwy, to wydaje się, że ta zabawa może (musi) trwać nieskończenie długo. Ale to nieprawda.
Przypuśćmy, że Achilles pokonuje dystans D w godzinę. Wówczas pierwszą obserwację wykonamy po 1 godzinie od chwili startu zawodników. Drugą - po $1+\frac{1}{10}=\frac{11}{10}$ godziny, trzecią - po $\frac{111}{100}$ godziny a n-tą - po $\frac{11...1}{10^{n-1}}$ godziny (licznik ułamka to liczba złożona z n jedynek).
Nie trzeba być matematykiem by zauważyć, że wszystkie te liczby są mniejsze od $\frac{10}{9}$. To oznacza, że opisaną metodą obserwujemy pościg Achllesa tylko w początkowym okresie gonitwy, w czasie krótszym niż godzina i 7 minut. Co się dzieje później - nie widzimy. A wtedy Achilles dogoni gada...

---

[21] Może i lepiej, bo to pytanie byłoby nielichym kłopotem dla wielu wykładowców. A wprowadzenie wykładowcy w zakłopotanie może (musi) oznaczać kłopoty pytającego ... . Szanowny studencie, masz rację: tego nie można dowieść! Wykażemy to, gdy będzie tu mowa o twierdzeniu Łosia.

[22] M.Heller, Z.Pogoda: *„Geometria i kosmologia - historia wzajemnych związków - http://www.msn.ap.siedlce.pl/smp/msn/3/27-31.pdf.* „Elementy" to słynne dzieło Euklidesa (ok. 365 - ok. 300 r. p.n.e.).
To szczególne poczucie bezradności antycznych Greków określane jest mianem *„horror infinity"* - strach przed nieskończonością. Niektórzy przypisują autorstwo tego określenia Cantorowi.

[23] Zenon z Elei (ok. 490 p.n.e. - ok. 430 p.n.e.), filozof.

[24] Współczesna fizyka operuje pojęciem *długości Plancka*.To wielkość $10^{-33}cm$ „poniżej której pojęcie odległości traci sens" [65].

.

Ten i inne paradoksy Zenona to nic innego jak skutek mówienia o nieskończoności w nieadekwatnym języku. Pokazuje, że operowanie nieskończonością w matematyce nie może opierać się na intuicji lecz wymaga precyzyjnie zdefiniowanych pojęć i specyficznych metod obliczeniowych. Współczesna matematyka to wszystko ma. Dziś uczymy się o *zbieżności* ciągów nieskończonych i ich granicach, o *szeregach* liczbowych i ich sumach jako o czymś oczywistym.
Doprowadzenie tego języka do doskonałości to zasługa Cantora i wszystkich, którym zawdzięczamy obecny kształt analizy matematycznej [25].

Cantor nie był pionierem uznania nieskończoności aktualnej w matematyce. Pięć wieków wcześniej Mikołaj z Kuzy głosił: *„wszystko, co skończone, ma swe zródło w zasadzie nieskończoności” [18]*[26]. Już Bolzano wskazywał zbiory, dla których można ustalić wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między elementami tych zbiorów a elementami ich istotnie mniejszych podzbiorów (co w teorii mnogości jest wyróżnikiem zbiorów nieskończonych)[27]. Ale to Cantor uczynił nieskończoność aktualną centralnym pojęciem matematyki i przeciął węzeł gordyjski odwiecznych sporów o nieskończoność (w matematyce).

Uznanie nieskończoności aktualnej w matematyce nie było oczywistością. Była to świadoma decyzja twórców teorii mnogości a w szczególności Cantora. To rewolucja, akt intelektualnej odwagi, porównywalny z rewolucja kopernikańską[28]. Zdominowała matematykę XX wieku.

„NIKT NAS NIE WYGNA Z RAJU, KTÓRY STWORZYŁ CANTOR” - D. HILBERT.

Puenta

Czy dyskusja o nieskończoności może mieć puentę?

> Spór o nieskończoność nie zawsze był dyskusją szanujących się adwersarzy. Kiedy w XV wieku Mikołaj z Kuzy zaczął głosić, ze wszechświat jest nieskończony, Kościół szybko przystąpił do kontrofensywy. Jej ofiarą stał się Giordano Bruno, wyznawca poglądu o nieskończoności wszechświata. Pogląd ten (wraz z innymi głoszonymi przez niego) uznano za herezję. G. Bruno został uwięziony, torturowany przez długie lata i spalony na stosie w 1600 roku... ’

[25] Być może zamysłem Zenona było właśnie prowokacyjne zwrócenie uwagi na niedostatki języka „badań nad nieskończonością”. Nie dziwi też, że nadał temu popularną w tym czasie mitologiczno-bajkową formę: wszak i dziś od wykładowców wymaga się, by mówili „łatwo i przystępnie”... .

[26] *Wraz z Kuzańczykiem (Mikołaj z Kuzy - Nicolaus Krebs (1401-1464), filozof i teolog niemiecki - GJ) zarysowuje się wyobrażenie wszechświata jako otwartego w nieskończoność mającego środek wszędzie a obwód nigdzie (...) Gdy wydłuża się tedy średnica okręgu maleje jego krzywizna: nieskończony obwód staje się nieskończoną prostą: w Bogu zbiegają się wszelkie przeciwieństwa” [26].*

[27] Przyporządkowując każdej liczbie naturalnej n liczbę $2 \cdot n$ ustalamy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między zbiorem wszystkich liczb naturalnych i zbiorem liczb parzystych. Te zbiory mają „tyle samo” elementów - są równoliczne - choć liczby parzyste tworzą zbiór istotnie mniejszy do zbioru wszystkich liczb naturalnych.

[28] To ryzykowne porównanie jeśli uwzględnimy „kontekst” obu rewolucji. Dzieło Kopernika przeciwstawiało się powszechnie wówczas akceptowanej (i wspieranej przez Kościół) teorii Ptolemeusza. Natomiast idee Cantora były zgodne z poglądami neo-platoników zaakceptowanymi przez filozofów katolickich.

Rozdział 2

Nieskończoność kontrolowana

„Nie o to chodzi, by złowić króliczka, ale by gonić go...”
Agnieszka Osiecka

Czy nieskończoność aktualna jest konieczna? Czy jest alternatywa dla raju Cantora? Czy matematyka potrafi modelować nieskończoność potencjalną?

Mówiąc „zbiór liczb naturalnych” traktujemy wszystkie liczby w sposób równouprawniony. A przecież Russell zatytułował rozdział w [63] poświęcony liczbom naturalnym nie *„zbiór...”* a *„ciąg liczb naturalnych”*. G. Mannoury już w 1909 roku wskazywał na pułapkę ukrytą w stwierdzeniu że np. liczba 3 to taka sama liczba jak 9^{9^9}. Skończoność to więcej niż kosmos[1].

Niektórzy matematycy gotowi są utożsamiać skończoność obiektu matematycznego z jego trywialnością. Być może ogłoszenie w 1976 roku komputerowego rozwiązania problemu czterech barw skłoniło część z nich do rewizji poglądów[2]. Ale nie wywołało rewolucji.

> Osią sporów wokół nieskończoności aktualnej i potencjalnej jest stosunek do roli czasu w kreacji obiektów matematycznych. Teoria mnogości jako spadkobierczyni platonizmu pojmuje obiekty matematyczne jako wieczne i niezmienne w czasie. Rozszerzając świat platońskich idei o nowy byt - nieskończoność - musiała przyjąć, że jest to nieskończoność aktualna.
> Dla konstruktywistów - zwolenników nieskończoności potencjalnej - kreacja to konstrukcja, proces przebiegający w czasie. Każda liczba naturalna powstaje z zera w wyniku skończonego procesu. A wtedy liczba 3 zaczyna się różnić od 9^{9^9} - jest łatwiej dostępna.

Skoro każdy rodzaj bytu może być wyróżniony bądź jako potencjalny bądź jako w pełni urzeczywistniony, wobec tego URZECZYWISTNIANIE *bytu potencjalnego jako takiego będzie właśnie ruchem” - Arystoteles, Fizyka, Ks. III.* Minęło ponad dwa tysiące lat i M.Atiyah[3] napisał: *W statycznym wszechświecie nie można sobie wyobrazić algebry, ale geometria jest zasadniczo statyczna. Mogę tu siedzieć i patrzeć i nic się może nie zmieniać, a mimo to mogę widzieć. Algebra wszakże ma do czynienia z czasem, ponieważ jej operacje trzeba wykonywać kolejno (...). Każdy algorytm, każdy proces rachunkowy, jest ciągiem kroków wykonywanych jeden po drugim. Współczesny komputer wyraźnie to nam uświadamia (...). Algebra dotyczy manipulacji w czasie, a geometria dotyczy przestrzeni. Są to dwa ortogonalne aspekty świata, przedstawiające dwa różne punkty widzenia na matematykę. Czas jest czymś, co istnieje w algebrze, a nie istnieje w geometrii.” [2]*

[0] Gerrit Mannoury (1867 - 1956) matematyk i filozof holenderski.

[1] *„Należy zaznaczyć, że już tutaj wkracza element idealizacji. Uważamy 5, 1000 i $10^{10^{10}}$ za obiekty „tego samego rodzaju”, chociaż nasz obraz mentalny w każdym z tych przypadków jest inny: możemy natychmiast uchwycić „pięć” jako zbiór jednostek, podczas gdy, z drugiej strony, $10^{10^{10}}$ jest dostępne tylko poprzez pojęcie potęgowania” [85].* Liczbę atomów we wszechświecie szacuje się na $6 \cdot 10^{78}$. Co robię, gdy piszę *„dodajmy liczbę 1 do 10^{97}”* ???
Dla porównania: największa znana liczba pierwsza to $2^{57885161} - 1$.

[2] Czy każdą mapę można pokolorować za pomocą czterech barw tak, by sąsiadujące państwa (mające wspólną, ale nie jednopunktową, granicę) nie miały tego samego koloru? Komputerowy dowód potwierdzający taką możliwość polegał na rozpatrzeniu prawie 2000 różnych możliwych przypadków. Ponad możliwości człowieka.

[3] Michael F. Atiyah (ur. 1929) – matematyk brytyjski, laureat medalu Fieldsa w 1966 roku.

Te *„dwa ortogonalne*[4] *(...) punkty widzenia”* teoria mnogości usiłuje opisywać tym samym językiem, którego pierwotnym pojęciem jest statyczny „zbiór”. W konsekwencji te dwa aspekty matematyki nie są w mainstreamowej matematyce równouprawnione. Nieco zmieniając końcówkę wypowiedzi Atiyaha powiemy, że „czas jest czymś, co istnieje w matematyce, a nie istnieje w teorii mnogości”[5].

2.1 Liczby naturalne według konstruktywistów

To know that A is a set is to know how to form the canonical elements in the set and under what conditions. two canonical elements are equal. P. Martin-Löf[6]

Czy o liczbach naturalnych można mówić matematycznie, ale inaczej? Można, jeśli uwierzymy w istnienie matematyki poza teorią mnogości.

Martin-Löf mówi: *„wiedzieć, że A jest zbiorem oznacza, że wiemy jak konstruować (formować, kształtować) jego elementy”*. Zbiór jest opisem (specyfikacją) warunków, jakie muszą być spełnione w procesie konstrukcji jego elementów[7].

„To form” to czasownik. Formowanie odbywa się w dyskretnym czasie, krok po kroku. Spójrzmy oczami Martin-Löfa na konstrukcję liczb naturalnych. Zaczynamy od pojedynczej *wielkości początkowej* - liczby 0. W każdym kroku dodajemy jedną nową wielkość - *następnik* ostatnio skonstruowanej liczby[8]. Wszystko, co utworzymy w ten sposób w rezultacie dowolnie długiego, ale skończonego ciągu kroków, JEST liczbą naturalną. I nic ponad to.

Zapiszmy reguły rządzące organizacją tego PROCESU w sugestywnej formie:

$$(Nat) \qquad \frac{}{0 : \mathbf{N}} \qquad \frac{n : \mathbf{N}}{succ(n) : \mathbf{N}}$$

Brak licznika w pierwszej regule-ułamku oznacza, że zero jest bezwarunkowo liczbą naturalną. Druga reguła mówi, że napis $succ(n)$ jest liczbą, o ile jest nią napis n[9].

$$0, succ(0), succ(succ(0)), suc(suc(suc(0)), \ldots$$

Liczby naturalne można reprezentować inaczej, używając innych napisów. Ale nie zmienia istoty tej definicji: ważne jest to JAK TWORZYMY liczby naturalne a nie czym one są.
H. Curry: *„Dowolny układ obiektów (...)generowany z pewnego początkowego obiektu przez pewną jednoargumentową operację tak, że każdy nowo wygenerowany obiekt różni się od poprzednio utworzonych i że proces może być kontynuowany w nieskończoność, będzie działał tak, jak zbiór liczb naturalnych. Można (...) zobiektywizować ten proces, przedstawiając liczby w postaci symboli; wybieramy jakiś symbol, powiedzmy kreskę „|”, dla obiektu początkowego, a operację traktujmy jako umieszczenie kolejnej kreski po prawej stronie danego wyrażenia.” [69]* [10].

Skutkiem stosowania tych reguł jest kreacja (potencjalnie) nieskończenie wielu obiektów matematycznych. Dopiero w drugiej kolejności możemy uznać, że jest nim kreacja pojedynczego obiektu - (aktualnie) nieskończonego zbioru liczb naturalnych. Ale czy musimy?

> Poszukiwaczom dziury w całym pytającym o definicję „skończonego ciągu kroków” odpowiem: skończoność to termin, który jak żaden inny jest związany z istotą naszej egzystencji.

[4] „Wzajemnie prostopadłe”.

[5] Kantowski rozdział „czasu” i „przestrzeni” zanegował Einstein w szczególnej teorii względności, w której współzależność tych pojęć została zrealizowana pod hasłem „czasoprzestrzeń”. Matematyczne podstawy tego pojęcia zbudował Minkowski (*„przestrzeń Minkowskiego”*) którego wykładów na politechnice w Zurychu słuchał Einstein.

[6] Per Martin-Löf (1942 -) szwedzki logik i filozof, twórca tzw. intuicjonistycznej teorii typów.

[7] Aby uniknąć niepożądanych skojarzeń możemy mówić o „typach” zamiast o „zbiorach” rozumiejąc ten termin tak, jak współczesna informatyka.

[8] $n \rightsquigarrow succ(n) = n + 1$. W jęz. angielskim następnik to *succesor*.

[9] *„Numerals” - terms containing only unary symbol „succ and a constant* 0 *are genetic; they are formed by human activity - E.Nelson [53].*

[10] Haskell Curry (1900-1982) - amerykański matematyk i logik.

> Operowanie pojęciem „dowolnie długi, lecz skończony proces” nie może budzić sprzeciwu. Jest intuicyjnie oczywiste.

Skoro tak, to mamy DWIE DEFINICJE liczb naturalnych. Porównajmy:

definicja konstruktywna:
1. $0 \in \mathbf{N}$,
2. $n \in \mathbf{N} \rightarrow succ(n) \in \mathbf{N}$,
3. liczbą naturalną jest to, co potrafimy skonstruować za pomocą reguł 1. i 2. w skończonej ilości kroków.

. *definicja teoriomnogościowa:*
1. $\emptyset \in \mathbf{N}$,
2. $n \in \mathbf{N} \rightarrow n \cup \{n\} \in \mathbf{N}$,
3. **N** *to najmniejszy spośród zbiorów spełniających warunki 1. i 2.*

Liczby naturalne zaczynamy poznawać już w najwcześniejszym okresie edukacji i to nie jako zbiór ale jako zasady ich konstrukcji. Stopniowo rozszerzamy ich zakres i uświadamiamy sobie nieograniczony charakter tego procesu. Ta edukacja (oparta na doświadczeniu i intuicji a nie na definicjach) sprawia, że nie mamy kłopotu z akceptacją definicji konstruktywnej. Definicję teoriomnogościową znają (powinni znać) jedynie studenci i absolwenci studiów matematycznych. Ci osobnicy rozumieją (powinni rozumieć) że wprowadzenie definicji teoriomnogościowej jest konieczne jeśli liczby naturalne mają być obiektem badań w ramach matematyki opartej na teorii mnogości. Akceptują tę definicję mimo jej abstrakcyjnego charakteru (i pewnych ułomności o których będzie tu jeszcze mowa) gdyż - być może podświadomie - kierują się zasadą, którą trafnie opisał I.Lakatos:

„Znaczenie symboli matematycznych to nie same symbole (...). Nie jest też znaczeniem symboli ich teoriomnogościowa interpretacja (...). Ostatecznie ZNACZENIE MATEMATYCZNE JEST JAK ZNACZENIE CODZIENNE *(everyday meaning). Jest częścią ucieleśnionego poznania.” [45]* [11] .
Mowa tu o symbolach ale to samo można powiedzieć o pojęciach matematycznych.

> Znaczeniem codziennym pojęcia „liczby naturalne” jest „uniwersalny system nazw” identytfikowany przez definicję konstruktywną. Definicja teoriomnogościowa jest jedynie propozycją opisu tego obiektu w języku matematyki teoriomnogościowej.

Takie rozumienie relacji między konstruktywnie definiowanymi i teoriomnogościowo opisywanymi liczbami naturalnymi znajduje swój wyraz w stwierdzeniu łączącym obie definicje w sensowną ale formalnie niepoprawną całość:

„Liczbą naturalną jest zero (zbiór pusty) i wszystko, co z niego skonstruujemy w skończonej liczbie kroków korzystając z teoriomnogościowej operacji $A \rightsquigarrow A \cup \{A\}$*”*[12].
No cóż, *nobody's perfect...*[13].

2.2 Struktury rekurencyjne

> *„Recursion is frequently used in mathematics and programming in the construction of classes of objects and in the definition of functions and programs.* *A. Bundy [10]*

Rekurencja[14] to mechanizm tworzenia potencjalnie nieskończonych kolekcji. Tak człowiek zapano-

[11] I.Lakatos (1922-1974) - węgierski filozof nauki.
Na forum internetowym, gdzie dyskutowano w subtelnościach cohenowskiego forcingu pewien student (Cambridge Univ.) napisał: *„I think that the formality is crucial, but only after you have a basic intuitive idea of whats going on. We are humans not computers.* WITHOUT BASIC INTUITION THE FORMALITY WORTH NOTHING.*”*
A Beatelsi mówią o tym tak: *„Hey Jude, don't make it bad, take a sad song and make it better. Remember to let her under your skin, then you begin to make it better.”* .

[12] *„Konstruowalność w skończonej liczbie kroków”* nie jest pojęciem teoriomnogościowym (i dlatego definicja konstruktywna nie jest akceptowalna w matematyce teoriomnogosciowej). Można je zastąpić *„konstruowalnością w n krokach, gdzie n to dowolna liczba naturalna”* ale dopiero wtedy, gdy już zdefiniujemy teoriomnogościowo liczby naturalne... .

[13] *Nobody's perfect - nie jesteśmy doskonali* - to ostatnia kwestia filmu „Pół żartem, pół serio”.

[14] *recurrere (łac.) - przybiec z powrotem. Tworzymy nowe, odwołując się do tego, co stworzyliśmy wcześniej.*

wał nad liczbami naturalnymi. Tak też osiągnął drugi fenomenalny sukces - zaczął zapisywać to co mówi za pomocą *słów (nad ustalonym alfabetem)*[15].

Rekurencyjny opis konstrukcji słów jest prosty:

punktem wyjścia - *wielkością początkową* - jest jedno jedyne *słowo puste* - ε. *Konstruktorów* słów jest tyle, ile liter w alfabecie A: jeżeli $a \in A$ a „w” jest wcześniej utworzonym słowem, to napis „wa” też jest słowem.

Oznaczając przez A^* zbiór wszystkich słów utworzonych z liter alfabetu A zapiszemy to tak:

$$\frac{}{\varepsilon \in A^*} \qquad\qquad \frac{w \in A^*}{wa \in A^*}\ a \in A$$

> Jeżeli cokolwiek ma być uznane za fundament naszej cywilizacji, to musi to być zdolność człowieka do przekazywania i odbioru informacji kodowanych jako skończone ciągi sygnałów (znaków, liter).
>
> *„Bo przecież gdy się dobrze zastanowić, zdumienie człowieka ogarnia, dwadzieścia kilka liter, w innych alfabetach mniej czy więcej, (...) a cały świat, jaki był, jaki jest i jaki będzie”*[16].

Istotę konstrukcji rekurencyjnych opisuje taka niezbyt precyzyjna ale (mam nadzieję) zrozumiała quasidefinicja:

Struktura rekurencyjna to para (P, K) w której P to skończony zbiór wielkości początkowych a K - skończony zbiór konstruktorów.

Konstruktory są finitarne co oznacza, że każdy konstruktor $k \in K$ przyporządkowuje pewnym, wcześniej skonstruowanym, SKOŃCZONYM *ciągom obiektów $(Ob_1, \ldots, Ob_{n_k})$ o ustalonej długości nowy, jednoznacznie określony obiekt $k(Ob_1, \ldots, Ob_{n_k})$.*

$$\frac{}{Ob}\ Ob \in P \qquad\qquad \frac{Ob_1, \ldots, Ob_{n_k}}{k(Ob_1, \ldots, Ob_{n_k})}$$

Wymagamy, by konstruktory były rozstrzygalne: byśmy mogli - dla dowolnego konstruktora $k \in K$ i każdego ciągu obiektów $(Ob_1, \ldots, Ob_{n_k}, Ob)$ - rozstrzygać, czy $Ob = k(Ob_1, \ldots, Ob_{n_k})$.

> Podobnie jak wcześniejsze pojęcie „skończonej liczby kroków” tak i przywoływaną teraz zdolność do rozstrzygania czy $Ob = k(Ob_1, \ldots, Ob_{n_k})$ rozumiemy jako przyrodzoną i wzmacnianą przez edukację umiejętność oceny, czy dany obiekt jest tym, czego oczekujemy.[17]

Do kolekcji wyznaczonej przez taką strukturę włączamy każdy obiekt, który:

- jest wielkością początkową, lub

- można go utworzyć z wielkości początkowych w skończonej liczbie kroków, korzystając z konstruktorów ze zbioru K.

Tak tworzone kolekcje to *zbiory rekurencyjne.*

Choć ta definicja nie grzeszy precyzją, to jej sens jest widoczny: na pierwszym planie są narzędzia tworzenia[18]. Kolekcja kreowanych obiektów jest wtórna. Ta kolekcja jest POTENCJALNIE NIESKOŃCZONA ale w skończonym czasie zbudujemy tylko skończenie wiele jej elementów.

Stwierdzenie: *„obiekt należy do kolekcji wyznaczonej przez strukturę rekurencyjną”* jest WERYFIKOWALNE: głoszący taki sąd ma obowiązek przedstawić KONSTRUKCJĘ obiektu. Wymóg rozstrzygalności i finitarności konstruktorów sprawia, że każdy może sprawdzić poprawność tej konstrukcji[19].

---

[15] Jeśli wśród znaków alfabetu mamy znaki interpunkcyjne i spację, to dowolny tekst jest pojedynczym słowem. „Litera” wcale nie musi być pojedynczym znakiem graficznym. Może być ciągiem znaków (czyli słowem nad innym alfabetem). To rozpowszechniona praktyka, szczególnie w informatyce. Takie słowa-litery to *tokeny*.

[16] W. Myśliwski, *Ostatnie rozdanie*. Jeszcze jedno zdanie z tej książki: *„Drugi taki porządek to kolejno liczby: jeden, dwa, trzy, cztery i tak dalej. Zastanawiam się nawet, czy to nie jedyne porządki, którym można jeszcze zaufać.”*

[17] Na matematyczną definicję rozstrzygalności przyjdzie czas poźniej.

[18] Jak mawiał prezydent L. Wałęsa: *„Jeśli chcesz komuś pomóc, to daj mu wędkę, a nie rybę”...* .

[19] Reguły-„ułamki” opisujace konstruktory można odczytywać na dwa sposoby: „z dołu do góry” (*„backward”*) - obiekt w „mianowniku” jest konstruowalny O ILE konstruowalne są obiekty umieszczone w liczniku. „Z góry na dół” (*„forward”*) - „JEŻELI konstruowalne są obiekty zapisane w liczniku, TO obiekt umieszczony w „mianowniku” jest też konstruowalny”.

Relacja przynależności - „$\in$" - to pojęcie pierwotne teorii mnogości. Ale tej relacji nie towarzyszy żadna uniwersalna procedura weryfikacji stwierdzenia, że $A \in B$[20].
To jest fundamentalna różnica między „zbiorem" a „strukturą rekurencyjną" (i związanym z nią zbiorem rekurencyjnym) - różnica między matematyką teoriomnogościową a konstruktywną.

Struktura rekurencyjna Nat opisująca liczby naturalne jest najprostsza z możliwych: mamy tu pojedynczą wielkość początkową i jeden jedyny konstruktor.

Matematyka kocha byty czyste. Proste, ale posiadające wszystkie istotne cechy interesujących nas obiektów. To piękna zasada decydująca o estetycznych walorach królowej nauk[21]. Koncentrujemy uwagę na obiektach idealnych, pozbawionych zbędnych elementów, co ułatwia odkrycie istoty problemu.

Wiedza o liczbach naturalnych - arytmetyka - jest esencją wiedzy o strukturach rekurencyjnych. *„(Arithmetics is) the science that elaborates the abstract structures that all progressions have in common merely in virtue being progression"*[22].

Liczby całkowite i wymierne

Aby opisać rekurencyjnie liczby całkowite wystarczy potraktować liczby naturalne jako wielkości początkowe i „uruchomić" dwa nowe konstruktory:

$$\frac{n : \mathbf{N}}{n : \mathbf{Z}} \qquad \frac{n : \mathbf{N}}{-n : \mathbf{Z}} \ (n \neq 0)$$

Liczby wymierne to też można opisać rekurencyjnie - przedstawić jako „ułamki" skonstruowane z liczb całkowitych.

$$\frac{a : \mathbf{Z}}{a : \mathbf{Q}} \qquad \frac{a : \mathbf{Z}, \mathbf{b} : \mathbf{Z}}{a/b : \mathbf{Q}} \ (b \neq 0)$$

Zbyt proste by było matematyką?[23] Tak można sądzić widząc, co z tymi liczbami wyczynia teoria mnogości. Każdy student matematyki „wie" (bo musi), że liczby całkowite to elementy zbioru ilorazowego $(\mathbf{N} \times \mathbf{N})/\cong$ dla odpowiednio określonej równoważności $\cong$. Zatem każda pojedyncza liczba całkowita to ... zbiór nieskończony![24]. *„Who cares about?"* Równie niemiło wygląda teoriomnogościowa definicja zbioru liczb wymiernych - ponownie korzystamy z możliwości tworzenia zbiorów ilorazowych, tym razem rozpoczynając konstrukcję od zbioru liczb całkowitych. Pojedyncza liczba wymierna to też nieskończony zbiór... .

Ale mało kto się tym przyjmuje: te definicje to tylko opisy zbiorów liczbowych w języku teorii mnogości. Niezbędne, by włączyć je do matematyki której paradygmatem jest stwierdzenie, że *„obiekty matematyczne to zbiory"*.

Dodatek: Pouczająca historia powstania liczb całkowitych i wymiernych

„Liczby naturalne są dobrem powszechnym. Są wytworem cywilizacji stworzonym przez wszystkich dla wszystkich. Reszta jest dziełem... matematyków" (str.9).

[20]To jednak nie oznacza, że NIGDY nie potrafimy rozstrzygnąć, czy $A \in B$. Ale nie ZAWSZE: to nie jest „zasadą" w teorii mongości.

[21]Zwana czasem *„brzytwą Ockhama". Oczywiście nie królowa, tylko zasada. „Pluralis non est ponenda sine necessitate". „Bytów nie mnożyć, fikcji nie tworzyć, tłumaczyć rzeczy najprościej"*. Wilhelm Ockham to XIV-wieczny teolog angielski, franciszkanin. Wyrzucony z uniwersytetu oksfordzkiego udał się do Avinionu gdzie oskarżył papieża Jana XXII o ... herezję, co musiało skończyć się jego ekskomuniką.

[22]P. Benacerraf, *„What numbers could not be", Philosophy of Mathematics, 1983.*

[23]Jest tu drobna subtelność: tak konstruowane ułamki tylko reprezentują liczby wymierne: Musimy dodać, że ułamki a/b i a_1/b_1 reprezentują tę samą liczbę wymierną, gdy $a_1 b = ab_1$.

[24]$(m, n) \cong (m_1, n_1)$ gdy $m - n = m_1 - n_1$. Liczby całkowite to *klasy abstrakcji* tej relacji.

Specjalistyczny język matematyki nie powstał w rezultacie jednorazowego aktu twórczego. Jego powstanie i rozwój na przestrzeni wieków towarzyszy rozwojowi naszej cywilizacji.

„Na początku" liczby naturalne nie były samodzielnymi pojęciami: sens (znaczenie) miały stwierdzenia: „trzech ludzi", „trzy domy" ale nie miało go stwierdzenie „trzy". Użycie liczb w językach naturalnych jest (było) zazwyczaj „kontekstowe".

> Liczba funkcjonująca samodzielnie („bezkontekstowo"), to pojęcie zbyt abstrakcyjne dla naszych przodków. Akceptacja samodzielnego bytu liczb naturalnych to ten moment, w którym zaczął wyodrębniać się z języka naturalnego język matematyki (algebry).

Tezę, że tak właśnie narodził sie język matematyki (algebry) wspiera to, że, dodatnie liczby wymierne - „ułamki" - pojawiły się w matematyce europejskiej wcześniej niż zero i liczby całkowite. W antycznej Grecji te liczby służyły do opisu proporcji mierzalnych wielkości[25]. Ale „proporcja" była wówczas rozumiana jako relacja wyłącznie między „homogenicznymi" wielkościami. I tak np. można było mówić o proporcjach między długościami odcinków.To „naturalne" rozumienie proporcji. Ale Grecy nie znali, nie zdefiniowali pojęcia *prędkości średniej* jako stosunku (proporcji) długości drogi do czasu podróży, bo „długość" i „czas" to nie są wielkości homogeniczne.

Ujemne liczby całkowite pojawiły się dużo później: *„liczb ujemnych użył Chuquet w XV wieku (...) nazywając je „liczbami absurdalnymi" (...). Większość europejskich matematyków odrzucała koncepcję liczb ujemnych aż do XVII wieku". (wikipedia)*[26]
Określenie „liczby absurdalne" dowodzi, że rozszerzanie pojęcia liczby napotykało na spory opór. Pewnie dlatego, że jest to dzieło matematyków,którzy zauważyli, że dedawanie liczb naturalnych ma pewną „wadę": równanie $n + x = m$ nie ma rozwiązania w arytmetyce liczb naturalnych gdy $m < n$. Dlatego co poniektórzy z nich sugerowali rozszerzenie zakresu pojęcia „liczby" tak, by w tej nowej strukturze liczbowej równanie $a+x = b$ miało rozwiązanie bez względu na to, jak wybierzemy liczby a i b.

Taką strukturą jest zbiór liczb całkowitych wraz ze znanym nam ze szkoły dodawaniem. Jest to też najmniejsze możliwe rozszerzenie zbioru liczb naturalnych, które posiada wskazaną własność.

Liczby całkowite umiemy też mnożyć. Ale to działanie pozbawione jest jakiegokolwiek intuicyjnego wsparcia: niby dlaczego $(-1)(-1) = 1$? Nie można tu odwołać się do szkolnej definicji - *„mnożenie przez n to n-krotne dodawanie"* - bo „(-2)-krotne" dodawanie nie ma sensu.
Trzeba użyć innej argumentacji, bardziej matematycznej. Otóż mnożenie i dodawanie liczb naturalnych wiąże równość $n(m + k) = nm + nk$ spełniona dla dowolnej trójki takich liczb. Skoro struktura liczb naturalnych ma być wiernie odwzorowana w większej strukturze liczb całkowitych, to ta równość powinna nadal obowiązywać i być prawdziwa dla każdej trójki liczb całkowitych. Dlatego iloczyn $(-1) \cdot (-1)$ MUSI być równy 1 ... *„The Indian mathematician Brahmagupta (597-667) appears to be the first to articulate the result that the product of two negative numbers is a positive number"*.. Akceptacja tych „nowinek" wykraczających daleko poza intuicjer związane z arytmetyką liczb naturalnych nie była łatwa. I zapewne dlatego takdługo liczby całkowite czekały na pełne prawa obywatelskie.

Podobnie można opisać kolejne rozszerzenie - strukturę liczb wymiernych: to najoszczędniejsze rozszerzenie struktury liczb całkowitych gwarantujące istnienie rozwiązań wszelkich równań postaci $ax + b = c$, gdzie $a \neq 0$ [27].

---

[24] Lepiej mówić „było", gdyż współczesne języki naturalne przyswoiły i uznały za własne wiele pojęć matematycznych.

[25] Współczesna wikipedia mówi tak: *Proporcja – równość dwóch stosunków postaci a/b = c/d.(...) Stosunek – ilorazowe odniesienie jednej wartości do drugiej, które ma na celu wskazanie tożsamości lub względnej różnicy rozmiarów dwóch wielkości. Zapisywany jest w postaci ułamka*

[26] Ani antyczni Grecy , ani Rzymianie nie znali ani zera i liczb ujemnych. Ale nie przeszkodziło to im w konstrukcji wspaniałych budowli, akweduktów czynnych do dzisiaj czy opanowaniu tajników morskiej nawigacji... . Być może, gdyby umieli odejmować, stworzyliby więcej.

[27] Sztuczna inteligencja informuje: *Girolamo Cardano wprowadził pojęcie ułamków ujemnych w swojej pracy "Artis Magnae, sive de Regulis Algebraicis Liber Unus" (Wielka Sztuka, czyli zasady algebry, księga pierwsza) opublikowanej w 1545 roku. W tej pracy Cardano przedstawił zasady dla dodawania, odejmowania i mnożenia ułamków*

> Niech to nie umknie naszej uwadze: dodawanie i mnożenie liczb naturalnych jednoznaczie analogiczne działania na liczbach całkowitych i wymiernych. Można powiedzieć, że te nowe działania nie zostały zdefinowane „na nowo”, ale są tylko rezultatem dostosowania działań na liczbach naturalnych do nowych, większych zbiorów liczbowych

A co z liczbami rzeczywistymi? Powiedzmy krótko: to nie jest zbiór rekurencyjny. To jest miejsce, w którym (prawie) ostatecznie rozchodzą się drogi matematycznych konstruktywistów i platoników. Opowiemy o tym w rozdziale *„Przestrzeń matematyczna”*.

ujemnych, stosując różne reguły dla przypadków dodawania i odejmowania ułamka ujemnego od ułamka dodatniego oraz odejmowania ułamka dodatniego od ułamka ujemnego. Wprowadzenie ułamków ujemnych było ważnym krokiem w rozwoju matematyki i umożliwiało rozwiązanie wielu problemów i równań.

Liczby - słowa - numerały

Elementy dowolnego zbioru rekurencyjnego można *efektywnie ponumerować*. To proste: najpierw numerujemy wielkości początkowe (których jest skończenie wiele) potem numerujemy te, które są konstruowane po jednokrotnym użyciu jednego z konstruktorów. Następnie numerujemy wielkości skonstruowane „w dwóch krokach". I tak dalej[28].

> Słowa można ponumerować. A liczby naturalne to słowa - $0, succ(0), succ(succ(0)), \ldots$.
>
> Co jest wcześniejsze, ważniejsze: słowo czy liczba? To kiepskie pytanie. To są dwie wyróżnione, pierwotne struktury rekurencyjne. Pojęcia komplementarne, wzajemnie się dopełniające, a nie konkurencyjne[29].

Reprezentacja liczb naturalnych za pomocą napisów postaci $0, succ(0)$, $succ(succ(0))\ldots$ nie jest zbyt wygodna. Dlatego w praktyce korzystamy z *systemów numerałów*.

Jest wiele takich systemów. Nasz przodek chcąc zapisać liczbę „siedem" rył na ścianie jaskini siedem kresek - reprezentował liczby jako słowa nad jednoelementowym alfabetem. Dziś świat posługuje się *systemem dziesiętnym* - reprezentacją liczb naturalnych za pomocą słów-numerałów nad alfabetem $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$[30]. A symbolem ery komputerów stał się *zapis binarny*. Zapisy liczb w systemie dziesiętnym (dwójkowym, rzymskim) to *synonimy* podstawowych nazw. 3 jest synonimem napisu $succ(succ(succ(0)))$. Synonimy nie są potrzebne matematykom. Taka reprezentacja staje się istotna, gdy interesują nas „praktyczne aspekty wykorzystania liczb naturalnych" czyli, mówiąc po ludzku, rachunki. Nasz przodek chcąc obliczyć iloczyn „sto jeden razy sto dwa" musiał sto i dwa razy wyryć sto jeden kresek - zajęcie na cały sezon łowiecki. A korzystając np. z systemu dziesiętnego i prostych *algorytmów* dodawania i mnożenia, które otrzymaliśmy w pakiecie z tym systemem, średnio rozgarnięty uczeń gimnazjum rozwiąże to zadanie w minutę[31].

Dodatek: struktury rekurencyjne w teorii mnogości

Teoria mnogości miała być w zamierzeniu podstawą wszelkich działań matematycznych. Jak radzi sobie ze strukturami rekurencyjnymi? Całkiem nieźle. Teoriomnogościowe twierdzenie, które ujmuje istotę tej metody konstruowania zbiorów to *twierdzenie Tarskiego o punkcie stałym*.

Aksjomatyka teorii mnogości postuluje istnienie - dla dowolnego zbioru A - *zbioru potęgowego* 2^A , którego elementami są wszelkie podzbiory zbioru A:

$$B \in 2^A \qquad wtw \qquad B \subseteq A$$

Operator działający na podzbiorach A - czyli funkcja $F\colon 2^A \to 2^A$ - jest *monotoniczny*, jeżeli dla dowolnych podzbiorów $B, C \subseteq A$, $F(B) \subseteq F(C)$ jeśli tylko $B \subseteq C$. Jest *finitarny*, gdy:

$$F(B) = \bigcup \{F(B_f)\colon B_f - \textit{skończony podzbiór } B\}$$

dla dowolnego podzbioru B[32].

Twierdzenie o punkcie stałym mówi, że:*„każdy monotoniczny i finitarny operator $F\colon 2^A \to 2^A$ ma (najmniejszy) punkt stały - istnieje zbiór $Fix(F) \subset A$ taki, że $F(Fix(F)) = Fix(F)$. Co więcej:*

$$Fix(F) = \bigcup_{n\in N} F^n(\emptyset) = \emptyset \cup F(\emptyset) \cup F^2(\emptyset) \cup \cdots \cup F^n(\emptyset) \cup \cdots$$

Taki monotoniczny i finitarny operator można związać z każdą strukturą rekurencyjną (P, K). Ten operator - oznaczmy go przez PK - działa tak:

$$PK(B) = P \cup \{k(b_1,\ldots,b_n)\colon b_1,\ldots,b_n \in B, k \in K\}.$$

[28] Znaczenie terminu *„efektywna numeracja"* wyjaśnimy w przyszłości. Teraz niech nam wystarczy nasza intuicja.

[29] Możliwość zamiana słowa (tekstu) w liczbę odgrywa fundamentalną rolę w kryptografii. Np. podstawą niezawodności systemu kodowania RSA jest to, że rozkład liczby naturalnej na czynniki pierwsze jest problemem algorytmicznym o dużej złożoności.

[30] Ten system, importowany z Indii za pośrednictwem Arabów wyparł produkt europejski - *system rzymski*.

[31] Gimnazja to szkoły istniejące w słusznie minionym okresie... Aby docenić zalety systemu dziesiętnego proszę spróbować opracować algorytmy realizujące dodawanie i mnożenie w systemie rzymskim.

[32] Operator finitarny jest jednoznacznie wyznaczony przez swoje działanie na zbiorach skończonych.

Początek konstrukcji zbioru rekurencyjnego to zbiór wielkości początkowych: $PK(\emptyset) = P$. W zbiorze $PK(\emptyset) \cup \cdots \cup PK^n(\emptyset)$ są obiekty skonstruowane „z niczego (ze zbioru pustego) w pierwszych n krokach. Zbiór $Fix(PK)$ składa się z obiektów konstruowalnych w skończonej liczbie kroków. To, że jest to punkt stały operatora PK oznacza, że dalsze próby konstrukcji nowych elementów są bezowocne - aplikując FINITARNE konstruktory do elementów zbioru $Fix(PK)$ nie dostaniemy nic nowego.

$Fix(PK)$ to zbiór rekurencyjny wyznaczony przez strukturę (P, K). Równanie $Fix(PK) = PK(Fix(PK))$ to *równanie rekurencyjne* zbioru wyznaczonego przez parę (P, K). To powszechnie przyjęty sposób opisu zbiorów rekurencyjnych - można w nim odnaleźć wszystkie składowe struktury odpowiedzialnej za jego konstrukcję. Na przykład równanie rekurencyjne opisujące liczby naturalne wygląda tak:

$$\mathbf{N} = \{0\} \cup \{succ(n) \colon\ n \in \mathbf{N}\}$$

> Tak oto POTENCJALNIE nieskończone zbiory rekurencyjne stały się zbiorami AKTUALNIE nieskończonymi - istniejącymi tylko wewnątrz teorii mnogości[33].

Ważne pytanie. I ważna odpowiedź

Zbiór $Fix(PK)$ jest *domknięty* w tym sensie, że zastosowanie dostępnych konstruktorów do elementów tego zbioru nie da nic nowego. Tak jest, bo założyliśmy, że konstruktory są finitarne.
Co się stanie, gdy zrezygnujemy z tego założenia, gdy choćby jeden z konstruktorów potrzebuje przeliczalnej ilości argumentów? Intuicja podpowiada, że ów punkt stały można konstruować podobnie, tylko nie można poprzestać na sumie $\bigcup_{n \in N} PK^n(\emptyset)$. Trzeba iść „dalej”. Ale jak numerować kolejne kroki konstrukcji, skoro już wyczerpaliśmy wszystkie liczby naturalne?

Na podobny problem natknął się kiedyś Cantor. I znalazł rozwiązanie, które stało się (pra)początkiem matematyki jaką dziś znamy. Matematyki, która nie boi się nieskończoności[34].

2.3 Struktury rekurencyjne w metamatematyce

Rezygnacja z wymogu konstruowalności obiektów w matematyce teoriomnogościowej może sugerować, że struktury rekurencyjne pełnią w niej marginalną rolę. Jest odwrotnie: struktury rekurencyjne są ważnym narzędziem sprawowania kontroli nad matematyką.

2.3.1 Gramatyki i języki

Matematyka i logika potrzebują *języków formalnych* o czytelnej i jednoznacznej strukturze. Jesteśmy twórcami tych języków, więc możemy ich strukturę planować tak, by zapewnić sobie pełną nad nimi kontrolę. Do opisu języków formalnych wykorzystuje się *gramatyki* - struktury, które są pewną modyfikacją struktur rekurencyjnych.
Gramatyki to zbiory reguł wyprowadzania słów[35]. Wykorzystujemy te reguły nieco inaczej niż w strukturach rekurencyjnych:

jeśli $v \to w$ jest regułą rozważanej gramatyki, to słowo postaci $\alpha v \beta$ (gdzie α, β to dowolne słowa) można przekształcić w słowo $\alpha w \beta$: reguły gramatyki można stosować „w dowolnym kontekście”.

Np. język wyrażeń arytmetycznych zbudowanych ze zmiennych x, y, z i liczby 0 za pomocą operacji dodawania - „+”, mnożenia - „·”, i następnika - „succ” opiszemy precyzyjnie za pomocą gramatyki złożonej z następujących reguł:

[33] Nie dajmy się zwieść: nie można twierdzić, że wewnątrz teorii mnogości można „utworzyć” w opisany sposób zbiór liczb naturalnych. A to dlatego, że opisując zbiór **N** korzystamy z twierdzenia Tarskiego, które niesposób sformułować i dowieść bez założenia, że ... mamy do dyspozycji zbiór liczb naturalnych **N**. Alfred Tarski (1901-1983) polski matematyk logik i filozof pochodzenia żydowskiego, od 1939 roku w USA.

[34] Opowiemy o tym gdy będziemy do tego lepiej przygotowani (str. **??**).

[35] Zgodnie z konwencja przyjętą w lingwistyce matematycznej, reguły zapisujemy nie, jak dotąd, jako ułamki” $\frac{v}{w}$ ale jako „strzałki: „$v \to w$” (gdzie v i w to słowa).

$\mathtt{W} \to \mathtt{Liczba}$, $\mathtt{W} \to \mathtt{Zmienna}$,
$\mathtt{W} \to (\mathtt{W} + \mathtt{W})$, $\mathtt{W} \to (\mathtt{W} \cdot \mathtt{W})$, $\mathtt{W} \to succ(\mathtt{W})$,
$\mathtt{Zmienna} \to x$, $\mathtt{Zmienna} \to y$, $\mathtt{Zmienna} \to z$,
$\mathtt{Liczba} \to 0$.

Proces wyprowadzenia (generowania) słowa - wyrażenia arytmetycznego $(succ(0)+x)$ - opisuje taka sekwencja:

$\mathtt{W} \rightsquigarrow (\mathtt{W}\ + \mathtt{W}) \rightsquigarrow (succ(\mathtt{W}) + \mathtt{W}) \rightsquigarrow (succ(\mathtt{Liczba}) + \mathtt{W}) \rightsquigarrow (succ(0) + \mathtt{Zmienna}) \rightsquigarrow (succ)(0) + x)$

Charakterystyczną cechą gramatyk jest to, że operują one słowami zbudowanymi z liter dwóch, wyraźnie rozróżnianych alfabetów: *właściwego i pomocniczego.* W naszym przykładzie litery alfabetu pomocniczego to trzy tokeny - `Liczba, Zmienna, W` - a alfabet właściwy to zbiór $\{0, succ, +, \cdot,), (, x, y, z\}$. W opisie wyprowadzeń używamy słów budowanych z liter obu alfabetów. Ale język, który opisuje gramatyka, to wyłącznie wyprowadzalne słowa złożone z liter alfabetu właściwego.

To wystarczy, by zrozumieć formalne definicje:

Gramatyka to układ trzech skończonych zbiorów: $G = (NT, T, P)$ nazywanych odpowiednio: alfabetem pomocniczym (NT), alfabetem właściwym (T) i zbiorem reguł wyprowadzania (P). W zbiorze NT wyróżniamy symbol początkowy - $S \in NT$.

Reguła wyprowadzania (produkcja) to para słów nad alfabetem $NT \cup T$ zapisywana w postaci „$v \to w$”. Poprzednik reguły - słowo v - musi zawierać choćby jedną literę pomocniczą.

Wyprowadzenie słowa w to sekwencja słów rozpoczynająca się od słowa-symbolu początkowego S i kończącego się słowem w i taka, że każde ze słów tej sekwencji budujemy ze słowa poprzedzającego wykorzystując jedną z reguł wyprowadzania (użytą w odpowiednim kontekście).

Język generowany przez gramatykę to te wyprowadzalne słowa, które są złożone wyłącznie z liter alfabetu terminalnego. Języki generowane przez gramatyki to *języki kombinatoryczne.*

> Gramatyka to struktura rekurencyjna z jedną wielkością początkową S i (potencjalnie) nieskończonym zbiorem konstruktorów, który jest opisany w skończony sposób: każda reguła wyprowadzenia $v \to w$ reprezentuje nieskończony zbiór konstruktorów $\{\alpha v\beta \to \alpha w\beta \colon \alpha, \beta \in (NT \cup T)^*\}$.
> Zamiana skończonego zbioru konstruktorów przez zbiór nieskończony jest „nieistotna”: istotne jest to, że zbiór konstruktorów w gramatyce jest nadal rozstrzygalny[36].
>
> Gramatyka - twór skończony, zapewnia kontrolę nad (potencjalnie) nieskończonym językiem.

Reguły wyprowadzeń klasyfikujemy ze względu na ich kształt. Reguła jest:

- *kontekstowa, gdy jest postaci* $\alpha A\beta \to \alpha\gamma\beta$ *, gdzie* $A \in NT$ *a* $\alpha, \beta, \gamma \in (NT \cup T)^*$,

- *bezkontekstowa, gdy jest postaci* $A \to w$ *, gdzie* A *to symbol nieterminalny,* $w \in (NT \cup T)^*$.

- *prosta, gdy jest postaci* $A \to Ba$, $A \to B$, $A \to a$, $A \to \epsilon$ *(*$A, B \in NT$, $a \in T$ *a „*ϵ*” to słowo puste).*

To jest podstawa klasyfikacji gramatyk i języków Noama Chomsky'ego[37]. Język kombinatoryczny jest *kontekstowy (bezkontekstowy, regularny)*, gdy produkcje gramatyki która go generuje są kontekstowe (bezkontekstowe, proste).
Po co nam te techniczne zawiłości? Cierpliwości - do tej klasyfikacji powrócimy w przyszłości.

2.3.2 Dowodzenie

Cel dowodzenia to bezsporne wykazanie związku przyczynowo-skutkowego między stwierdzeniami-*założeniami* i stwierdzeniem - *tezą*. *Formalny system dowodzenia* to struktura rekurencyjna, w której wielkościami początkowymi są *aksjomaty* stwierdzenia, które bezwarunkowo akceptujemy - a konstruktorami - *reguły dowodzenia.*

---

[36] Po raz kolejny słowo „rozstrzygalność” używam w znaczeniu jakie przypisujemy mu w języku naturalnym. W tym przypadku oznacza to zdolność do kontroli poprawności wyprowadzenia słowa, do wskazania reguł użytych do budowy kolejnych słów tworzących sekwencję-wyprowadzenie.

[37] N. Chomsky, (1928 -) twórca podstaw współczesnej lingwistyki matematycznej. Korzystając z okazji zacytujmy wypowiedź Chomsky'ego wpisującą się w dyskusję o nieskończoności kontrolowanej: *„znajomość języka zakłada* NIEJAWNĄ ZNAJOMOŚĆ *nieskończenie wielu zdań.”[9]*

Reguły dowodzenia to opisy warunków, jaki ma spełniać skończony zbiór stwierdzeń $P_1, \ldots, P_n$ i pojedyncze stwierdzenie K, by móc uznać, że między *przesłankami* $P_1, \ldots, P_n$ a *konkluzją* K istnieje związek przyczynowo-skutkowy: *„uznając przesłanki reguły, mamy prawo uznać jej konkluzję"*.

$$\frac{P_1, \ldots, P_n}{K}$$

Np. fundamentalna dla klasycznej logiki *reguła odrywania* (*„modus ponens"*) stanowi, że *„uznając stwierdzenie A i implikację $A \to B$ mamy prawo uznać stwierdzenie B"*[38]:

$$\frac{A, A \to B}{B}$$

.

Dowód związku przyczynowo-skutkowego: *„stwierdzenie-teza ST jest konsekwencją zbioru stwierdzeń - aksjomatów $\mathcal{A}$ "* - to skończony ciąg stwierdzeń:

$$ST_0 \rightsquigarrow ST_1 \rightsquigarrow \cdots ST_i \rightsquigarrow ST_{i+1} \rightsquigarrow \cdots ST_n = ST$$

taki, że każde stwierdzenie ST_i jest jednym z aksjomatów, lub konkluzją pewnej reguły, której przesłanki można odnaleźć w podciągu poprzedzającym ST_i[39].

Mówimy wtedy, że stwierdzenie ST jest *wywodliwe, ma dowód.*

> Obiekty konstruowane w tej strukturze to *stwierdzenia dowodliwe* - konsekwencje aksjomatów rozważanego systemu dowodzenia. Dowody to konstrukcje stwierdzeń.
> Wiedza o konsekwencjach zbioru aksjomatów ma cechy zbioru potencjalnie nieskończonego: do dziś zbudowaliśmy jego skończony fragment złożony z udowodnionych twierdzeń. Jutro ten zbiór rozszerzymy.

Przykład „z życia wzięty": uznajmy za aksjomaty informacje: *„istnieje bezpośrednie połączenie lotnicze z miasta A do B"* a za regułę stwierdzenie: *„jeśli istnieją połączenia lotnicze z A do B i z B do C, to istnieje połączenie między miastami A i C"*.

$$\frac{}{\textit{Warszawa} \rightsquigarrow \textit{Paryż}} \qquad \frac{A \rightsquigarrow B, B \rightsquigarrow C}{A \rightsquigarrow C}$$

(to tylko przykładowy „aksjomat". Ich pełny zbiór to „Światowy Rozkład Lotów"). Możemy teraz próbować dowieść istnienia połączenia lotniczego (z przesiadkami) np. z Warszawy do Sydney. Gdy marzymy o komfortowych podróżach, to wystarczy zmienić regułę na bardziej restrykcyjną: *„jeżeli istnieją wygodne połączenia z A do B i z B do C, a czas oczekiwania w B nie przekracza 3 godzin, to uznajemy, że istnieje wygodne połączenie z A i C"*.[40]

Zakładamy, że zarówno zbiór aksjomatów jak i zbiór reguła są rozstrzygalne.

> Wymóg rozstrzygalności zbioru aksjomatów i reguł sprawia, że potrafimy rozstrzygać o poprawności dowodu - *„we recognise a proof when we see one"*[41]. To zapewnia społeczną kontrolę nad matematyką: mówisz, że twoje twierdzenie jest prawdziwe - pokaż jego dowód. A my zweryfikujemy jego poprawność. Liczba kontrolujących poprawność głoszonych „prawd matematycznych" - dowiedzionych twierdzeń - jest nieograniczona (potencjalnie nieskończona).

Jest wiele systemów dowodzenia. Praktycznie każda dziedzina współczesnej matematyki ma swe aksjomatyczne przedstawienie, własny system dowodzenia. Systemy dowodzenia pojawiają się też w matematyce stosowanej. Stworzono nawet specjalny język programowania *Prolog*, w którym

---

[38]Reguła modus ponens pojawiła się w filozofii już w starożytności, za sprawą stoików.

[39]Możliwość „dopisania" do dowodu dowolnego aksjomatu w dowolnym momencie oznacza, że traktujemy je jako reguły bezprzesłankowe.

[40]Moi rówieśnicy pamiętają dworcowe „okienko informacji PKP" gdzie pani zapytana o połączenie Gdynia - Ustrzyki Górne z zadziwiającą biegłością, korzystając z aksjomatów (rozkładu jazdy), swojej wiedzy i doświadczenia, wskazywała stosowne połączenia. Dziś tę rolę pełnią programy komputerowe...

[41]*G. Suldholm, „Vestiges of realism"* - artykuł w książce The Philosophy of Michael Dummett.

możemy zbudować swój własny system - taki jak np. „światowy system połączeń lotniczych" - i wykorzystać *Prolog* do automatycznego dowodzenia twierdzeń w tym systemie[42].

> Niech nam jednak nie przyjdzie do głowy utożsamiać hilbertowski ZAPIS dowodu z rzeczywistym PROCESEM dowodzenia! Więcej o tym w rozdziale poświęconym językowi matematyki i logice języka.

Więcej niż przykład: równoważność kontrolowana

> Krótko(!) po wynalezieniu liczb naturalnych ludzie zaczęli ich używać nie tylko do prostego zliczania i kolejkowania, ale w sposób bardziej zaawansowany - do usprawniających te czynności *obliczeń*[43]. Język arytmetyki został rozszerzony. Zaczęto mówić o sumie i iloczynie liczb. Pojawiły się napisy, które dziś nazywamy *wyrażeniami (termami) arytmetycznymi*, a wraz z nimi konieczność oceny, czy takie napisy „znaczą to samo", są *równoważne*. Czy $3 \cdot (2 + 11)$ znaczy to samo, co $5 \cdot 3 + 2 \cdot 7$?

Czy umiemy kontrolować równoważność wyrażeń?

Matematyk to pytanie sformułuje tak: czy potrafimy wskazać system formalny - zbiór aksjomatów i reguł - pozwalający dowodzić równoważności wyrażeń w językach rekurencyjnych?
To możliwe. Nie zawsze, ale w większości „interesujących" przypadków. Pokażemy, jak to zrobić.

Chcąc zachować sens stwierdzenia *„wyrażenia znaczą to samo"* musimy się zgodzić, że równoważność wyrażeń ma trzy podstawowe cechy: *dla dowolnych wyrażeń t, r, s :*
- *„t znaczy to samo co t"*,
- *„jeśli t znaczy to samo co p, to p znaczy to samo co t"*,
- *„jeśli t znaczy to samo co p, a p to samo co r, to p znaczy to samo co r"*,

Te cechy - nazywane przez matematyków *zwrotnością, symetrycznościa i przechodniością* - posłużą do sformułowania reguł poszukiwanego systemu dowodzenia. Gdy użyjemy napisu $t \equiv p$ dla oznaczenia stwierdzenia *„t jest równoważne p"* to zapiszemy je tak:

$$\frac{}{t \equiv t} \quad , \quad \frac{t \equiv p}{p \equiv t} \quad , \quad \frac{t \equiv p,\ p \equiv r}{t \equiv r}$$

Czwarta reguła odnosi się do rekurencyjnego charakteru języka wyrażeń i mówi tyle: *„jeśli pewne wyrażenia są parami równoważne, to i wyrażenia utworzone z nich za pomocą tego samego konstruktora są równoważne":*

$$\frac{t_1 \equiv p_1, \dots t_k \equiv p_k}{k(t_1, \dots, t_k) \equiv k(p_1, \dots, p_k)} \qquad \text{dla dowolnego konstruktora } k$$

To wszystko. Opis pojedynczej równoważności sprowadza się teraz do wskazania rozstrzygalnego zbioru *równoważności bazowych* $\{t_i \equiv p_i : i \in I\}$ - aksjomatów budowanego systemu.

„Wiedzieć" że wyrażenia t i p są równoważne oznacza teraz, że potrafimy zbudować dowód stwierdzenia $t \equiv p$ w tak skonstruowanym systemie. Można kontrolować równoważność kontrolując poprawność dowodu. Jest tak, jak chciał Martin-Löf.

> Z równoważnością jest trochę tak jak z nieskończonością. Można przyjąć, że równoważność musi być pod kontrolą, musi mieć rozstrzygalny zbiór bazowych równoważności. Tak chcą konstruktywiści.
> Gdy przyjmiemy teoriomnogościowy punkt wiedzenia i uznamy, że równoważność to każda relacja zwrotna, symetryczna i przechodnia to - na własne życzenie! - mamy problem: takich równoważności nie potrafimy kontrolować bo nie każda tak rozumiana równoważność ma ROZSTRZYGALNY podzbiór równoważności bazowych.

---

[42]W *Prologu* można implementować tylko systemy dowodzenia należące do pewnej, ścisle określonej klasy. Jest jednak ona na tyle duża, że programy logiczne - implementacje systemów dowodzenia - znajdują liczne zastosowania. Dodajmy dla porządku: hilbertowska koncepcja dowodu nie jest niekwestionowanym paradygmatem matematycznym. Akceptacja nieskończoności aktualnej zachęciła niektórych do rozważania *logik infinitarnych* w których odchodzi się od finitarnego charakteru procesu dowodzenia. Ale to nie jest temat, którym będziemy się tu zajmować.

[43]Słowo „arytmetyka" można wywieść od greckiego *arithmein* – liczyć. Liczyć to nie to samo co zliczać.

> Która definicja równoważności jest właściwa? A która matematyka jest właściwa - konstruktywna czy ta, którą zadeklerowali Cantor i Hilbert?

Na koniec wróćmy do początku, czyli do równoważności *wyrażeń arytmetycznych*. Ta równoważność jest, na szczęście, „konstruktywna”[44]. Równoważności bazowe - aksjomaty systemu dowodzenia równoważności wyrażeń arytmetycznych - opisujemy sprytnie tak:

$$\begin{array}{ll} x + 0 \equiv x & x \cdot 0 \equiv 0 \\ x + succ(y) \equiv succ(x + y) & x \cdot succ(y) \equiv (x \cdot y) + x \end{array}$$

Dlaczego sprytnie? Te cztery zapisy to „schematy”. Każdy taki schemat opisuje nieskończony zbiór bazowych równoważności, które otrzymamy zastępując *zmienne* w nich występujące - litery x i y - wyrażeniami arytmetycznymi. Np. do zbioru opisanego przez schemat $x + 0 \equiv x$ należy równoważność $succ(succ(0) + succ(0)) + 0 \equiv succ(succ(0) + succ(0))$ otrzymana przez podstawienie $[x := succ(succ(0) + succ(0))]$.

> Użycie schematów umożliwia skończony opis NIESKOŃCZONEGO ALE ROZSTRZYGALNEGO zbioru bazowych równoważności.

Twierdzisz, że $2 + 2 \equiv 4$? No to przedstaw dowód[45].

Czy takie rozwiązanie problemu równoważności wyrażeń jest satysfakcjonujące? Nie dla wszystkich. A dlaczego, powiemy gdy będziemy wiedzieć więcej - w rozdziale *„Obliczalność”*.

Dodatek: jaką nieskończoność tolerują komputery?

Nie pytaj o znaczenie. Pytaj o użycie.
L. Wittgenstein[46]

Komputery liczą. W licznych językach programowania mamy do dyspozycji tzw. *typ całkowity* (w C, C++ - „`int`”, w Pascalu - „`integer`”) – który jest zbiorem liczb całkowitych, ale tylko Z PEWNEGO ZAKRESU. Ten zakres choć nawet duży, jest zawsze jest skończony. Te typy tylko udają nieskończoność aktualną.

Ale są języki, które swobodnie posługują się nieskończonością POTENCJALNĄ. To możliwe, bo potrafimy zmusić komputery do odczytywania równań rekurencyjnych[47]. Np. w języku programowania funkcyjnego *Haskell* możemy jako *deklaracji typu* użyć takiego zapisu:

data `Nat = Zero | Succ Nat`

(skojarzenie z równaniem rekurencyjnym opisującym liczby naturalne - $\mathbf{N} = \{0\} \cup \{succ(n) \colon n \in \mathbf{N}\}$ *- narzuca się samo).* Oczywiście po wczytaniu takiej specyfikacji komputer nie wygeneruje w swej pamięci aktualnie nieskończonego zbioru liczb naturalnych. Kompilator *Haskella* ODCZYTA to równanie jako opis rekurencyjnej procedury pozwalającej rozstrzygać, czy dany napis jest numerałem - wyrażeniem typu `Nat`.

> Komputery nie rozumieją, czym jest liczba naturalna. One tylko potrafią je rozpoznawać - rozstrzygać, czy dany napis reprezentuje taką liczbę.

Przykładem wykorzystania możliwości operowania nieskończonością potencjalną jest implementacja *sita Eratostenesa* - procedury budowy listy liczb pierwszych. Przypomnijmy tę procedurę.

DANE POCZĄTKOWE *to nieskończona lista liczb naturalnych uporządkowana rosnąco, bez* 0 *i* 1,

[44] „Na szczęście” bo w przeciwnym razie najprawdopodobniej mieszkalibyśmy wciąż w jaskiniach... .

[45] Pzypomnijmy, że „2” to $succ(succ(0))$ a „4” to $succ(succ(succ(succ(0))))$.

[46] Ludwig Wittgenstein (1889 - 1951) – filozof, autor *„Traktatu logiczno-filozoficznego”*, który - jak pisze wikipedia - *„jest ambitnym projektem ostatecznego ustalenia niepodważalnych relacji między językiem i rzeczywistością (...) a także ustaleniem granic możliwości poznawczych filozofii wyrażanej w perfekcyjnie logicznym języku”*. „Traktat” ukazał się w 1921 roku. To jedyne dzieło Wittgensteina opublikowane za jego życia. Jego treść to zaledwie siedem lapidarnie sformułowanych tez, wspomaganych przez kilkanaście tez dopełniających. Gdyby mierzyć znaczenie dzieła proporcją między głębokością myśli a zwięzłością sformułowań, to, jak sądzę, nie ma ono sobie równych.

[47] Komputery „rozumieją” równania rekurencyjne. Studenci jakby rzadziej ... .

KROK PIERWSZY: *z listy początkowej wyrzuć wszystkie wielokrotności* 2 *z wyjątkiem pierwszego elementu listy,*
KROK REKURENCYJNY: *z listy utworzonej w* k*-tym kroku, usuń wszystkie wielokrotności liczby stojącej na* $k + 1$ *miejscu (z wyjątkiem tej liczby).*

W tym opisie swobodnie korzystamy z aktualnej nieskończoności liczb naturalnych. Budując implemantację tej procedury trzeba zastąpić nieskończoność aktualną przez potencjalną: musimy opisać strukturę rekurencyjną generującą taką potencjalnie nieskończoną listę.
W *Haskellu* wygląda to tak:

```
sieve (p : xs) = p : sieve [x | x <- xs, x `mod` p > 0]
primes = sieve [2..]
```

(*Napis* `[2.. ]` *to haskellowa deklaracja procedury generującej listę liczb naturalnych bez zera i jedynki*[48]*. A deklarację „*`sieve [x | x <- xs, x `mod` p > 0]`*" czytamy tak: „z listy* xs *wybierz te liczby, które nie dzielą się przez* p*".*[49]*)*

Wywołanie procedury „`primes`" to inicjacja nieograniczonego w czasie PROCESU generowania potencjalnie nieskończonej listy liczb pierwszych. Jeśli tak, to sens uruchomienia tej procedury jest wątpliwy - komupter nigdy nie skończy pracy, nie wyprodukuje kompletnej listy liczb pierwszych.

To oczywiste. Ale możemy skorzystać z dostępnej w *Haskellu* procedury „`take` n", która zaaplikowana do listy zwraca jej pierwszych n elementów.
Program „`take` n `primes`" wygeneruje listę n najmniejszych liczb pierwszych!
Wyjaśnienie, w języku mainstreamowej matematyki, dlaczego tak to działa, jest nieco kłopotliwe. No bo tak: żeby wybrać n elementów listy `primes` muszę najpierw tę (aktualnie nieskończoną) listę umieścić w pamięci komputera i dopiero potem uruchomić procedurę `take` n. Niemożliwe...
A jednak. Wystarczy przyjąć, że `primes` to PROCES (generowania listy) a nie RZECZ (lista) a aplikacja procedury `take` n do `primes` to ingerencja w ten proces - przerywa go po wygenerowaniu początkowego fragmentu długości n. Proste?[50]

> Proste, bo zamiast o rzeczach, zaczęliśmy myśleć o procesach. Struktura rekurencyjna jest teraz interpretowana nie jako opis zbioru, ale procesu.
> Komputery nigdy nie zaakceptują nieskończoności aktualnej. Ale potrafią korzystać z nieskończoności potencjalnej (jeśli je tego nauczymy).

[48]Działa to podobnie jak wyżej opisana procedura produkująca dowolnie długą listę jedynek.
[49]Spróbuj się przekonać, że `sieve [2..]` to rzeczywiście (potencjalnie) nieskończona lista liczb pierwszych.
[50]Język *Haskell* został tak nazwany na cześć twórcy jego teoretycznych podstaw - Haskella Carry'ego.

Rozdział 3

Nieskończoność Cantora

Zobacz! Oto ludzie są niby w podziemnym pomieszczeniu na kształt jaskini. Do groty prowadzi wejście zwrócone ku światłu (...). W niej oni siedzą (...) przykute mają nogi i szyje tak, że trwają na miejscu i patrzą tylko przed siebie. (...) Z góry pada na nich światło ognia, który się pali za ich plecami (...) czy myślisz, że tacy ludzie mogli by z siebie samych i z siebie nawzajem widzieć coś innego oprócz cieni, które ogień rzuca na ścianę jaskini?

Platon, Państwo

Platon[1] stworzył system filozoficzny[2], oparty na założeniu, że prawdziwe byty to idee. Wiecznotrwałe i niezmienne. Rzeczywistość materialna jest tylko ich odbiciem. Nie odnajdziemy w niej idealnego kwadratu, więc $\sqrt{2}$ jest bytem idealnym, posiadającym niedoskonałe realne odbicia. Matematyka miała odnosić się do bytów idealnych wprost, pomijając rzeczywistość. Pojęcia geometrii euklidesowej - punkt, prosta - należą do tego idealnego świata. *„Poznanie geometryczne dotyczy tego, co istnieje wiecznie”*. Platon widział w matematyce sposób poznania świata idei niepoznawalnych inaczej niż za pomocą rozumu. Używając dzisiejszego języka powiemy: jeśli chcemy wyjść poza zmysłowe poznanie rzeczywistości, musimy stworzyć jej abstrakcyjny, „idealny” model.

> Uznanie transcedentnego istnienia świata idei zdawało się starożytnym warunkiem koniecznym, by MATEMATYKA STAŁA SIĘ NAUKĄ NORMATYWNĄ, której zadaniem jest ustalanie tego, co winno być (czyli norm) a nie tego, co jest (i co jest domeną *nauk deskryptywnych*).
> Dziś, zamiast o ideach, mówimy raczej o „pojęciach abstrakcyjnych”[3]. Nie potrzebujemy ich niezależnego transcedentnego istnienia. Możemy je tworzyć - w sferze języka. Kreujemy je na podstawie obserwacji „podobnych” obiektów, abstrahowania od tego, co je różni i eksponownia tego, co dla nich wspólne.
> Tak postrzegany świat idei - pojęć abstrakcyjnych - to *model rzeczywistości*, który - jak powiedział dwa tysiące lat później Leibniz - jeśli ma być doskonalszy od rzeczywistości, musi być od niej prostszy.

Filozofia platońska miała ogromny wpływ na proces kształtowania podstaw matematyki. Ale nieskończoność aktualna nie mieści się w świecie platońskich (str.13). Pojedyncze liczby $1, 2, 3, \ldots$ „istnieją”, ale istnienie matematyczne kolekcji wszystkich liczb naturalnych jest negowane.

Jak to się stało, że porzuciliśmy to samoograniczenie? To głównie zasługa Georga Cantora,

[1] Platon (427 p.n.e. - 347 p.n.e.) był twórcą pierwszej naukowej instytucji - akademii platońskiej, która przetrwała aż do 529 roku, kiedy została zamknięta przez cesarza Justyniana I. Tenże cesarz wydał kodeks praw zawierający paragraf *„O złoczyńcach, matematykach i tym podobnych osobnikach”*, głoszący m.in., że „potępienia godna sztuka matematyczna jest zakazana przede wszystkim”. Cesarz Justynian zyskał przydomek „Wielki”... .
Jednym z „absolwentow akademii platońskiej był (najprawdopodobniej) Euklides.

[2] Zwany dziś *idealizmem platońskim*. UWAGA: przywołując w tym tekście poglądy filozofów (Platona, Kanta i innych) mówię o moim subiektywnym odbiorze ich idei i koncepcji. Nie przypisuję sobie prawa do obiektywnego i pełnego przedstawiania ich poglądów. I nie trzeba się ze mną zgadzać.

[3] To tylko sugestia, zdradzająca mój pogląd na matematykę. Matematyczni realiści (platonicy) wciąż podpisują się pod deklaracją Platona: *„nazwy (...) stanowią jedynie obraz rzeczywistości, nigdy nie mogą jej zastąpić. Język jest jedynie narzędziem obrazowania świata.” [23].*

twórcy podstaw teorii mnogości[4].
Przez ponad dwa tysiące lat między Platonem a Cantorem platonizm ulegał znaczącym modyfikacjom. Pierwotny platonizm postulował istnienie wiecznego, transcedentnego świata idealnych form. Zadaniem matematyki miało być podejmowanie prób odkrywania właściwości tych form i zrozumienia relacji między nimi. W tym duchu rozwijała się w starożytnej Grecji geometria.
W średniowieczu platonizm został „przejęty" przez filozofów chrześcijaństwa (neoplatoników). Np. Augustyn z Hippony[5] interpretował platońskie idealne formy jako idee w umyśle Boga. Dlatego część z nich nie musi mieć (nie ma) poznawalnego zmysłowo, odbicia w rzeczywistym świecie.

W chrześcijaństwie nieskończoność jest atrybutem boskości. Bóg jest wieczny, nie ma początku ani końca, wie wszystko i jest wszechmocny. Jest nieskończony pod względem czasu, wiedzy i mocy.

Platonizm w czasach Cantora był już raczej rozumiany jako poszukiwanie transcendentnych, niezmiennych prawd i uniwersalnych idei. *Cantor wierzył w nieskończoność. Rozróżniał jej trzy rodzaje: absolut - realizowany tylko w Bogu, nieskończoność w świecie stworzonym i nieskończoność in abstracto będąca wielkością matematyczną. Pisał: „W każdym z tych przypadków na pytanie o możliwość istnienia nieskończoności aktualnej można odpowiedzieć „tak" lub „nie"; w ten sposób otrzymujemy osiem różnych punktów widzenia, (...) spośród nich reprezentuję osobiście ten, który we wszystkich trzech przypadkach udziela odpowiedzi bezwzględnie pozytywnej"*[6].

Niemal sto lat później Chaitin[7], pisał: *Teoria zbiorów nieskończonych jest w rzeczywistości teologią. (...) Celem Cantora było zrozumienie Boga. Bóg jest transcedentny. Teoria nieskończonych zbiorów ma swą hierarchię coraz to większych nieskończoności.(...) Bóg jest daleko, ponieważ jest nieskończony i transcedentny. Możemy próbować iść w Jego kierunku. Ale nigdy nie dojdziemy, bo po każdej nieskończoności jest od niej większa... [14]*

„Hierarchia nieskończoności" to jedna z najbardziej fascynujących cech matematyki Cantora. Spróbujmy wyjaśnić, w czym rzecz.
Ogół liczb naturalnych jest - w matematyce Cantora - zbiorem. W tym zbiorze - oznaczmy go przez $\mathbf{N}$ - możemy wyróżnić mniejszy od niego podzbiór $2\mathbf{N}$ złożony ze wszystkich liczb parzystych. Przyporządkowanie $n \rightsquigarrow 2n$ ustala wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między elementami obu zbiorów: zbiory $\mathbf{N}$ i $2\mathbf{N}$ są *równoliczne*.
Ta obserwacja znalazła swoje odbicie w matematycznej definicji zbioru nieskończonego:

zbiór A jest nieskończony, gdy zawiera istotnie mniejszy podzbiór B równoliczny z A[8].

> Istnieje nieskończony zbiór liczb naturalnych.
> Uznanie nieskończoności aktualnej zadecydowało o kształcie matematyki XX wieku. A przecież można było zanegować istnienie zbiorów nieskończonych jako sprzeczne z prawem obowiązującym w realnym świecie, w którym - w sposób oczywisty - *„zbiór nie może być równoliczny ze swym właściwym podzbiorem"*[9].
> Cantor ignorował ten argument, gdyż źródeł matematyki upatrywał poza dostępną nam rzeczywistością.

Cantor pokazał, że:

„żaden zbiór nie jest równoliczny ze swym zbiorem potęgowym"

Dowód tego twierdzenia przedstawimy później. Teraz przyjrzyjmy się jego konsekwencjom.

[4]Cantor przedstawił zarys swojej wizji matematyki w serii pięciu prac w latach 1879-1884. Jednak jego idee nie uzyskały powszechnej i natychmiastowej akceptacji. W rzeczywistości Cantor nie doczekał się należnego uznania. To było jedna z przyczyn załamania się jego działalności naukowej już ok. czterdziestego roku życia (Cantor żył 73 lata). Towarzyszyły temu depresje związane m.in. z niemożnością rozstrzygnięcia hipotezy continuum (str.**??**).

[5]Św.Augustyn (354-430).

[6]Cytuję za artykułem M. Ruckiej *„Dotknąć i zobaczyć nieskończoność"* (internet).

[7]Gregory Chaitin (ur. 1947), argentyńsko-amerykański matematyk i informatyk.

[8]B jest istotnie mniejszy od A; gdy istnieje element $a \in A$ taki, że $a \notin B$.
O uprzywilejowanej pozycji nieskończoności w matematyce teoriomnogościowej świadczy to, że skończoność zbioru jest pojęciem wtórnym: *„zbiór jest skończony, gdy nie jest nieskończony"*.

[9]To pogląd Galileusza. Również Leibniz uważał to za argument przeciw uznaniu „nieskończonych jedności" *(„infinite wholes")*

Jeśli zbiór A jest nieskończony, to również zbiór potęgowy 2^A jest nieskończony - to jasne. Ale z twierdzenia Cantora wynika, że te nieskończoności muszą być „różne”! Powtarzając to rozumowanie stwierdzimy, że nieskończoność zbioru 2^{2^A} jest różna od dwóch poprzednich! I tak dalej, „w nieskończoność”... [10].

Zbiór **N** to najmniejszy zbiór nieskończony - każdy inny zbiór nieskończony zawiera podzbiór równoliczny z **N**. Równoliczność zbiorów A i **N** oznacza, że elementy zbioru A można ponumerować: $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n \ldots\}$. Takie zbiory nazywano zbiorami *przeliczalnie nieskończonymi*[11].

Pozostałe nieskończone zbiory to zbiory *nieprzeliczalne (nieprzeliczalnie nieskończone)*.

Nieprzeliczalność zbioru A oznacza, że jego elementów nie można ponumerować. Grozę sytuacji zrozumiemy jednak dopiero wtedy, gdy uświadomimy sobie, że elmentów tego zbioru nie da się identyfikować na podstawie ich unikatowych opisów.

Dlaczego? Wszystkie opisy, które można sporządzić np. w języku polskim, można ponumerować. Wyobraźmy to sobie tak: opis to książka. Może długa, ale zawsze zawierająca tylko skończenie wiele znaków (liter, znaków interpunkcyjnych, spacji). Możemy te książki-opisy ustawić w kolejkę. Najpierw posegregujemy je według długości (liczby znaków) zaczynając od najkrótszych. Potem każdy ze **skończonych** zbiorów opisów o tej samej długości porządkujemy leksykograficznie (alfabetycznie). W ten sposób każdemu opisowi można przypisać jego numer - liczbę naturalną[12]. Możliwość przypisania elementom pewnego zbioru A unikatowych opisów jest więc równoważna z możliwością ponumerowania elementów zbioru A.Identyfikowanie elementów zbioru poprzez nadanie im unikatowych nazw jest mozliwe tylko w przypadku zbiorów skończonych lub nieskończonych, ale przeliczalnych.

$2^{\mathbf{N}}$ jest nieskończony, ale nieprzeliczalny. To oznacza, że nie każdy element tego zbioru - nie każdy podzbiór liczb naturalmych - ma identyfikujący go jednoznacznie opis.

> *Cantor:„zbiorem jest spojenie w całość określonych, rozróżnialnych podmiotów naszej poglądowości czy myśli”*[13]. Jak „spoić w całość” coś, czego nie potrafimy nazwać, opisać?
> Teoria mnogości nie dość, że każe uznać różne rodzaje nieskończoności, to wymaga akceptacji istnienia zbiorów, które nie mają unikatowych opisów w jakimkolwiek języku.
> Teoria mnogości wymaga głębokiej wiary... .

Gdyby szło tylko o to, że zbiorów utworzonych z liczb naturalnych jest nieprzeliczalnie wiele, to można by na ten wynik machnąć ręką - kogo interesuje „zbiór wszystkich podzbiorów **N**” - obiekt leżący, być może, gdzieś na peryferiach matematyki. Ale okazało się - a pokazał to również Cantor - że nieskończoność zbioru liczb rzeczywistych jest tego samego rodzaju co nieskończoność zbioru $2^{\mathbf{N}}$.

Zbiór $\mathcal{R}$ jest nieprzeliczalny. Tego matematyka nie mogła zlekceważyć.

Nie można nadać wszystkim liczbom rzeczywistym nazw, pozwalających na ich jedniznaczną identyfikację. Te liczby nie mogą być nazwami. Czym więc są?

„Liczba rzeczywista” to pojęcie abstrakcyjne (sformułowane w języku teorii mnogości), które ma nieprzeliczalnie wiele desygnatów. Stwierdzenie, że te desygnaty tworzą nową jedność - aktualnie istniejący nieskończony i nieprzeliczalny zbiór, to tylko konsekwencja przyjęcia teoriomnogościowych paradygmatów.

Cantor uznał, że ujawnienie „jakościowej różnicy” między nieskończonością zbiorów **N** i $\mathcal{R}$ to nie kłopot, ale odwrotnie: to drzwi do nowych wspaniałych światów. Bo z jego twierdzenia

[10] Cantorowska hierarchia nieskończoności sformalizowana jest jako „skala alefów”. Cohen wskazywał na symboliczny charakter tej nazwy - $\aleph$ to pierwsza litera alfabetu hebrajskiego. Dla oznaczenia uniwersum Cantor używał ostatniej litery tego alfabetu - *taw* [16].

[11] Są to *zbiory mocy* $\aleph_0$, *gdzie* $\aleph_0$ *to najmniejsza wielkość w cantorowskiej hierarchii nieskończoności.*

[12] Powtórzyłem tu wcześniejsze uzasadnienie, że elementy wytwarzane przez jakąkolwiek strukturę rekurencyjną można efektywnie ponumerować. Zbiory rekurencyjne są przeliczalne.

[13] *„A set is a collection into a whole of definite, distinct objects of our intuition or of our thought. The objects are called the elements (members) of the set.”* - cytuję za *”Haskell road to Logic, Math and Programming” - K.Doets, J. van Eijek*. Podobnie myślał Poincare postulujący, by *„rozważać jedynie przedmioty, które mogą być zdefiniowane za pomocą skończonej liczby słów”*.

w wynika, że w matematyce teorimnogościowej mamy nie jedną, ale nieskończenie wiele różnych rodzajów nieskończoności.... Dla tych, którzy zawierzyli teorii mnogości, był to przełom. Ukazał się „matematyczny kosmos”, transcedentny świat matematyki. Raj[14].

3.0.1 Opozycja

Dla wielu nieskończenie wiele nieskończoności to raj. Ale nie dla wszystkich... ’

> *”I don’t know what predominates in Cantor’s theory — philosophy or theology, but I am sure that there is no mathematics there.”* - Leopold Kronecker[15].
> *„I protest against the use of infinite magnitude as something completed, which is never permissible in mathematics” [53].* - Carl F. Gauss.
> *„Teoria mnogości Cantora to obłęd, perwersja, z której matematyka się kiedyś wyleczy”* - H. Poincare.
> *„Czytanie prac Cantora wydaje mi się prawdziwą torturą ... nikt z nas nie ma ochoty iść jego śladem”* - Ch. Hermite.
> *„With the work of Dedekind, Peano and Cantor above all, complete infinity was accepted into mainstream mathematics. Mathematics became a faith-based initiative” - E. Nelson [53].*

Ale historia przyznała rację Cantorowi: *W ostatnim stuleciu cantorowska teoria mnogości zajęła w matematyce na tyle ważne miejsce, że (...) prawo do istnienia zyskuje sobie tylko to, co (...) dopuszcza zbudowanie modelu w teorii Cantora. W ten sposób cantorowska teoria stała się uniwersalnym światem matematyki - P. Vopenka [49].*

Dodatek: o wspomnianym wcześniej odkryciu Cantora

Cantora zmagania z nieskończonościa rozpoczęły się od badania podzbiorów liczb rzeczywistych. Z powodów, które tu pominiemy milczeniem, Cantor zainteresował się kwestią przeliczalności pochodniej zbioru $P \subseteq \mathcal{R}$ - zbioru P', którego elementami są liczby rzeczywiste - granice ciagów różnych od nich liczb ze zbioru P [16]. Startując od dowolnwego zbioru P możemy utworzyć nieskończony ciąg „coraz to mniejszych” zbiorów: $P' \supseteq (P')' = P^{(2)} \supseteq \ldots \supseteq P^{(n+1)} = (P^{(n)})' \supseteq \ldots$.
Stosunkowo łatwo pokazać, że jeśli dla pewnej liczby naturalnej n zbiór $P^{(n)}$ jest pusty, to zbiór P' jest przeliczalny. Ale czy w przeciwnym wypadku musimy pozostawić pytanie o przeliczalność P' bez odpowiedzi? Cantora takie rozwiązanie nie zadowoliło i ... przedłużył iteracyjną konstrukcję ciągu pochodnych zbioru:

$$P^{(\omega)} = \bigcup((P^{(n)} \colon n \in N),\ P^{(\omega+1)} = (P^{(\omega)})', \ldots, P^{(\omega+n)}, \ldots, P^{(\omega+\omega)}, \ldots .$$

„I tak dalej”. To pozwoliło zamienić wskazaną implikację na elegancką równoważność - zbiór P' jest przeliczalny dokładnie wtedy, gdy któryś z tak utworzonych zbiorów jest pusty[17]
Pięknie, ale ... czym są kolejne indeksy oznaczane symbolami $\omega, \omega+1, \ldots$? Odpowiedź Cantora była równie genialna co odważna: to są liczby podobne do liczb naturalnych w tym sensie, że też służą do kolejkowania, porządkowania - ale nie zbiorów skończonych lecz nieskończonych!

To są liczby porządkowe.

Cantor zapewne uważał, że odkrył istnienie liczb porządkowych. Pozwolę sobie być innego zdania: te liczby to jego genialna kreacja.

Tak narodziła się teoria mnogości[18].

---

[14] *,Hilbert mówił o teorii mnogości Cantora jako o jednym z najpiękniejszych tworów ludzkiego intelektu. [16]*

[15] Pełny opis konfliktu Kroneckera z Cantorem można znaleźć w książce H. Helmanna *„Great feuds in mathematics: ten of the liveliest disputes ever”*

[16] $a = lim_n b_n \in P'$ gdy dla dowolnego n, $b_n \in P$, $b_n \neq a$.

[17] Zainteresowanych szczegółami i dowodami odsyłam do wikipedii na stronę *„Ordinal number - History”*.

[18] Ten wynik Cantor uzyskał we wrześniu 1872 roku. W 1883 r. w liście do Dedekinda Cantor pisał: *„(...) od naszego ostatniego spotkania cieszy Boga Wszechmogacego, że osiągnałem najbardziej niezwykłe i nieoczekiwane wyniki w teorii mnogości, a raczej, że znalazłem to, co fermentowało mnie (fermented me) przez lata”*.. A. Kanamori w opracowaniu *Set theory from Cantor to Cohen* (internet) wskazuje jako datę narodzin teorii mnogości grudzień 1873 *„when Cantor established that the real numbers are uncountable”*.

Rozdział 4

Kontinuum - przedmiot (ciągłego) sporu

Natura non facit saltus (natura nie skacze) - G.F.Leibniz[1]

Matematyka konstruktywna dysponuje liczbami naturalnymi, całkowitymi, wymiernymi. Słowami, językami i dowodami. Dlaczego to za mało?

O kształcie matematyki zdecydowały osiągnięcia cywilizacyjne starożytnej Grecji. To wtedy wypracowano podstawy arytmetyki i geometrii - dwóch fundamentalnych teorii matematycznych. Do tych teorii odniósł się Kant gdy prawie dwa tysiące lat później definiował matematykę jako *„logiczną analizę stosunków czasowych i przestrzennych. Pierwsze zadanie matematyka realizuje za pomocą arytmetyki, drugie - geometrii"*.
Geometria Greków miała dwa źródła: pierwsze to problemy praktyczne, związane z pomiarami ziemi, budownictwem itp.. Drugie to astronomia[2]. Wykorzystanie liczb do opisu proporcji między porównywalnymi obiektami geometrycznymi (np. długościami odcinków) to kolejne, odwieczne zastosowanie liczb naturalnych. Bardziej wyrafinowane od zliczania i kolejkowania i w konsekwencji prowadzące do akceptacji nowego rodzaju liczb - *liczb wymiernych* - (dodatnich) ułamków. To o tych liczbach myśleli pitagorejczycy głosząc pogląd, że „wszystko co istotne jest liczbą"[3].
To był niepodważalny paradygmat wsparty codziennym doświadczeniem. Do czasu, gdy te doświadczenia mierniczych, budowniczych, etc. postanowiono przenieść do świata platońskich bytów idealnych. Wtedy okazało się, że w idealnym kwadracie proporcja długości przekątnej i boku wcale nie jest liczbą wymierną... . To był szok[4] i przyczyna tzw. pierwszego wielkiego kryzysu w matematyce: liczb, które można finitarnymi metodami skonstruować z liczb naturalnych jest za mało.
Sto lat po tej katastrofie Eudoksos zaproponował rozwiązanie problemu - *teorię proporcji.* W skrócie: źródłem liczb u Eudoksosa są *proporcje* porównywalnych wielkości - np. długości odcinków. Liczby (dzisiaj powiemy: liczby rzeczywiste dodatnie) to miary proporcji: $\sqrt{2}$ jest miarą proporcji długości przekątnej i boku kwadratu[5].

---

[1]Gottfierd Leibniz (1646-1716) filozof, matematyk, prawnik i ... dyplomata. Ciekawostka: Leibniz był nieprzejednanym krytykiem koncepcji Newtona. Gdy Newton przyjął, że standardowym oznaczeniem czasu będzie litera „t", Leibnitz postanowił wyrzucić tę literę ze swego nazwiska.

[1]Immanuel Kant (1724-1804) – niemiecki filozof (i wykładowca matematyki), profesor Uniwersytetu w Królewcu. Nie wiem wystarczająco dużo o jego koncepcjach filozoficznych by móc z pełnym przekonaniem tłumaczyć je innym. To, co piszę, jest jedynie wybiórczą (nad)interpretacją poglądów Kanta. Spragnionych wiedzy rzetelnej odsyłam np. do [20] gdzie opisano wpływ Kanta na filozofię matematyki.

[2]Polecam artykuły J. Waszkiewicza *„Wpływ astronomii greckiej na powstanie geometrii" (http://www.msn.ap.siedlce.pl/smp/msn/1/34-44.pdf)* i M.Hellera, Z.Pogody *Geometria i kosmologia - historia wzajemnych związków (http://www.msn.ap.siedlce.pl/smp/ msn/3/27-31.pdf*

[3]Sprowadzenie filozofii pitagorejczyków - uczniów i następców Pitagorasa (572 - 497 p.n.e.) - do jednego hasła jest oczywiście uproszczeniem.

[4]Legenda mówi, że odkrywca niewymierności „liczby" $\sqrt{2}$ został uśmiercony... .

[5]Eudoksos (ok.408 - ok.355 p.n.e.). Proporcje porównujemy „geometrycznie": $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ gdy można wskazać liczby

Liczby naturalne to struktura dyskretna. Podobnie liczby całkowite. Liczby wymierne to struktura *gęsta* - między każde dwie takie liczby można wstawić trzecią od nich różną.
Rozwiązanie problemu, który ujawnili pitagorejczycy, potrzebuje czegoś więcej - potrzebuje *ciągłości*, potrzebuje swego *kontinuum*[6]. Na jednej ze stron internetowych (bodajże wikipedii) napisano tak:

Continuum (...) anything that goes through a gradual transition from one condition, to a different condition, without any abrupt changes[7].

Ciągłość to niepodzielność, brak luk i skoków. Antyteza dyskretności[8]. Zmiany wysokości tonu skrzypiec odbieramy jako ciągłe a fortepianu - jako dyskretne, „schodkowe". Ciągłość nie budzi sprzeciwu. Przeciwnie: z niedowierzaniem przyjmujemy informację, że coś, co odbieramy jako przekaz ciągły, jest w istocie gęstym przekazem dyskretnych sygnałów. To jest własność naszych zmysłów i umysłu: mamy w sobie mechanizm wygładzania sekwencji odbieranych sygnałów[9]. W takim widzeniu świata utwierdzali nas wielcy: *„Natura nie skacze"* - Leibniz, *„czas i przestrzeń to ciągłe wielkości" (quanta continua)* - Kant[10]. Dziś kognitywiści mówią to samo: *„Space is absolutely continuous" [45]*. My tak POSTRZEGAMY przestrzeń i procesy w niej zachodzące[11].

> Tylko postrzegamy. Od czasów Maxa Plancka wiemy, że przynajmniej na poziomie kwantów założenie ciągłości procesów nie jest niepodważalne.

Antyczni Grecy mieli z ciągłością kłopot. Dla Arystotelesa *continua to „odległość, czas i ruch" [44]*. W *„Fizyce"* napisał: *„Continuum nie może być utworzone z niepodzielnych wielkości" (np. punktów)"*[12]. Arystoteles opisywał kontinuum tak:
1. kontinuum składa się z części,
2. ich stykające się granice są te same i zawierają się w sobie nawzajem,
3. części te są podzielne w nieskończoność.

U Euklidesa linia to drugie, obok punktu, pojęcie pierwotne geometrii. *„Linia to długość bez szerokości"*. *„Linią prostą jest ta, która jest jednakowo położona względem punktów na niej leżących"*. Pierwsze zdanie wydaje się naiwne, drugie niezrozumiałe. Ale z niego wynika, że w koncepcji Euklidesa linia NIE JEST ZBIOREM punktów! Punkty leżą na linii, ale jej nie tworzą. *„Końcami (kresami) linii są punkty"*, *„prostą można ciągle przedłużać po prostej"*[13].

---

naturalne m, n takie, że n-krotnie przedłużony odcinek a jest dłuższy od m-krotnie przedłużonego odcinka b i jednocześnie m-krotnie przedłużony odcinek d jest dłuższy od n-krotnie przedłużonego odcinka c ($\frac{a}{b} > \frac{m}{n} > \frac{c}{d}$). Dwie proporcje wyznaczają tę samą liczbę rzeczywistą gdy nie jest prawdą, że $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ oraz $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ [55].

[6] Kontinuum - słowo łacińskie, które w [6] objaśniono (po angielsku) tak: *„the word "continuous" derives from a Latin root meaning "to hang together" or "to cohere"; this same root gives us the nouns "continent" — an expanse of land unbroken by sea — and "continence" — self-restraint in the sense of "holding oneself together". Synonyms for "continuous" include: connected, entire, unbroken, uninterrupted."*
Continuum czy kontinuum? *„Warianty o obcej pisowni często sugerują specjalistyczną wiedzę i wyższe kompetencje."* Lubię się dowartościować więc będę używał obu wersji (losowo).

[7] *abrupt - nagły, gwałtowny.*

[8] Polskie terminy „struktura (matematyka) dyskretna" są dość nieszczęśliwe. „Dyskrecja" ma w języku polskim inne znaczenie, bliższe angielskiemu „discreet" (a nie „discrete") . A nikt na świecie nie słyszał o „discreet mathematics". Podoba mi się propozycja, by „strukturę dyskretną" zastąpić „strukturą ziarnistą".

[9] Bezwładność oka sprawia, że po zarejestrowaniu wrażenia wzrokowego przez krótki czas oko nie jest w stanie odebrać nowego obrazu. To pozwala na oglądanie ruchomych obrazów w telewizji - obrazy pojawiające się na ekranie częściej niż co 0,1 sekundy zlewają się ze sobą i dają wrażenie ciągłego ruchu.

[10] *„Przestrzeń i czas to continua kwantowe...punkty i chwile to tylko pozycje... z samych pozycji postrzeganych jako składniki ... ani przestrzeń, ani czas nie mogą być skonstruowane."*

[11] Lata temu, jeden z moich przyjaciół, astronom, pasjonował się pionierskim w tym czasie „komputerowym oczyszczaniem" wyników nasłuchów radioteleskopowych, rejestrowanych w postaci nieregularnej krzywej, z gwałtownymi zmianami, skokami. Oczyszczanie polegało na „wygładzeniu" tej krzywej w przekonaniu , że to, co jej gładkość (ciągłość) psuje, to zakłócenia nakładające się na sygnał przychodzący z wszechświata. Wszak natura nie skacze...

[12] *„No continuum can be made up of indivisibles, as for instance a line out of points, granting that the line is continuous and the point indivisible". [6]*

[13] Cytuję za artykułem *„O „elementach" Euklidesa"* - *http://www.math.uni.opole.pl/ ebryniarski Elementy Euklidesa.pdf* (z czego wnoszę, że autorem tego tekstu jest E. Bryniarski). Linia prosta NIE JEST nieskończona, ale jest

Teoria mnogości, która narzuciła sobie ograniczenie podstawowych schematów wyobrażeniowych do jednego - zbioru - nie ma, bo mieć nie może, wątpliwości: linia to ZBIÓR punktów.

W 1872 roku Dedekind przedstawił konstrukcję, która przez matematykę mainstreamową została uznana za satysfakcjonujące rozwiązanie problemu kontinuum[14]. Zaproponował on taki oto sposób konstruowania zbioru liczbowego istotnie większego od zbioru liczb wymiernych:

jeżeli gęsty zbiór liczb wymiernych rozdzielimy na niepuste zbiory A i B tak, by każda liczba z A była mniejsza od każdej liczby z B, to może się zdarzyć jedna z trzech sytuacji: albo zbiór A ma element najmniejszy, albo B najmniejszy, albo między tymi zbiorami jest luka - w A nie ma liczby największej, a w B - najmniejszej. Tak jest, gdy np. przyjmiemy $B = \{a \in Q : a^2 > 2\}$.

Sens defincji Dedekinda to stwierdzenie, że tam nie ma luki - tam jest *liczba rzeczywista* $\sqrt{2}$*:*

jakikolwiek podział zbioru liczb wymiernych na dwa zbiory spełniający opisane wyżej warunki - przekrój Dedekinda - wyznacza liczbę rzeczywistą. Jeśli to jest „przekrój z luką" to wyznacza liczbę niewymierną a jeśli nie, to liczbę wymierną.

> Twierdzenie, że coś istnieje tam, gdzie niczego nie ma, to niedorzeczność - gdy traktujemy matematykę jako odkrywanie. Ale ma sens, gdy ją tworzymy.

Dlaczego propozycja Dedekinda spotkała się z tak powszechną aprobatą? Oto jak tłumaczył to polski matematyk, R. Sikorski[15]:

(...) zbiór liczb wymiernych ma wady. Wprawdzie jest gęsty, (ale) jest jednak dziurawy (...). Istnienie dziur w zbiorze liczb wymiernych jest źródłem wielu kłopotów. Obrazowo można powiedzieć, że przez te dziury wycieka treść matematyczna wielu pięknych twierdzeń (...) . Zbiór liczb wymiernych jest świetny do rachunków na liczbach konkretnych, ale zły dla wielu celów teoretycznych (...). W oparciu o pojęcie liczby rzeczywistej można zbudować całą analizę matematyczną (...). U podstaw wszystkich twierdzeń tej części matematyki leży „szczelność" zbioru liczb rzeczywistych.

Budowanie wyobrażenia ciągłości w matematyce zaczynamy od intuicyjnego stwierdzenia, że *„funkcja jest ciągła, jeżeli jej wykres można narysować bez odrywania ołówka od papieru"*. To wystarczy, by zgodzić się z *twierdzeniem Darboux*: *„jeśli funkcja $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ jest ciągła i $f(a) < 0 < f(b)$, to istnieje punkt-liczba rzeczywista $c \in [a, b]$ taka, że $f(c) = 0$"*[16].

To przestaje być prawdą, gdy liczby rzeczywiste zastąpimy wymiernymi. Wystarczy pomyśleć o funkcji $f\colon Q \to Q$ opisanej wzorem $f(x) = x^2 - 2$: oczywiście $f(0) < 0 < f(2)$ ale nie istnieje liczba wymierna c taka, że $f(c) = 0$.

Twierdzenie Darboux to jeden z tych wyników, które „wyciekną" gdy nie uszczelnimy struktury liczb wymiernych za pomocą liczb rzeczywistych... .

> W dowodzie twierdzenia Darboux wykorzystujemy to, że *„niepusty podzbiór liczb rzeczywistych, który jest ograniczony z góry, ma kres górny"*. Ta nieco zawiłe i wysoce abstrakcyjne stwierdzenie zostało przez Dedekinda wyniesione do rangi MATEMATYCZNEJ DEFINICJI CIĄGŁOŚCI.
> Dedekind wiedział, że jedynie MODELUJE ciągłość matematycznie (teoriomnogościowo). Pisał: *„przyjęcie tej własności linii prostej jest (...)* AKSJOMATEM *dopiero na mocy którego przyznajemy linii prostej jej ciągłość" [59]*[17].

(potencjalnie) nieskończenie przedłużalna, rozciągliwa.

[14] Julius Dedekind (1831 -1916) – niemiecki matematyk, uczeń Gaussa.

[15] Roman Sikorski (1920-1983). Cytat pochodzi z artykułu *„Czy liczby rzeczywiste są rzeczywiste?" (Delta 01/1974)*. Niech nas nie zwiedzie, że adresatem artykułu są dzieci: aby coś wytłumaczyć dziecku trzeba być lepiej przygotowany niż do wygłoszenia wykładu „ex cathedra"...

[16] Wykres takiej funkcji ciągłej f rozpoczynamy rysować pod prostą $x = 0$ a kończymy powyżej niej, nie odrywając ołówka od papieru. Dlatego wykres musi przeciąć tę prostą - mieć z nią punkt wspólny.

[17] *„Continuum, tak rozumiane, jest zbiorem poszczególnych elementów, uszeregowanych w pewnym porządku; jest ich wprawdzie nieskończenie wiele, ale poszczególne elementy są całkowicie rozdzielone.* NIE ODPOWIADA TO ZWYKŁEMU ROZUMIENIU CONTINUUM, *zgodnie z którym poszczególne elementy są połączone i tworzą całość, dzięki czemu nie punkt istnieje przed linią, lecz linia przed punktem. Ze słynnej formuły "continuum to jedność w wielości" pozostała tylko wielość, jedność znikła. To wystarczy, byśmy zdali sobie sprawę, że continuum matematyczne jest czymś*

Skuteczność analizy matematycznej, której podstawą jest taka interpretacja ciągłości, to ważki argument na rzecz propozycji Dedekinda. Ale to nie oznacza, że wszystko jest jasne: ta definicja może (powinna) napotkać na wewnętrzny opór. Jak można twierdzić, że istnieje „coś" tam, gdzie nie ma nic, gdzie jest luka? Przecież:

„powiedzieć, że istnieje, o czymś, czego nie ma, jest fałszem. Powiedzieć o tym, co jest, że jest, a o tym, czego nie ma, że go nie ma, jest prawdą". („Metafizyka", Arystoteles) .

To, co zrobił Dedekind zdaje się być jawnie sprzeczne z tą zasadą. Co z tym zrobić?
Formalista powie: w teorii mnogości uznajemy aktualne istnienie dowolnych podzbiorów liczb wymiernych. Liczbą niewymierną nie jest „coś" w luce między zbiorami. Ta liczba to wskazana para zbiorów liczb wymiernych - *przekrój Dedekinda*. Nic w tym dziwnego, bo w matematyce teoriomnogościowej wszelkie wcześniej konstruowane liczby - naturalne, całkowite i wymierne - też są zbiorami Napis $\sqrt{2}$ to tylko nazwa jednej z takich par[18]. To, co proponuje Dedekind, jest KONSTRUKCJĄ - jeśli tylko akceptujemy aktualne istnienie zbiorów nieskończonych.

To wyjaśnienie, choć formalnie poprawne, nie do końca przekonuje. Liczba to para (nieskończonych) zbiorów liczb? I jeszcze mam to „coś" nazywać liczbą RZECZYWISTĄ?

> Strasznie nam się ta dyskusja o ciągłości zawikłała... . Ale może dziś, po przełomowych odkryciach fizyków, trzeba wsłuchać się w to, co oni mówią o ciągłości?
> *„Być może rzeki atramentu, który przez wieki (...) zużyto na rozważania nad naturą „ciągłości" wylano na próżno.* CIĄGŁOŚĆ JEST JEDYNIE TECHNIKĄ MATEMATYCZNĄ *służącą przybliżaniu bardzo drobnoziarnistych rzeczy. Na subtelnym poziomie świat jest dyskretny a nie ciągły. Dobry Bóg nie namalował go zamaszystymi pociągnięciami pędzla, tylko delikatnie zaznaczył kropkami, jak Seurat" - C. Rovelli [65].*

4.0.1 Metafora geometryczno-liczbowa

„Analiza matematyczna (...) opierała swoje znaczenie i poczucie słuszności na związku z geometrią". [22] str. 289.

Cantor nie miał wątpliwości. Pisał *„continuum* IS *the arithmetical continuum of all real numbers, defined by means of the method of the Dedekind cuts"*. Dedekindowskie kontinuum to centralny obiekt jego matematyki[19].

Formalizm to nie najlepszy sposób postrzegania matematyki. Ani jej objaśniania. Gdzie więc szukać źródeł intuicji pozwalającej na mentalną akceptację tak definiowanych „liczb"? Odwołajmy się powtórnie do odwiecznego współistnienia arytmetyki i geometrii. Te dwa „ortogonalne" aspekty matematyki wzajemnie na siebie oddziaływują i inspirują. To siła matematyki.

Kognitywiści G. Lakoff i R.E. Nunez formułują w [45] tezę, że jednym z motorów poznania matematycznego jest *metafora*[20].

> Metafora to zabieg pozwalający cechy jednego obiektu (zjawiska, procesu) przypisać innemu. Np. z uczuciami wiążemy metaforycznie temperaturę. Wystarczy powiedzieć *„jesteś zimna jak lód"* i wiadomo w czym rzecz. Tworzenie metafor to domena poetów - *Like a bird on the wire, Like a drunk in a midnight choir I have tried in my way to be free. (L.Cohen).*
>
> *„Metafory i analogie, poprzez zestawienie razem różnych kontekstów, prowadzą do powstawania nowych sposobów patrzenia.* PRAWIE WSZYSTKO TO, CO WIEMY, ŁĄCZNIE Z POWAŻNĄ NAUKĄ, OPIERA SIĘ NA METAFORZE. *I dlatego nasza wiedza nie jest absolutna"* – J. Weizenbaum[21].

---

zupełnie innym niż continuum fizyków lub metafizyków." - H. Poincare (Nauka i Hipoteza)

[18] *„Zgodnie z definicją Dedekinda, liczba niewymierna nie jest niczym innym, jak* SYMBOLEM *tego szczególnego podziału liczb wymiernych. Każdemu podziałowi odpowiada liczba (...), która jest jego symbolem" [57].*

[19] *„Jeżeli przedmiotem badań są liczby rzeczywiste, to linia rzeczywista $\mathcal{R}$,(...), może być rozważanym wszechświatem. (...) . Jedynymi zbiorami, którymi początkowo interesował się Cantor, były podzbiory $\mathcal{R}$" (http://en.wikipedia.org/wiki/Universe_(mathematics).*

[20] Kognitywistyka to stosunkowo młoda dziedzina nauki zajmująca się analizą działania zmysłów, mózgu i umysłu. W pewnym sensie uzupełnia ona tradycyjną epistemologię - teorię poznania, korzystając z dorobku współczesnej medycyny, psychologii czy lingwistyki.

Kontinuum Dedekinda jest realizacją jednej z podstawowych metafor matematycznych, którą nazywam „metaforą geometryczno-liczbową” a która polega na utożsamieniu liczb rzeczywistych z punktami prostej. Kontinuum to PROSTA RZECZYWISTA.

> Punkt to liczba (rzeczywista). Liczba to punkt (na prostej). Dwa abstrakcyjne pojęcia, które postrzegane osobno nie są oczywiste, dzięki tej geometryczno-liczbowej metaforze stają się „realne”. *„Intuicja przestrzenna (...) jest potężnym narzędziem i dlatego geometria jest w tak potężną częścią matematyki– nie tylko dla rzeczy, które są oczywiście geometryczne, ale nawet dla tych, które takimi nie są. Usiłujemy im nadać postać geometryczną, bo to pozwala nam posługiwać się naszą intuicją” - M. Atiyah [2].*

Liczby wspierają geometrię. A geometria dostarcza „dowodów istnienia” takich liczb jak $\sqrt{n}$ czy π . Umiemy „podnosić liczby do kwadratu”. Wiemy, co to „pierwiastek kwadratowy”. Akceptujemy stwierdzenie, że liczby rzeczywiste są miarą odległości między „realnymi obiektami geometrycznymi” - punktami prostej. Dzięki tej metaforze bez sprzeciwu akceptujemy nazwę „liczby rzeczywiste” dla tego, co jest rezultatem konstrukcji Dedekinda[22]. Takiego metaforycznego wsparcia zabrakło przy konstrukcji większego zbioru liczbowego - liczb zespolonych (patrz str.42). Dlatego o liczbach rzeczywistych uczymy w szkole a o liczbach zespolonych - nie.

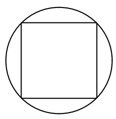
4.0.2 Wielkości graniczne

Metaforyczne wsparcie ze strony geometrii funkcjonuje w sposób szczególny, gdy myślimy o konstrukcjach i wielkościach granicznych. Takie wielkości pojawiają się w alternatywnym opisie liczb rzeczywistych:

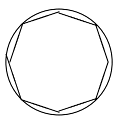
każda liczba rzeczywista - w sensie Dedekinda - jest granicą pewnego ciągu liczb wymiernych.

To udowodnił Cantor łącząc w ten sposób teoriomnogościową konstrukcję Dedekinda z wcześniejszymi pomysłami A.Cauchy’ego[23]. Cauchy to geniusz, któremu zawdzięczamy uprawomocnienie obecności *wielkości granicznych* w matematyce.

Zacznijmy tak: obwód kwadratu wpisanego w okrąg



jest pewnym przybliżeniem, aproksymacją długości tego okręgu. Marnym, ale zawsze. Łatwo to poprawić: jeśli kwadrat zastąpimy ośmiokątem foremnym



to otrzymamy lepsze przybliżenie - obwód ośmiokąta jest bliższy długości okręgu niż obwód kwadratu. Podwajając każdorazowo liczbę boków wpisywanego wielokąta, otrzymamy (potencjalnie nieskończony) ciąg liczb - obwodów kolejnych wielokątów - coraz lepiej aproksymujących długość okręgu. Długość okręgu nie jest elementem tego ciągu, ale jest z nim ściśle związana - to wyznaczona przezeń *wielkość graniczna*[24].

---

[21] J. Weizenbaum (1923 - 2008), twórca (w 1966r!) programu ELIZA, który umożliwiał prowadzenie prostej rozmowy z komputerem.

[22] Zaufanie pokładane w metaforze grometryczno-liczbowej czasem prowadzi za daleko. Np. patrząc na prostą rzeczywistą łatwo wierzymy w słuszność *prawa trychotomii - dla dowolnch dwóch liczb rzeczywistych* a, b , $a = b$ *lub* $a < b$ *lub* $b < a$. Trudno przekonać studentów, że to prawo wymaga (niebanalnego) dowodu.

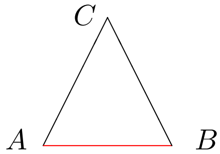
[23] Augustin L. Cauchy (1789 - 1857) – francuski matematyk.

[24] Takie działanie to znana matematykom starożytnej Grecji *metoda wyczerpywania* pozwalająca na wyznaczanie przybliżonych wartości obwodów i pól różnych figur. Archimedes wykorzystując 96-kąt foremny pokazał, że liczba π

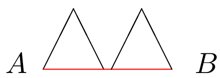
Proste? Niekoniecznie. To, że można mówić o odległości między punktami na płaszczyźnie (w przestrzeni) jest paradygmatem geometrii euklidesowej. „Długość okręgu” nie jest już tak intuicyjnie oczywista. Jak ją zdefiniować? Jako długość odcinka powstałego przez „rozcięcie” i „rozprostowanie” okręgu? Ale co to znaczy? Dlatego propozycja, by długość okręgu przybliżać mierząc obwody wpisywanych w okrąg wielokątów o coraz to większej liczbie boków wygląda obiecująco - wszak obwód wielokąta foremnego to - bezdyskusyjnie - wielokrotność długości jego boku. A długość tego odcinka można obliczyć (lub przynajmniej próbować...).

Ale skąd wiemy, że taka liczba - wielkość graniczna związana z ciągiem obwodów wpisanych w okrąg wielokątów - istnieje i jest jedna jedyna? Sądzę, że większość z nas zaakceptuje taką argumentację: *„powierzchnia pomiędzy okręgiem a aproksymującymi go wielokątami jest - w miarę zwiększania liczby boków - coraz mniejsza, a boki wielokątów coraz bliższe okręgowi. To* MUSI *oznaczać, że obwody kolejnych wielokątów są coraz bliższe długości okręgu”.*

Czyżby? Przeanalizujmy podobny przykład. Przyjmijmy, że wędrówka z A do B przez trzeci wierzchołek trójkąta równobocznego - C - to pierwszy element ciągu wędrówek aproksymujących wędrówkę po prostej - wzdłuż odcinka z A do B:



Gdy zastąpimy ten trójkąt dwoma mniejszymi trójkątami równobocznymi to otrzymamy nową, „zygzakowatą” trasę wędrówki z A do B, bliższą odcinkowi AB:



Gdy teraz zastąpimy każdy z tych dwóch trójkątów dwoma mniejszymi (postępując tak, jak przed chwilą) to wyznaczymy kolejną trasę zygzakowatej wędrówki z A do B. I tak dalej... .

Wydaje się, że sytuacja jest taka jak poprzednio: suma pól figur ograniczonych odcinkiem AB i kolejnymi zygzakami jest coraz mniejsza a trasy kolejnych wędrówek coraz bliższe prostej drodze z A do B. Zatem długość zygzakowatej wędrówki, w miarę zwiększania liczby trójkatów, powinna zbliżać się do długości odcinka AB. Ale... długość zygzakowatych wędrówek jest zawsze taka sama i równa podwojonej długości odcinka AB! Przekonanie, że *„zmniejszając pole powierzchni zawartej między dwiema liniami łączącymi punkty A i B sprawiamy, że długości tych linii zbliżają się do siebie”* okazało się naiwnością.

Przyczyną kłopotów jest posługiwanie się intuicyjnie prostym, ale nieprecyzyjnym pojęciami „aproksymującego ciągu liczbowego” i „wielkości granicznej” z nim związanej. To trzeba poprawić.

Trudno uwierzyć, ale na matematyczne definicje trzeba było czekać aż do XIX wieku. Sformułował je Cauchy, który za własność definiującą liczbowy ciąg aproksymujący $(a_n : n \in N)$ uznał to, że wyrazy takiego ciągu są „od pewnego miejsca blisko siebie” - niezależnie od tego, jak rygorystycznie rozumiemy „bliskość”[25].

> To opis geometryczny, intuicyjny. Analitycznie ten warunek formułujemy tak: dla dowolnej liczby m można wskazać numer n_m taki, że bezwzględna różnica - liczba $|a_i - a_j|$ - jest mniejsza od $\frac{1}{2^m}$ jeśli tylko $i, j > n_m$.
> Precyzyjnie, ale czy nadal intuicyjnie prosto?

Ciągi spełniające ten warunek nazywamy *ciągami Cauchy'ego. Wielkość graniczna* związana z takim ciągiem (a_n) to taka liczba a, że „prawie wszystkie” wyrazy tego ciągu są jej bliskie - ponownie niezależnie od tego jak określimy „bliskość”. Analitycznie:

dla dowolnej liczby m można wskazać numer k_m taki, że $|a_s - a| < \frac{1}{2^m}$ jeśli tylko $s \geqslant k_m$.

mieści się w przedziale $3\frac{10}{70}, 3\frac{1}{71}$.

[25]Gwoli ścisłości: pierwszeństwo należało by przypisać B. Bolzano. Jednak jego praca opublikowana w 1816 roku „pozostała niezauważona” jak napisano w wikipedii. Cauchy przedstawił swoją definicję w 1821 roku.

Tak definiowaną liczbę - wielkość graniczną nazywamy *granicą ciągu.*

Czy każdy ciąg Cauchy'ego wyznacza wielkość graniczną, czy aproksymuje pewną liczbę? Gdy myślimy o liczbach wymiernych to odpowiedź brzmi „nie". Ale gdy mówimy o dedekindowskich liczbach rzeczywistych to odpowiedź brzmi „tak" - w tym zbiorze każdy ciąg Cauchy'ego ma granicę[26].

Uznanie wielkości granicznych rozwiązało też problem „nieskończonych sum": suma CIĄGU liczb rzeczywistych (a_n) to granica ciągu sum $a_1 + \cdots + a_n$ - o ile jest to ciąg Cauchy'ego[27].

Wróćmy do liczby π. Można wierzyć, że okrąg ma długość, a liczba π wyraża stosunek między jego długością i średnicą i uznać, że to definicja pierwotna, geometryczna. Jeśli tak (i jeśli uznamy, że π jest liczbą rzeczywistą(!)) to „aproksymacja wielokątami" niesie jedynie dodatkową informację o tej liczbie. Ale można też przyjąć, że liczba π jest DEFINIOWANA jako granica zbudowanego w ten sposób ciągu Cauchy'ego. Akceptacja metafory geometryczno-liczbowej sprawia, że mało kto rozważa ten dylemat... .

> Prosta rzeczywista to ockhamowskie domknięcie prostej wymiernej ze względu na konstrukcje granic ciągów aproksymujących (ciągów Cauchy'ego).
> Teoriomnogościowe continuum to w pewnym sensie ukoronowanie programu arytmetyzacji matematyki - stworzenia hierarchii struktur liczbowych, której podstawą są liczby naturalne. Kolejne, bogatsze systemy są konstruowane z tych prostszych. Liczby rzeczywiste są „konstruowalne", jeśli tylko zaakceptujemy nową jakość - konstruktory, które tworząc nowe wielkości korzystają z nieskończonego zbioru elementów.
> Kto wie, może to właśnie przydatność konstrukcji wielkości granicznych była koronnym argumentem na rzecz uznania (afirmacji) nieskończoności aktualnej w matematyce Cantora i Hilberta?

Jest jeszcze coś, co jakościowo różni liczby rzeczywiste od naturalnych, całkowitych i wymiernych: tylko niektóre liczby rzeczywiste mają unikatowe nazwy - π , $\sqrt{2}$ czy 121. Ale nie wszystkie. Więcej: nie mogą ich mieć (bo jest ich nieprzeliczalnie wiele). Nie są nazwami. Czym więc są?

Funkcje ciągłe

Ciągłe są nie tylko przestrzeń i czas. Ciągłe są też procesy. Matematyka opisuje je - w najprostszym przypadku - za pomocą *funkcji ciągłych* tworzących podklasę wszystkich funkcji, których argumenty i wartości są liczbami rzeczywistymi.

„Funkcja ciągła charakteryzuje się tym, że małym zmianom jej argumentu odpowiadają małe zmiany wartości funkcji" .

Ta intuicyjna i geometryczna charakteryzacja ciągłości funkcji długo i skutecznie opierała się matematycznej formalizacji. Np. Leibniz do opisu ciągłości używał *wielkości nieskończenie małych*, które jednak dla wielu były „ciałem obcym" w matematyce. Cantor nazywał je *„bakcylami cholery, które zainfekowały matematykę" [6]*[28].

Akceptacja konstrukcji granicznych pozwoliła rozwiązać i ten problem. Wystarczyło do tego (niebanalne) pojęcie - *„granicy funkcji f w punkcie a":*

liczba b jest granicą funkcji f w punkcie a jeżeli dla dowolnego ciągu (a_n) zbieżnego do a ciąg wartości $(f(a_n))$ zbiega do b[29].

Piszemy wtedy $b = \lim_{x\to a} f(x)$. A *ciągłość funkcji rzeczywistej* rozumiemy tak:
funkcja $f\colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ jest ciągła, jeśli dla każdej liczby rzeczywistej a:

[26] I jest ona wyznaczona jednoznacznie. Sądzę, że polskie słowo „granica" niezbyt przystaje do matematycznej treści jaką z nim wiążemy. To słowo jest kojarzone z linią, której PRZEKROCZENIE jest szczególnym krokiem - np. z granicą państwa. Odpowiada to bardziej angielskim słowom *border* lub *frontier*. Matematyczny sens tego terminu nie w tym, że „przekraczamy granice" ale w tym, że granica to wielkość, do której można zbliżyć się dowolnie blisko a której nie można osiągnąć. Anglicy mają łatwiej: słowa *limit* i *border* nie są synonimami.

[27] Sumujemy elementy *ciągu* a nie *zbioru*. „Suma nieskończonego zbioru liczb" nie jest pojęciem matematycznym.

[28] Nieskończenie małe - wielkości, które otaczają każdą liczbę rzeczywistą odgrywały kluczową rolę nie tylko w analizie matematycznej Leibniza, ale również w jego koncepcjach filozoficznych (tzw. monady Leibniza)[6]. W internecie dostępna jest książka J.L.Bella *„The Continuous and the Infinitesimal in Mathematics and Philosophy"*.

[29] Podkreślmy: tak ma być dla DOWOLNEGO ciągu (a_n) zbieżnego do a! Może on zbiegać z „lewej" lub „prawej" strony, może też naprzemiennie. I m.in. dlatego funkcja może nie mieć granicy w pewnych punktach. Np. funkcja przyporządkowująca rzeczywistym liczbom dodatnim wartość 1 a pozostałym 0, nie ma granicy w punkcie 0.

$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ [30].

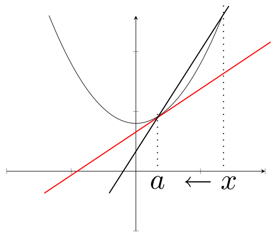
Skoro każda liczba rzeczywista jest granicą pewnego ciągu liczb wymiernych, to każda rzeczywista funkcja ciągła jest jednoznacznie wyznaczona przez to, jak działa na liczbach wymiernych.

Różniczkowanie

Różniczkowanie i całkowanie to działania matematyków, które zdrowa część społeczeństwa traktuje z respektem, ale właściwie na równi z czarną magią.

A przecież wystarczy zacząć od „geometrycznego" spojrzenia na problem. Wykres ciągłej funkcji rzeczywistej to krzywa na płaszczyźnie. Dowolne dwie liczby rzeczywiste $a, x \in \mathcal{R}$ wyznaczają dwa punkty na wykresie: $(a, f(a))$ i $(x, f(x))$. Prosta, która przechodzi przez te punkty to *sieczna*. Teraz wyobraźmy sobie, że przesuwamy punkt x zbliżając go do punktu a. Towarzyszy temu przesuwanie punktu $(x, f(x))$ po wykresie w kierunku punktu $(a, f(a))$. Blisko, coraz bliżej. Im bliżej, tym bardziej sieczna jest bliska *stycznej* do wykresu f w punkcie $(a, f(a))$.

Styczna to wielkość graniczna.



Ta opowieść nie grzeszy precyzją. Ale przecież nie tego oczekujemy od geometrycznych intuicji. Precyzyjny ma być opis analityczny.

Iloraz różnicowy to ułamek postaci $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. To miara kąta nachylenia prostej przecinającej wykres funkcji f w punktach $(a, f(a))$ i $(x, f(x))$[31]. Ponieważ „a" jest ustaloną liczbą, możemy patrzeć na ten ułamek jak na wzór analityczny opisujący funkcję (zmiennej x). Granicę tej funkcji - jeśli istnieje - nazywamy *pochodną* funkcji f w punkcie a:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Liczba $f'(a)$ to miara nachylenia prostej *stycznej* do wykresu funkcji f w punkcie $(a, f(a))$[32].

Zdefiniowana analitycznie pochodna żyje własnym życiem. W oparciu o to pojęcie zbudowano język umożliwiający precyzyjną analizę przebiegu (ciągłych) funkcji rzeczywistych - orzekania, gdzie - dla jakich punktów prostej rzeczywistej - taka funkcja rośnie (maleje) i jak szybko to się dzieje, gdzie ma lokalne ekstrema (maxima i minima), jak się zachowuje, gdy jej argument „zmierza do plus (minus) nieskończoności". Możliwa stała się klasyfikacja funkcji ciągłych ze względu na ich (geometrycznie trudno wyrażalną) gładkość[33].

Język korzystający bez ograniczeń z konstrukcji granicznych okazał się niezwykle skuteczny. Popatrzmy, czego się dowiemy, gdy użyjemy go do badania liczby „e" - *stałej Eulera*.

Ta liczba jest definiowana jako granica ciągu liczb wymiernych postaci $((1 + \frac{1}{n})^n : n \in N)$. Euler udowodnił, że nie jest to liczba wymierna[34]. Jej „istnienie" jest wyłącznie konsekwencją przyjętej definicji liczb rzeczywistych.

Takich samych argumentów trzeba użyć by uzasadnić istnienie potęg liczby e o wykładniku rzeczywistym. Jeśli a jest liczbą naturalną, całkowitą lub wymierną, to definicja „potęgi e o wykładniku

[30] Prościej: dla dowolnej liczby a i ciągu liczb rzeczywistych (a_n) zbieżnego do a, ciąg wartości $f(a_n)$ zbiega do granicy, którą jest liczba $f(a)$" - $f(\lim a_n) = \lim f(a_n)$.

[31] Tangens kąta między a prostą i prostą poziomą.

[32] Granica funkcji nie musi istnieć $\leftrightarrow$ może się zdarzyć, że styczna do wykresu nie istnieje. Wystarczy narysować wykres funkcji przyporządkowującej liczbie jej wartość bezwzględną i zapytać o styczną do wykresu w punkcie $(0, 0)$.

[33] Jeśli funkcja f ma pochodną w każdym punkcie - tzn. przyporządkowanie $x \to f'(x)$ jest funkcją - to można rozważać istnienie „pochodnej funkcji f' w punkcie a" nazywając ją drugą pochodną funkcji f w tym punkcie. I tak dalej... .W *klasie gładkości* C_k są funkcje, które mają pochodne rzędu $\leqslant k$ w każdym punkcie. W klasie C_∞ znajdują się *funkcje gładkie* - takie, które mają pochodne wszystkich rzędów.

[34] Wymiernym przybliżeniem e jest np. liczba $2,7182818$.

a" nie budzi wątpliwości (?). Ale zdefiniowanie i uzasadnienie istnienia potęg liczby e o wykładniku rzeczywistym i niewymiernym WYMAGA ZAŁOŻENIA, że przyporządkowanie $a \rightsquigarrow e^a$ jest funkcją ciągłą. Wówczas liczbę e^a DEFINIUJEMY jako granicę ciągu liczb (e^{a_n}), gdzie (a_n) to ciąg liczb wymiernych aproksymujący a.
Funkcja wykładnicza $exp(x) = e^x$ jest gładka. Można więc - dla dowolnej liczby naturalnej m - rozważać wielomian postaci

$$s^m(x) = \frac{exp(0)}{0!}x^0 + \frac{exp^{(1)}(0)}{1!}x^1 + \cdots + \frac{exp^{(m)}(0)}{m!}x^m$$

gdzie $exp^{(k)}$ to k-ta pochodna funkcji exp. Te wielomiany aproksymują funkcję exp punktowo - $e^a = \lim_{m\to\infty} s^m(a)$ dla każdej liczby a.

Co zadziwiające, wszystkie pochodne funkcji exp są jej równe, $exp = exp^{(k)}$! W szczególności $exp^{(k)}(0) = e^0 = 1$. Stąd

$$e = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!})$$

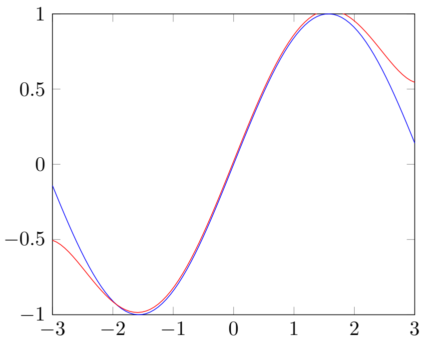
Liczba e jest też podstawą *logarytmu naturalnego*. Dlaczego naturalnego? Może dlatego, że styczna do wykresu funkcji logarytmicznej o tej podstawie w punkcie $(1,0)$ ma współczynnik kierunkowy równy 1 [35].

> Magia. Ciągi, granice, inspiracje geometryczne, pochodne, silnia, logarytmy... . Wszystko tu jest. Dla platoników wyniki tego rodzaju są nobilitujące: oto my władamy językiem pozwalającym na odkrywanie zależności między „realnie istniejącymi obiektami matematycznymi" których w żaden sposób nie mogą dostrzec zwykli śmiertelnicy... .

4.0.3 Trochę zaskakujące twierdzenie Weierstrassa

Każda funkcja rzeczywista $f\colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, której działanie polega wykonaniu skończonej liczby dodawań i mnożeń liczb rzeczywistych jest ciągła. Takie funkcje to *funkcje wielomianiowe*[36]. Oczywiście, są też rzeczywiste funkcje ciągłe, które nie są wielomianowe - np., *sinus, cosinus.*
Weierstrass[37] udowodnił, że

„każda rzeczywista funkcja ciągła na przedziale $[a,b]$ *może być przybliżona dowolnie dokładnie przez funkcję wielomianową o współczynnikach wymiernych"*



Na powyższym diagramie funkcję *sinus* (linia niebieska) aproksymuje funkcja wielomianowa $p(x) = x - x^3/6 + x^5/120 + 2/100$ (linia czerwona). Widać, że ta aproksymacja jest świetna dla argumentów z przedziału $[-2,2]$. W przedziale $[3,-3]$ jest już gorzej... . Praktyczne znaczenie tego twierdzenia jest oczywiste: obliczenie wartości $sin(1)$ to niebanalne zadanie. A wartość $p(1)$ obliczy każdy... .

[35] Inaczej: $(ln)'(1) = 1$

[36] Nieco dokładniej: rzeczywiste *funkcje wielomianowe* to te, które można opisujemy wzorami postaci $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0$ to liczby rzeczywiste.

[37] Karl Weierstrass (1815-1892), jeden z twórców podstaw współczesnej analizy matematycznej.

> Precyzyjne zdefiniowanie ciągłości to wielki sukces matematyki przełomu XIX i XX wieku. Dla matematyków akceptujących lebnizowski paradygmat „natura nie skacze”, dedekindowskie contiunnum liczb rzeczywistych i rzeczywiste funkcje ciągłe stały się uniwersalnym narzędziem umożliwiającym modelowanie wszelkich rzeczywistych zjawisk.
> Tymczasem przytoczone twierdzenie Weierstrassa mówi, że jeśli tylko zgodzimy się na modelowanie rzeczywistości „w pewnym przybliżeniu”, to w istocie niedaleko odchodzimy od matematyki sprzed dwóch tysięcy lat, której siła obliczeniowa ograniczała się do dodawania i mnożenia liczb naturalnych.
> Zgodność między tym, od czego zaczęła się matematyka i tym, co osiągnęła po dwóch tysiącach lat zdumiewa i zastanawnia. Ale też prowokuje do pytania: czy matematyka, w której obliczenie to wielokrotne dodawanie i mnożenie a postrzeganie świata jest ciągłe, to jedyna mozliwa matematyka?[38]

4.0.4 Liczby zespolone

Liczby naturalne, całkowite, wymierne i rzeczywiste. Uzupełnimy ten opis rozwoju pojęcia liczby krótką notką o liczbach zespolonych.

Równanie $x^2 = a$ ma rozwiązanie w świecie liczb rzeczywistych tylko wtedy, gdy $a \geqslant 0$. Czy można zbudować większą strukturę liczbową w której takie równanie ma rozwiązanie bez względu na wartość parametru a? Ten problem udało się rozwiązać zadziwiająco prosto: wystarczyło „uznać istnienie” rozwiązania równania $x^2 = -1$, oznaczyć „to coś” przez i , ale mimo wszystko uznać za liczbę, i nazwać ją - chroniąc resztki zdrowego rozsądku - *liczbą urojoną*[39]

> Najpierw „liczby absurdalne” teraz „liczby urojone”... . To pokazuje, jakie trudności trzeba było przezwyciężyć rozszerzając pojęcie liczby.

To był wstęp do zdefiniowania wielce enigmatycznej struktury *liczb zespolonych* - najmniejszej struktury zawierającej strukturę liczb rzeczywistych, w której można dodawać i mnożyć i w której każdy wielomian ma pierwiastek[40] .

Trzy wieki później irlandzki matematyk Hamilton opisał liczby zespolone jako pary liczb rzeczywistych. Wówczas liczba urojona „i” to para $(0, 1)$. Dodawanie i mnożenie zdefiniowano tak:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \text{ i } (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Liczby rzeczywiste są teraz reprezentowane przez pary postaci $(a, 0)$, a zdefiniowane działania są rozszerzeniami dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych.
Stąd $(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot i$ i inna, klasyczna konwencja notacyjna: zamiast (a, b) piszemy $a + bi$.

Dzięki Kartezjuszowi wiemy, że pary liczb rzeczywistych można utożsamiać z punktami płaszcvzxyzny euklidesowej[41]. Dlatego ta hamiltomowska definicja pozwala utożsamiać liczby zespolone z punktami płaszczyzny wyposażonej w układ współrzędnych[42]. Pozwala też związać z każdą liczbą zespoloną dwie „wielkości geometryczne” - *moduł* i *argument*:

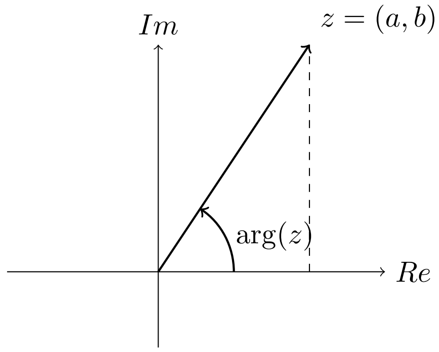
[38]Aborygeńskie plemię Kuuk Thaayorre posługuje się językiem pozbawionym określen „lewy”, „prawy”, „przód”, „tył”. *„To tak, jakby obok znanej nam matematyki istniała jakas inna – bez liczb i dodawania. (...) „Nie jest to tylko ciekawostka – to inna filozofia życia.”*- napisał w jednym ze swych felietonów Z.Hołdys (bez watpienia niematematyk) (Newsweek, 23.09.2018)). Może my jesteśmy potomkami plemion, które własnie dzięki wynalazieniu dodawania a potem mnożenia zapanowały nad tym swiatem?

[39]Tak tę liczbę nazwał Girolamo Cardano, który w połowie XVI wieku wprowadził to pojęcie do algebry. Nie tyle „wprowadził” co natknął (potknął) się na nie poszukując wzorów opisujących rozwiązania równania sześciennego $x^3 + mx = n$, gdzie $m, n \in \mathbf{N}$. [22].

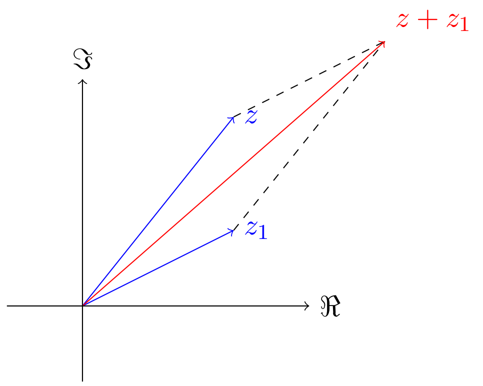
[40]Bardziej naukowo: każdy wielomian o współczynnikach zespolonych $p(x)$ można rozłożyć na czynniki liniowe: $p(x) = c(x - a_1) \dots (x - a_n)$

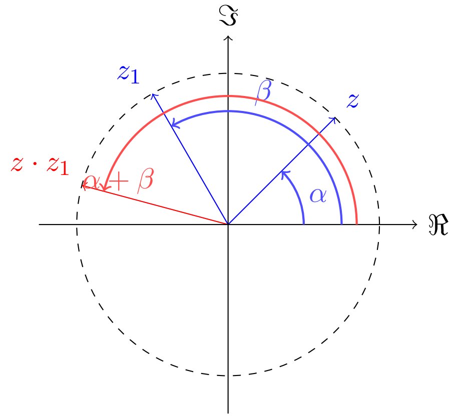
[41]Więcej o tym już za moment - str. 45.

[42]Algebraicy mówią czasem o *płaszczyźnie zespolonej* a osie układu współrzędnych nazywają odpowiednio *osią rzeczywistą* i *osię urojoną*.



Moduł liczby $z = (a, b)$ to długość odcinka łączącego początek układu z punktem (a, b) , $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. *Argument* tej liczby to miara kąta utworzonego przez ten odcinek i oś rzeczywistą. Łatwo sprawdzić, że $z = |z| \cdot (sin(arg(z)) + cos(arg(z)))$
Te wielkości można wykorzystać do geometrycznego opisu dodawania i mnożenia liczb zespolonych:





Dodawanie to konstrukcja odpowiedniego równoległoboku (rysunek pierwszy). Drugi rysunek ilustruje mnożenie liczb zespolonych o module równym 1 *- argument iloczynu to suma argumentów czynników a jego moduł jest również równy* 1*.*

Udowodnienie twierdzenia, że każdy wielomian o współczynnikach zespolonych ma pierwiastek wcale nie jest banalnym zadaniem. I zapewne dlatego, to twierdzenie nazywane jest „zasadniczym twierdzeniem algebry”.

> Struktura liczb zespolonych powstała w wyniku poszukiwania rozwiązania „czysto algebraicznego” problemu, ma zadzwiające związki z tworem geometrycznym - płaszczyzną euklidesową.
>
> To „matematyczny fakt”. A może coś więcej?

Czy liczby zespolone mają pozamatematyczny sens, czy interesują kogokolwiek poza matematykami?

Stawianie takiego pytania pokazuje, jak odległe od powszechnej świadomości ludzi są osiągnięcia współczesnej fizyki. Nie pretenduję do roli przewodnika po tym świecie i dlatego przywołam tylko jeden przykład: przestrzenią stanów (przestrzenią fazową) w mechanice kwantowej jest zespolona przestrzeń Hilberta (str. **??**).

Rozdział 5

Przestrzeń - matematycznie

„Przestrzeń stanowi aprioryczną FORMĘ UJMOWANIA ZJAWISK, *formę porządkującą napływ wrażeń zmysłowych.” I. Kant*

Konieczność wyjścia poza liczby wymierne to nie jedyny kłopot z jakim trzeba się zmierzyć, by objąć metodami obliczeniowymi geometrię Greków. Ból głowy narasta, gdy mamy odpowiedzieć - matematycznie - na pytanie *„co to jest przestrzeń?”* i *„czym jest ciągłość przestrzeni?”*

5.1 Przestrzeń - co to jest?

„Czas i przestrzeń nie są własnościami rzeczy, lecz właściwościami podmiotowego sposobu ujmowania zjawisk; są FORMAMI *naszej zmysłowości; są siecią, za pomocą której łowimy to, co postrzegamy. Poznać przedmiot to ująć go w czasie i przestrzeni”* - to znowu Kant[1].
„Każda rzecz jest niejako w przestrzeni możliwych stanów rzeczy. Przestrzeń mogę pomyśleć jako pustą, ale rzeczy bez przestrzeni nie. Przedmiot przestrzenny musi leżeć w nieskończonej przestrzeni” - Wittgenstein. I jeszcze jedno zdanie z *„Traktatu logiczno-filozoficznego”: „to, czego nie uda się ująć matematycznie, co nie ma formy przestrzenno-czasowej, jest poza doświadczeniem”*.

Współcześnie kognitywiści o przestrzeni mówią tak: *„Space does not consists of objects. Rather,* IT IS THE BACKGROUND SETTINGS *the objects are located in. Space exists independly of, and prior to, any object located in the space” [45].*

Ujmowanie zjawisk to funkcja mózgu który rejestruje bodźce, porównuje z wcześniejszymi, zapamiętuje. To proces permanentny i w części niezależny od naszej świadomości. Ale zdolność do rejestracji nie jest tożsama z umiejętnością analizy, ujawniania powiązań między zjawiskami. Do tego niezbędny jest adekwatny język[2]. Jego osnową jest *siatka pojęć* - zbiór strukturalnie powiązanych nazw wskazujących kluczowe elementy wybranej formy ujmowania zjawisk[3].

Kluczowe pojęcie klasycznego języka opisu przestrzeni to *punkt: „Punkt jest tym, co nie ma części lub nie ma żadnej wielkości”- Euklides.* Kognitywiści dodają: *„Punkty to lokalizacje w przestrzeni, na liniach lub płaszczyznach. Nie są obiektami, które mogą istnieć niezależnie od linii, płaszczyzny czy przestrzeni”[45].”*

[1] http://www.kul.pl/files/450/Kant.pdf

[2] W cytowanym wyżej internetowym wykładzie poświęconym filozofii Kanta znalazło się ładne zdanie: *„Podmiot w poznaniu jest aktywny – dokonuje syntezy tego, co dane. Podmiot konstytuuje świat swojego doświadczenia, ale* NIE W SENSIE JEGO ISTNIENIA, LECZ W SENSIE WPROWADZENIA ŁADU *w chaotyczną rapsodię wrażeń”*.

[3] Oto (niepełna) lista funkcjonujących w matematyce przestrzeni zamieszczona na stronie *http://mathworld. wolfram.com/Space.html* : *affine s. (space), Baire s., Banach s., Base s., Bergman s., Besov s, Borel s., Calabi-Yau s., Cellular s., Chu s., Drinfeld's Symmetric s., Eilenberg-Mac Lane s., Euclidean s., Fiber s., Finsler s., First-Countable s., Fréchet s., Function s., G-Space, Green s., Heisenberg s., Hilbert s., Inner Product s., L2-Space, Lens s., Liouville s., Locally Finite s., Loop s., Mapping s., Measure s., Metric s., Minkowski s., Müntz s., Normed s., Paracompact s., Planar s., Polish s., Probability s., Projective s, Riemann's Moduli s., Sample s., Standard s., State s., Stone s., Symplectic s.,* T_2*-s., Teichmüller s., Tensor s., Topological s., Topological Vector s., Total s., Vector s..*

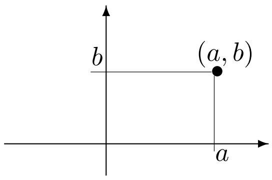
Jak to się stało, że abstrakcyjne pojęcie bezwymiarowego punktu zyskało akceptację starożytnych? Może dlatego, że wszyscy mamy nad głową ten sam podręcznik „geometrii przestrzeni" - bezkresne niebo z nieosiągalnymi (i tym samym abstrakcyjnymi, pozbawionymi fizyczności) gwiazdami-punktami. Te punkty łatwo - w wyobraźni - łączyć prostymi tworząc idealne figury geometryczne[4].

5.2 Od Kartezjusza do przestrzeni Hilberta

Według mnie wszystko się dzieje w przyrodzie na sposób matematyczny. *Kartezjusz*

„Przestrzeń to forma ujmowania zjawisk". Przestrzeń matematyczna to forma matematycznego ujmowania zjawisk. Przełomowe znaczenie dla rozwoju pojęcia przestrzeni matematycznej miał genialny pomysł Kartezjusza, który utożsamił punkty płaszczyzny euklidesowej z parami liczb rzeczywistych - współrzędnymi punktów w pewnym, ustalanym arbitralnie układzie współrzędnych.

Początek układu współrzędnych - punkt-parę $(0,0)$ - możemy utożsamiać z miejscem, w którym znajduje się „obserwator". W tym punkcie krzyżują się wzajemnie prostopadłe proste rzeczywiste - *osie układu współrzędnych*. Współrzędne dowolnego punktu wyznaczamy tak, jak na poniższym rysunku:



Metafora geometryczno-liczbowa osiąga tu wyższy poziom: „wszystko", co ważne i interesujące w geometrii płaszczyzny potrafimy definiować „po stronie liczbowej (algebraicznej)", czyli korzystając ze współrzędnych punktów:

- odległość (pitagorejska) między punktami $a = (a_1, a_2)$ *i* $b = (b_1, b_2)$ *to liczba* $d(a,b) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$,

- cosinus kąta między odcinkami łączącymi punkty (a,b) *i* (c_1, d_1) *oraz* (a,b) *i* (c_2, d_2) *obliczymy dzieląc liczbę* $(c_1 - a)(c_2 - a) + (d_1 - b)(d_2 - b)$ *przez iloczyn długości tych odcinków*[5],

- prosta przechodząca przez punkty (a,b) *i* (c,d) *to zbiór par liczb-rozwiązań równania (z dwiema niewiadomymi x,y)* $((x-a)(d-b) = (y-b)(c-a)$,

- okrąg o środku w punkcie (a,b) *i promieniu* r *to zbiór rozwiązań równania* $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Możliwość algebraicznego opisu obiektów geometrycznych zdumiała samego Kartezjusza: *„zdawało mu się w uniesieniu, że odkrył podstawy przedziwnej wiedzy"*[6].

Geometria budzi intuicję i uruchamia wyobraźnię. Liczby oferują mierzalność i precyzję. Niewiarygodne, ale twierdzenie, że prosta może mieć jeden lub dwa punkty wspólne z okręgiem budziło wątpliwości jeszcze w czasach Galileusza. Dziś, „po Kartezjuszu", wykaże to (prawie) każdy uczeń szkoły średniej... .

Wzbogacimy język geometrii płaszczyzny dodając do niego pojęcie *wektora* wraz ze stowarzyszonymi z nim terminami:
-*kierunek wektora*, (którym jest pewna prosta na płaszczyźnie),
-*norma (długość) wektora* (którą jest długość pewnego wyróżnionego odcinka prostej-kierunku),

[4] Dodajmy, że około stu lat przed Euklidesem, Demokryt stworzył teorię, w której materia składała się z niepodzielnych („punktowych") i zapewne bezwymiarowych, atomów... .

[5] Np. cosinus kąt między odcinkami łączącymi początek układu współrzędnych z punktami $(0,3)$ i $(3,1)$ to $\frac{2}{3\cdot\sqrt{10}}$. Docenisz tę analityczną metodę gdy narysujesz oba odcinki na płaszczyźnie z wyróżnionym układem współrzędnych i spróbujesz „obliczyć geometrycznie" - cokolwiek to oznacza - cosinus kąta między nimi.

[6] *J.Łukasiewicz, Dwaj filozofowie nowożytni: Kartezjusz i Kant, Filozofia Nauki, 1997, nr2 (18)*

-*zwrot wektora* (który określamy wskazując ten spośród dwóch końców wyrożnionego odcinka, który jest *początkiem* wektora)[7].

W kartezjuszowskim modelu płaszczyzny wektory reprezentowane są tak jak punkty - przez pary liczb. Aby uniknąć pomyłek, wektor o *składowych* $a, b \in \mathcal{R}$ oznaczamy przez $[a, b]$. Kierunek wektora $[a, b]$ to prosta przechodząca przez punkty $(0, 0)$ i (a, b) . Jego norma to długość odcinka łączącego te punkty (czyli liczba $\sqrt{a^2 + b^2}$). Zwrot wektora $[a, b]$ określamy przyjmując, że jego początkiem jest punkt $(0, 0)$[8].
Wektory dodajemy i mnożymy przez liczby:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d], \qquad , \qquad \alpha[a, b] = [\alpha a, \alpha b]$$

Przywołując ponownie metaforę geometryczno-liczbową powiemy, że „po stronie geometrycznej" wektorom odpowiadają przekształcenia płaszczyzny - przesunięcia wszystkich punktów „na określoną z góry odległość, w ustalonym kierunku i zwrocie". Wektory to specyfikacja takich prostoliniowych przesunięć : wektor $[a, b]$ opisuje przesunięcie

$$(c, d) \rightsquigarrow (c + a, d + b)$$

Te przekształcenia można składać - wykonywać jedno po drugim. Składanie jest reprezentowane przez dodawanie wektorów. Mnożenie przez liczbę to „przedłużanie" przesunięcia[9].

Tak uzupełniony kartezjański model płaszczyzny stał się prototypem *przestrzeni afinicznych*. Jeśli „zapomnimy" o punktach i skupimy uwagę na wektorach, to otrzymamy prototyp *przestrzeni wektorowej (liniowej)* .

> Co to znaczy „być prototypem"?
> *Matematycy nie badają przedmiotów, lecz stosunki między przedmiotami; z ich punktu widzenia dane przedmioty można zastąpić innymi, jeśli tylko nie zmieni to stosunków miedzy nimi" - H.Poincare [57].*
> Tworząc pojęcie przestrzeni wektorowej „na bazie" konkretu jakim jest $\mathcal{R}^2$, zapominamy, że wektory to pary liczb, a eksponujemy to, że można je dodawać i mnożyć przez liczby rzeczywiste. Definiując przestrzeń wektorową wskazujemy istotne - naszym zdaniem - własności tych działań. Dlatego
> *„rzeczywista przestrzeń wektorowa to zbiór V (którego elementy nazywamy wektorami) wraz z operacjami dodawania wektorów: $+ : V \times V \to V$ i mnożenia wektorów przez liczby rzeczywiste - $\cdot : \mathcal{R} \times V \to V$ które mają następujące własności"*
> - i tu następuje lista tych własności, którą łatwo znajdziemy np. w wikipedii.

„Tak samo" możemy opisać przestrzeń trójwymiarową - to niewątpliwa zaleta kartezjańskiego podejscia do geometrii. Ocywiście są różnice: układ współrzędnych to teraz trzy (parami prostopadłe) osie, a współrzędne punktu (składowe wektora) to trójki liczb. Co istotne, wzory opisujące odległość i miarę kątów, dodawanie i mnożenie wektórów przez liczbę, pozostają „takie same".
W tym trójwymiarowym modelu płaszczyzny opisują równania postaci $ax + by + cz = 0$ (gdzie $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, a sfery równania postaci $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$.

Skoro przejście od kartezjańskiego modelu dwuwymiarowej płaszczyzny do modelu trójwymiarowej przestrzeni jest łatwe, to dlaczego nie pomyśleć o przestrzeni cztero- pięcio- czy nawet n-wymiarowej? Model kartezjański nam to ułatwia: wystarczy powiedzieć, że punkty i wektory to nie pary (trójki) ale n-elementowe ciągi liczb... [10].
Oczywiście, jest tu przeszkoda mentalna: czy można wyobrazić sobie przestrzeń n-wymiarową? Wprawdzie niektórzy twierdzą, że „widzą" czterowymiarową czasoprzestrzeń, ale co np. z przestrzenią 15-wymiarową?

---

[7] Termin "wektor" pochodzi z łaciny, od słowa "vector", co oznacza "niosący" lub "przewoźnik".W matematyce i fizyce, słowo "wektor" pojawiło się pod koniec XIX wieku i odtąd jest używane do opisu wielkości określonych zarówno przez wartość (normę, długość) jak i kierunek oraz zwrot.

[8] Wektor $[0, 0]$ to *wektor zerowy*. Jako jedyny, nie ma ani kierunku ani zwrotu. Jego normą jest zero.

[9] Pomnożenie przez liczbę ujemną oznacza również zmianę „zwrotu" przesunięcia.

[10] Wymiar przestrzeni $\mathcal{R}^n$ to liczba n - to „intuicyjnie oczywiste". Ale to nie wystarcza - potrzeba ścisłej definicji wymiaru przestrzeni wektorowej: jest to najmniejsza liczba naturalna n taka, że można wskazać n-elementową *bazę* tej przestrzeni - zbiór wektorów $\{v_1, \ldots, v_n\}$ taki, że każdy wektor v można zapisać w postaci $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. A jeśli takiej liczby naturalnej nie ma, to mówimy, że przestrzeń ma wymiar nieskończony.

„Przestrzeni czterowymiarowej niesposób sobie wyobrazić. Mnie osobiście, często dostateczną trudność sprawia przedstawienie sobie przestrzeni trójwymiarowej" - S.Hawking [34]
Słowo „wyobrazić" oznacza „zbudować obraz" i jest ściśle związane z doznaniem zmysłowym. Matematyczna przestrzeń to abstrakcja. „Wyobrażanie sobie" takiej przestrzeni nie ma sensu. Trzeba uznać, że PIERWOTNY jest twór matematyczny - przestrzeń kartezjańska - a obecna w naszej wyobraźni geometryczna płaszczyzna czy też przestrzeń trójwymiarowa to pojęcia WTÓRNE.
Takie matematyczne rozumienie przestrzeni zawdzięczamy Kartezjuszowi.

Oswojenie z przestrzeniami wyższych wymiarów zawdzięczamy fizykom. Np. *przestrzeń fazowa* dla n cząstek ma wymiar równy $6n$ -po trzy współrzędne położenia i pędu dla każdej cząstki. *„(...) może niepokoić, że nawet dla pojedynczej cząstki jej przestrzeń fazowa ma wymiar dwa razy większy niż przestrzeń, do jakiej przywykliśmy.(...) Trudno sobie wyobrazić sześć wymiarów,* A NAWET GDYBYŚMY POTRAFILI, NIE PRZYNIOSŁOBY TO WIELKIEGO POŻYTKU." - *R. Penrose*[55].

Matematyka pozwala poznawać rzeczywistość niedostępną naszym zmysłom i ... wyobraźni[11].

Z wyobrażeniem płaszczyzny (przestrzeni) nieodłącznie związane jest pojęcie *odległości*. Kartezjański model opisuje odległość jako pojęcie matematyczne. Dlatego w modelu kartezjańskim możemy mówić o „wielkości granicznych" i „ciągłości". I tak np. *granica ciągu punktów płaszczyzny* (a_s) to taki punkt a, że dla dowolnej liczby naturalnej m odległość prawie wszystkich (czyli wszystkich poza skończoną ilością) punktów ciągu (a_s) jest mniejsza od $\frac{1}{2^m}$. W podobny sposób - wzorując się na definicji rzeczywistej funkcji ciągłej i zastępując gdzie trzeba wartość bezwzględną różnicy liczb przez odległość między punktami - zdefiniujemy ciągłości funkcji z $\mathcal{R}^2$ do $\mathcal{R}$ [12].

Dlaczego matematycy uważają, że można dodawać i mnożyć liczby rzeczywiste? Każdy punkt płaszczyzny jest granicą ciągu punktów o wymiernych współrzędnych. Wystarczyło PRZYJĄĆ, że te działania - jako funkcje rzeczywiste z $\mathcal{R}^2$ do $\mathcal{R}$ - są ciągłe. Wówczas suma liczb rzeczywistych a i b, tworzących punkt (a, b) aproksymowalny przez ciąg „wymiernych" punktów (a_n, b_n), to liczba-granica ciągu wymiernych sum $(a_n + b_n)$.
Podobnie z mnożeniem.

Kartezjański, analityczny opis metryki pitagorejskiej na płaszczyźnie można uogólnić i zdefiniować odległość w przestrzeni $\mathcal{R}^n$ [13]. Dlatego możemy mówić o wielkościach granicznych w przestrzeni $\mathcal{R}^n$ i ciągłości funkcji rzeczywistych z $\mathcal{R}^n$ do $\mathcal{R}$ [14].

Metryka pitagorejska to nie jedyny sposób mierzenia odległości na płaszczyźnie euklidesowej. Naszym przodkom zamieszkującym krainę pokrytą puszczą, którzy nadludzkim wysiłkiem wyrąbali sobie najkrótszą możliwą ścieżkę do rzeki, zapewne bardziej odpowiada taka „metryka rzeki":

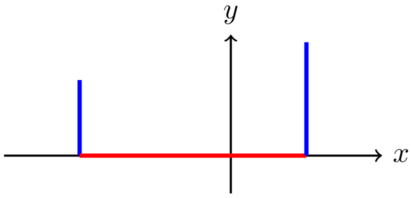
$$d(x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & gdy\ x_1 = x_2, \\ |y_1| + |x_2 - x_1| + |y_2| & w\ przeciwnym\ przypadku \end{cases}$$

[11] *Programowanie liniowe* to narzędzie optymalizacji procesów ekonomicznych. Matematyczny opis „zadania optymalizacyjnego" i służącego jego rozwiązaniu algorytmu sympleks sporządzamy korzystając z kartezjańskiej przestrzeni n-wymiarowej, gdzie liczba n to liczba *zmiennych decyzyjnych*, które mają wpływ na rozwiązanie zadania. Ale wyjaśnianie działania algorytmu sympleks zaczynamy od przypadku dwuwymiarowego, gdyż dwuwymiarowe zadanie i jego rozwiązanie można przedstawić jako problem geometryczny (który łatwo „narysować").
A *sympleks* to nic innego jak przeniesienie wyobrażalnego trójkąta w przestrzeń n-wymiarową.

[12] Taka „podmiana" stanie się bardziej uprawniona, jeśli uświadomimy sobie, iż pitagorejską odległością między liczbami rzeczywistymi a, b w przestrzeni jednowymiarowej (czyli na prostej rzeczywistej) jest wartość bezwzględna ich różnicy - liczba $|a - b|$.

[13] $d((b_1, \ldots, b_n), (a_1, \ldots, a_n)) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots (b_n - a_n)^2}$.

[14] Nie można zdefiniować „metryki pitagorejskiej" na zbiorze nieskończonych ciągów liczb rzeczywistych $\mathcal{R}^\infty$. Trzeba ograniczyć się do takich ciągów nieskończonych (a_i) dla których ciąg $(a_1^2 + \cdots + a_n^2 \colon n \in \mathbf{N})$ jest zbieżny.



Można się z tym zgodzić albo nie. Ale matematycy, dążący do tworzenia pojęć możliwie najbardziej ogólnych, zgodzili się nazwać *metryką na zbiorze* A każdą funkcję $dist\colon A \times A \to \mathcal{R}$ taką, że dla dowolnych elementów $a, b, c \in A$:

- $dist(a,b) \geqslant 0$, $dist(a,a) = 0$,
- $dist(a,b) = dist(b,a)$,
- $dist(a,c) \leqslant dist(a,b) + dist(b,c)$.

Para $(A, dist)$ to *przestrzeń metryczna*.

Ta definicja nie gubi tego, co najistotniejsze: w dowolnej przestrzeni metrycznej można mówić o zbieżności i granicy ciągów i o ciągłości funkcji między takimi przestrzeniami.

> Tak rozumiana przestrzeń metryczna może być baardzo odległa od kartezjańskiego pierwowzoru. Może to być np. *dyskretna* przestrzeń metryczna w której odległość między różnymi punktami jest zawsze równa 1[15]. Ale może to też być zbiór wszystkich rzeczywistych funkcji ciągłych określonych na odcinku $[a, b]$ z odległością rozumianą jako maksimum liczb postaci $|f(x) - g(x)|$ gdzie $x \in [a, b]$.
> Nadawanie wspólnej nazwy tak różnym obiektom to nie wada, ale ważna zaleta języka matematyki.
> *„Matematyka jest sztuką nadawania tej samej nazwy różnym rzeczom"* - *Poincare*.

Daleko idącym uogólnieniem przestrzeni metrycznych są *przestrzenie topologiczne*. Otrzymamy je zastąpując intuicyjnie akceptowalną odległość przez nieuchwytną „bliskość"[16]. Sposób, w jaki temu pojęciu nadano sens matematyczny jest naprawdę fenomenalny: bliskość w zbiorze X opisuje się wiążąc z każdym punktem $x \in X$ rodzinę jego *otwartych otoczeń* - podzbiorów X wybranych spośród wszystkich podzbiorów zawierających ten punkt[17]. Te rodziny to *topologia* przestrzeni.

Topologię w dowolnej przestrzeni metrycznej definiujemy przyjmując, że otoczeniami punktu a są wszelkie *otwarte koła* go zawierające - zbiory $K_r^a = \{b \in \mathcal{R}^2 \colon dist(a,b) < r\}$.
Powiemy, że:

- *punkt y jest bliżej punktu x niż punkt z, jeśli y należy do każdego otoczenia U punktu x w którym jest z*[18],
- *punkt x jest blisko podzbioru A, jeśli w każdym jego otoczeniu jest pewien punkt zbioru A.*

Choć zniknęła odległość zastąpiona przez bliskość, nadal można mówić zbieżności ciągów:

„Ciąg punktów (x_n) jest zbieżny do punktu x jeżeli w dowolnie wybranym otwartym otoczeniu x są prawie wszystkie punkty tego ciągu"

i o ciągłości funkcji: *funkcja $f\colon X \to Y$ między przestrzeniami jest ciągła, jeśli dla dowolnego punktu $y = f(x)$ i jego otoczenia V można wskazać otoczenie U punktu x takie, że $f(U) \subset V$* [19].

---

[15] W przestrzeni dyskretnej tylko ciągi (prawie wszędzie) stałe są zbieżne a każda funkcja między dyskretnymi przestrzeniami jest ciągła.

[16] O bliskości (nieprzypadkowo) wspomnieliśmy mówiąc o granicach ciągów.

[17] Rodzina otoczeń musi spełniać pewne warunki ale, jak zwykle, darujemy sobie ich wypisywanie.

[18] $z \in U \to y \in U$ dla dowolnego otoczenia punktu x,

[19] Nasza opowieść o przestrzeniach topologicznych i ciągłości nawiązuje do definicji zaproponowanej przez Hausdorffa, jednego ze współtwórców topologii. W podręcznikach akademickich dominuje inna, mniej intuicyjna, ale równoważna definicja: *przestrzeń topologiczna to zbiór X wraz z wyróżnioną rodziną $\mathcal{T}_X \subseteq 2^X$ podzbiorów otwartych taką, że:*
- dowolna suma i każdy skończony przekrój zbiorów otwartych są zbiorami otwartymi,
- zbiór pusty i cały zbiór X są otwarte.
Otwartym otoczeniem punktu x jest każdy podzbiór otwarty zawierający x.
Możemy teraz zdefiniować ciągłość funkcji nie wspominając o punktach: *funkcja $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągła, gdy przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego w Y jest zbiorem otwartym w X: $V \in \mathcal{T}_Y \rightsquigarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.*

Wtręt patriotyczny: konstrukcja liczb rzeczywistych za pomocą ciągów Cauchy'ego liczb wymiernych spowodowała (zapewne) wyróżnienie topologicznych *przestrzeni ośrodkowych* - takich, w których każdy punkt jest granicą ciągu punktów należących do wskazanego *a priori* przeliczalnego podzbioru.
Przestrzenie polskie to przestrzenie ośrodkowe, których topologię można opisać za pomocą pewnej metryki i to tak, że każdy ciąg Cauchy'ego (względem tej metryki) ma granicę. To jest próba zachowaniakonstruktywnego charakteru przestrzeni: gęsty podzbiór jest przeliczalny, więc, w wielu przypadkach,może być opisany rekurencyjnie. Abstrakcyjna „topologia" jest tu opisywalna za pomocą (intuicyjnie akceptowalnej) metryki. Kontrowersyjny konstruktor wielkości granicznych użyty jest tu tylko raz, jako ostatni element konstrukcji.

Przestrzeń matematyczna $\mathcal{R}^2$ jest jednocześnie przestrzenią wektorową i przestrzenią topologiczną. Te dwie struktury są powiązane: operacje algebraiczne na wektorach - dodawanie i mnożenie przez skalar - są ciągłymi odwzorowaniami (odpowiednio z $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ i z $\mathcal{R} \times \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$). Zbiór $\mathcal{R}^2$ odziedziczył też po swoim pierwowzorze - płaszczyźnie euklidesowej pewne elementy struktury geometrycznej - wektory mają długość i można mówić o odległości między wektorami i mierze kąta między dwoma (niezerowymi) wektorami. To oznacza, że język jakim się posługujemy korzystając z tej „formy ujmowania zjawisk" jest bogaty i różnorodny (czyli efektywny).
Te wszystkie składowe przestrzeni $\mathcal{R}^2$ można „zakodować" za pomocą pojedynczej funkcji $<,>: \mathcal{R}^2 \times \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ zwanej *iloczynem skalarnym*[20]. Iloczyn skalarny wektorów $[a,b]$ i $[c,d]$ to liczba

$$< [a,b],[c,d] >= ac + bd$$

Wówczas:

- *długość (norma) wektora* $[a,b]$ to liczba $\qquad ||[a,b]|| = \sqrt{< [a,b],[a,b.]}$
- *odległość* między wektorami $[a,b]$ i $[c,d]$ to długość ich różnicy - liczba $|[a-c,b-d]|$,
- *miara kąta (cosinus)* między wektorami $[a,b]$ i $[c,d]$ to ułamek

$$\frac{< [a,b],[c,d] >}{|[a,b]| \cdot |[c,d]|}$$

Złożona struktura przestrzeni $\mathcal{R}^2$ opisana jest za pomocą pojedynczej (i prostej) funkcji... .

Bogactwo i różnorodność języka przestrzeni $\mathcal{R}^2$ przy jednoczesnej prostocie i zwięzłości opisu iloczynu skalarnego „odpowiedzialnego" za tę złożoną strukturę zainspirowały zapewne Hilberta do sformułowania teoriomnogościowej definicję klasy przestrzeni zwanych dziś *(rzeczywistymi) przestrzeniami Hilberta*[21].
(...) w przypadku przestrzeni Hilberta bogactwo i subtelności są ze sobą zharmonizowane za pomocą wyrafinowanej wręcz prostoty: wyrafinowanie sprzyja bogactwu, prostota jest niemal synonimem subtelności" - M. Heller [35].

Rzeczywista przestrzeń Hilberta to dowolna rzeczywista przestrzeń wektorowa V wzbogacona o iloczyn skalarny - funkcję $<,>: V \times V \to \mathcal{R}$. Wymaga się, by ta funkcja spełniała warunki, pozwalające na określenie metryki (czyli topologii) w V tak, że algebraiczne operacje na wektorach tej przestrzeni są ciągłe oraz możliwe jest zdefiniowanie długości wektora i miary kąta między wektorami.
Te warunki są „tożsame" z tymi, jakie w sposób oczywisty spełnia iloczyn skalarny w $\mathcal{R}^2$. Pominiemy ich opis, bo nie wpłynie to na pogłębienie zrozumnienia istoty tej definicji. Bardziej pomoże nam informacja, że skończenie wymiarowe rzeczywiste przestrzenie Hilberta to, minimalnie tylko upraszczając, wyłącznie przestrzenie postaci $\mathcal{R}^n$, gdzie iloczyn skalarny jest opisany wzorem $< (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots y_n) >= x_1y_1 + \cdots x_ny_n$ [22].

[20]W klasycznej geometrii „przedkartezjańskiej" *iloczyn skalarny* dwóch wektorów to liczba, która jest iloczynem długości obu wektorów i cosinusa kąta między nimi

[21]Sugestia, że kartezjański model płaszczyzny był jedynym (głównym) źródłem inspiracji dla Hilberta, to oczywiście karygodne nadużycie... .

[22]Wymiar przestrzeni jest skończony, i równy n , gdy n jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że można wskazać n-

Istnieją rzeczywiste przestrzenie Hilberta nieskończonego wymiaru. Wbrew pozorom, są one nie tylko przedmiotem zainteresowania natchnionych matematyków, ale są również intensywnie wykorzystywane przez racjonalnych fizyków. Taką przestrzenią jest np. „przestrzeń funkcji rzeczywistych całkowalnych z kwadratem” (trochę sobie żartuję).

Zastępując liczby rzeczywiste przez liczby zespolone możemy zdefiniować *zespoloną przestrzeń wektorową* i *zespoloną przestrzeń Hilberta*. Tak jak w przypadku przestrzeni rzeczywistych, skończenie wymiarowe zespolone przestrzenie Hilberta to, minimalnie upraszczając, przestrzenie postaci C^n , gdzie C to zbiór liczb zespolonych. Istnieją też zespolone przestrzenie Hilberta nieskończonego wymiaru.

Co te wyrafinowane, „abstrakcyjne” przestrzenie matematyczne mają wspólnego z rzeczywistością? Ograniczę się do przytoczenia kilku stwierdzeń z książki M.Hellera [35] (lekturę tej niewielkiej książeczki polecam zainteresowanym):

„ Przestrzenią fazową (przestrzenią stanów) mechaniki kwantowej jest zespolona przestrzeń Hilberta”.

„Stan układu kwantowego w danej chwili jest reprezentowany przez kierunek w zespolonej przestrzeni Hilberta” „”Każda obserwabla jest reprezentowalna przez operator liniowy działający na zespolonej przestrzeni Hilberta”

O przestrzeni Minkowskiego subiektywnie

„Zgodnie z fizyką klasyczną i zdrowym rozsądkiem istnieje obiektywny świat zewnętrzny” [55]

Przestrzeń Minkowskiego to tajemniczy twór powiązany ze szczególną teorią względności. I zapewne dlatego budzi respekt maluczkich.

Dla matematyków przestrzeń kartezjańska i jej pochodne to przedmiot badań. Upraszczając, celem matematyków jest poznanie logicznych (dowodliwych) konsekwencji definicji takiej czy innej przestrzeni (matematycznej). Dla fizyków matematyka i jej konstrukcje to język służący do budowy modeli (fragmentów) rzeczywistosci. Twierdzenie matematyczne prawdziwe w takim modelu uznają za interesujace wtedy, gdy można je interpretować „w świecie rzeczywistym”. Kopernik, żyjacy przed Kartezjuszem, do opisu heliocentrycznego modelu układu planet użył jedynego wówczas dostępnego języka geometrii (sferycznej), opartej na aksjomatach i dowodach-konstrukcjach geometrycznych[23]. Isaac Newton, żyjący pół wieku po Kartezjuszu, uczynił jego analityczny model przestrzeni areną działań funkcji opisujących różnorodne zjawiska fizyczne. Wzbogacił kartezjański język opisu przestrzeni, budując podstawy rachunku rózniczkowego i całkowego[24]. Pisał:*„Nie definiuję czasu, przestrzeni, miejsca i ruchu jako wszystkim dobrze znanych. Muszę tylko zauważyć, że ludzie pojmują te wielkości w znaczeniu wynikającym z ich relacji z obiektami poznawanymi zmysłami. Stad mogą pojawić się pewne nieporozumienia, dla usunięcia których należy podzielić te pojęcia na bezwzględne i względne, realne i pozorne, matematyczne i potoczne.” [65].* To chyba pierwsza w historii tak zdecydowana deklaracja głosząca prymat modelowania matematycznego jako narzędzia poznania rzeczywistości.

Newtonowski model przestrzeni fizycznej to czterowymiarowa przestrzeń kartezjańska - *czasoprzestrzeń*. Dla Newtona, czas to realny byt (entitivity), niezależny od przestrzeni i materii, który płynie równomiernie w każdym punkcie przestrzeni, bez względu na to, co istnieje i jak się zmienia.

elementowy zbiór wektorów - *bazę przestrzeni* - $\{v_1, \ldots, v_n\}$ taki, że każdy wektor w można jednoznacznie przedstawić w postaci $w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. Wymiar przestrzeni wektorowej jest nieskończony, gdy nie można wskazać skończonej bazy tej przestrzeni.

[23]Zainteresowanym „stanem geometrii” (a właściwie trygonometrii, czyli „nauki o liniach w kole”) w czasach Kopernika, polecam dostępny w internecie artykuł G. Rosińskiej,*Przełom w trygonometrii połowy XV wieku, Kopernik jako spadkobierca i jako kontynuator tego przełomu.*

[24]Kopernik (1473-1543) *De revolutionibus* - 1543 , Kartezjusz (1596-1650) *Geometrie* - 1637, Newton (1643-1720)- *Principia mathematica* - 1687.

Czas to czwarty wymiar, niezależny od wymiarów przestrzennych[25].
Newton zapewne nie spodziewał się, że tak rozumianą niezależność czasu i przestrzeni można będzie zaliczyć do kategorii pojęc „względnych, pozornych i potocznych". Ale stało się: ten newtonowski paradygmat odrzucił Einstein formułujac szczególną teorię względności.

> *„Mamy wybór pomiędzy dopasowaniem opisu świata do naszej intuicji oraz dostosowaniem naszej intuicji do tego, czego dowiedzieliśmy się o świecie" [65].*

Formułując szczególną teorię względności Einstein przyjął założenie, że prędkość światła jest stała i największa z możliwych do osiągnięcia przez obiekt fizyczny. A potem dowiódł, że to wyklucza newtonowską uniwersalność czasu[26].

Trochę szczegółów (nie da się tego uniknąć). Aby opisać ruch, należy wskazać układ odniesienia - to oczywiste. Wybór takiego układu w czasoprzestrzeni fizycznej to wskazanie pewnego obiektu, względem którego określamy położenie oraz ruch innych obiektów i wybór momentu czasowego - „chwili 0". Matematycznie oznacza to wybór jednego z możliwych kartezjańskich opisów czasoprzestrzeni - wskazany obiekt i „chwila 0" to początek tego układu[27]. Kopernik sprawił, że trzeba było porzucić obowiązujący arystotelesowski paradygmat o istnieniu uniwersalnego, „jedynie słusznego" układu odniesienia. Dziś przyjmujemy założenie, że wszystkie takie układy są równouprawnione. Ponieważ ruch (a nie bezruch) jest naturą rzeczywistości, to zakładamy, że te układy znajdują się w ruchu (względem siebie).

Newtonowskie założenie o równomiernym upływie czasu w trójwymiarowej przestrzeni może być interpretowane jako stwierdzenie, że czas trwania zjawiska fizycznego jest taki sam dla różnych obserwatorów, niezależnie od ich ruchu. Tego się nie da obronić właśnie dlatego, że prędkość światła jest stała (i największa z możliwych). Einstein udowodnił, ze czasy przebiegu tego samego zjawiska rejestrowane przez różnych obserwatorów są powiązane taką oto zależnością:

$$(*) \qquad t_s = t_r \cdot \sqrt{(1 - v^2/c^2}$$

gdzie c to prędkosść światła w próżni i ponadto
t_s – czas trwania zjawiska zarejestrowany przez obserwatora spoczywajacego wzgledem zjawiska,
t_r – czas trwania tego samego zjawiska rejestrowany przez obserwatora poruszającego się (jednostajnie i prostoliniowo) z prędkością v względem obserwatora spoczywającego.

Łatwo zauważyć, że czas t_s jest zawsze krótszy od czasu t_r [28].

Zapiszmy tę równość nieco inaczej:

$$(**) \qquad (ts \cdot c)^2 = (t_r \cdot c)^2 - (t_r \cdot v)^2$$

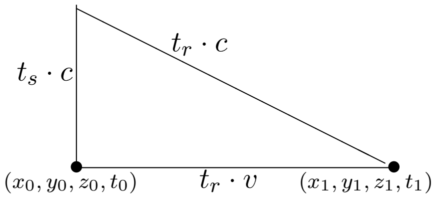
Tę „pitagorejską równość" możemy narysować:

[25] W czterowymiarowej czasoprzestrzeni Newtona mówimy o „odległości przestrzennej" między punktami (x, y, z, t) i (x_1, y_1, z_1, t_1) - liczbie $\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$ - i „odległości czasowej" - liczbie $|t - t_1|$. Nie rozważamy „odległosci pitagorejskiej" okreslonej wzorem $\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z - z_1)^2 + (t - t_1)^2}$. Czasoprzestrzeń Newtona nie jest czterowymiarową przestrzenią euklidesową. To raczej para przestrzeni- trójwymiarowej i jednowymiarowej.

[26] Szczególna teoria względności niegdy nie pretendowała do miana „jedynego słusznego opisu rzeczywistości" choćby dlatego, że w tym modelu świadomie pomija się grawitację.

[27] To mało precyzyjne i nieco naiwne. Ale nam wystarczy.

[28] Jeśli prędkość v jest stosunkowo mała, to tak opisana różnica jest niezauważalna. Np. dopiero dla $v = 0.5c$ każde dziesięć sekund wg t_s będzie, w przybliżeniu, równoważne 11 sekundom wg t_rg. Dylatacja czasu nie ma żadnego znaczenia dla naszej egzystencji, jeśli... nie korzystamy z systemu GPS: *„Gdyby dylatacji czasu nie uwzględniono konstruujac system GPS, błędy w obliczeniach pozycji mogłyby wynosić nawet do kilkunastu kilometrów" - tako rzecze Open AI.*



Skorzystaliśmy tu z kartezjańskiego opisu czasoprzestrzeni wprowadzając współrzędne punktów w sposób pozwalający wyeliminować z równości $(**)$ czas t_r i prędkość v:

$$t_r = t_1 - t_0 \quad , \quad t_r \cdot v = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}\ .$$

To pozwala nadać równości $(**)$ nową postać:

$$(t_s \cdot c)^2 = ((t_1 - t_0) \cdot c)^2 - (x_1 - x_0)^2 - (y_1 - y_0)^2 - (z_1 - z_0)^2$$

i zrozumieć definicję *czasoprzestrzeni Minkowskiego*: jest to czterowymiarowa przestrzeń kartezjańska $\mathcal{R}^4$ wraz z funkcją przyporządkowującą każdej parze punktów $(x_0, y_0, z_0, t_0), (x_1, y_1, z_1, t_1) \in \mathcal{R}^4$ liczbę rzeczywistą $\quad (t_1 - t_0) \cdot c)^2 - (x_1 - x_0)^2 - (y_1 - y_0)^2 - (z_1 - z_0)^2$.

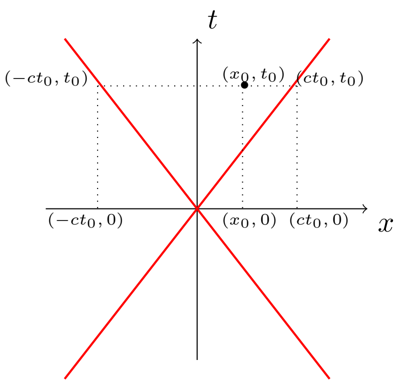
Ta różnica to *interwał czasowo-przestrzenny* wyznaczony przez wskazane punkty czasoprzestrzeni. Liczba

$$(***) \qquad \frac{\sqrt{(t_1-t_0)\cdot c)^2-(x_1-x_0)^2-(y_1-y_0)^2-(z_1-z_0)^2}}{c^2}$$

to czas t_s, którego interpretację opisaliśmy komentując einsteinowską równość $(*)$.

„Prawie” wszystko jasne. Dlaczego prawie? Ta interpretacja dotyczy sytuacji, gdy interwał czasowo-przestrzenny jest dodatni. Jeśli jest ujemny, to wyrażenie $(***)$ nie ma „sensu matematycznego”. Ale ma ... „sens fizyczny”[29].

Wyjaśnijmy to. Rozważmy przestrzeń jednowymiarową (czyli prostą). W tej przestrzeni współrzędną punktu jest pojedyncza liczba rzeczywista. Czasoprzestrzeń w tym przypadku jest dwuwymiarowa i można ją reprezentować (wyobrażać sobie) jako płaszczyznę kartezjańską:



Czerwone linie to *linie światła* - proste o równaniach $x = tc$, $-x = tc$. Obszar wokół pionowej osi czasu ograniczony przez te linie to tzw. *stożek świetlny*. Łatwo sprawdzić, że punkt czasoprzestrzeni (x_0, t_0) należy do tego stożka, gdy $|x_0| < |ct_0|$ (równoważnie: $c^2t_0^2 - x_0^2 > 0$)[30].

Można ten warunek sformułować bardziej zrozumiale: punkt (x_0, t_0) należy do stożka świetlnego, gdy odległość między punktami o współrzędnych x_0 i 0 na prostej rzeczywistej, można pokonać w czasie krótszym niż $|t_0|$, poruszając się z prędkością mniejszą od (największej możliwej) prędkości światła.

[29] To tłumaczy, dlaczego w definicji przestrzeni Minkowskiego unikano pierwiastkowania... .

[30] Jeżeli liczbę $c^2(t_1 - t_0)^2 - (x_1 - x_0)^2$ nazwiemy (nie bez racji) „interwałem czasowo-przestrzennym w dwuwymiarowej czasoprzestrzeni”, to warunkiem przynależności punktu (x_0, t_0) do stożka świetlnego jest dodatnia wartość interwału wyznaczona przez ten punkt i punkt $(0, 0)$.

Konstrukcję stożka świetlnego można powtórzyć w czasoprzestrzeni czterowymiarowej - opisują go „takie same" równania i nierówności[31]. Punkt czasoprzestrzni (x, y, x, t) należy do stożka świetlnego gdy odległość między punktami (x, y, z) i $(0, 0, 0)$ można pokonać w czasie krótszym niż t (oczywiście z prędkością mniejszą od prędkości światła) czyli wtedy, gdy wartość interwału czasowo-przestrzennego wyznaczonego przez te dwa punkty jest dodatnia[32].

Jeżeli przyjmiemy, że „tu i teraz" to punkt $(0, 0, 0, 0)$ czasoprzestrzeni Minkowskiego i umieścimy obserwatora (siebie) w tym punkcie, to możemy potraktować dolną część stożka świetlnego jako naszą przeszłość: tylko to, co zlokalizowane jest w tej części stożka mogło mieć na nas „fizyczny wpływ". Podobnie górna część stożka to nasza przyszłość. Punkt $(0, 0)$ to nasza teraźniejszość. Obszar poza stożkiem to - jak to ładnie ujął S.Hawking - „gdzie indziej": część czasoprzestrzeni, do której nie mamy bezpośredniego wglądu: na nic z tego obszaru nie mamy wpływu i nic z tego obszaru nie mogło wpłynąć na to, jacy jesteśmy teraz. Miejsce „tu i teraz" możemy - przynajmniej w teorii - wybrać w fizycznej czasoprzestrzeni zupełnie dowolnie i umieścić tam początek układu współrzędnych i związany z tym punktem stożek świetlny. Zatem każdy punkt czasoprzestrzeni ma swoją przeszłość i przyszłość, tylko częściowo wspólne z naszą przeszłością i przyszłością.

Ale co jest „gdzie indziej"?[33].

> Dlaczego tak trudno nam uznać, że czas nie jest uniwersalny, liniowy i nie płynie - we wszechświecie - jednakowo?
> Jedną z przyczyn jest... wynalazek i rozpowszechnienie zegarów mechanicznych. *„Gdy w XV w. pojawiły się pierwsze mechaniczne zegary (...) wszyscy zgodzili się z tym, że Wszechświat jest zegarem. Ale w gruncie rzeczy nawet wtedy zdawano sobie sprawę, że zegar to tylko* METAFORA *czasu(...)" - M.Heller, „Czy fizyka jest nauką humanistyczną"* . Opierając się tej metaforze interpretowanej *a rebous*, chętnie przypisujemy czasowi cechy należne jego pomiarowi przez zegary - że czas jest liniowy, że płynie równomiernie na całej kuli ziemskiej (czyli „wszędzie"). Nie podzielam przekonania, że świadomość, iż zegary to tylko metafora czasu, była (jest) powszechna. To raczej przywilej nielicznych.
> *„You got to deep-six your wristwatch, you got to try and understand The time it seems to capture is just the movement of its hands"*- to słowa jednego z utworów *Grateful Dead*, które w [65] przetłumaczono tak: *„wyrzuć (lepiej: wrzuć do grobu) swój zegarek i spróbuj zrozumieć: czas, który niby chwyta, to tylko ruch wskazówek"*.

Tyle o przestrzeni Minkowskiego. Oczywiście rozważania o czasoprzestrzeni na tym się nie kończą. Mamy przecież ogólną teorię względności, gdzie pojawia się pomijana w teorii szczególnej grawitacja i jej związek z czasem. Ale to obszar zarezerwowany dla fizyków. Dlatego pozwolę sobie zakonczyć tem podrozdział cytatem z „Krótkiej historii czasu" S.Hawkinga [34]:

„Przed 1915 rokiem przestrzeń i czas uważane były za niezmienną arenę wydarzeń, która w żaden sposób od tych zdarzeń nie zależała. (...) Ciała poruszają się (...) ale czas i przestrzeń tylko niezmiennie trwają.
Zupełnie inny pogląd na czas i przestrzeń zawiera ogólna teoria względności. Czas i przestrzeń są tu dynamicznymi wielkościami: poruszające się ciała i i oddziałujące siły wpływają na krzywiznę czasoprzestrzeni - a krzywizna czasoprzestrzeni wpływa na ruch i działanie sił. (...) Podobnie jak nie można mówić o wydarzeniach we Wszechświecie pomijając czas i przestrzeń, tak też bezsensowne jest rozważanie czasu i przestrzeni poza Wszechświatem."

5.3 O continuum nieco inaczej

„Ciągłość jest tylko techniką matematyczną służącą przybliżaniu bardzo drobnoziarnistych rzeczy." - [65]

[31] Otrzymane przez zastąpienie wartości bezwzględnej $|x|$ - odległości punktu x od 0 na prostej- przez pitegorejską miarę odległości punktu (x, y, z) od początku układu współrzędnych - liczbę $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

[32] Sugeruję jednak, by - mając na uwadze szczere wyznanie Hawkinga, nie próbować sobie „wyobrażać" ten stożek... . Zaufajmy matematyce.

[33] Zaintrygowanych odsyłam do licznych popularnonaukowych opracowań, np. do [34], [65]

Pięknie się ten puzzel ułożył... Genialne osiagnięcia Kartezjusza, Dedekinda, Cantora, Cauchy'ego, Weierstrassa i wielu innych stworzyły świetne podstawy rozwoju analizy matematycznej[34]. Stworzono język modelowania matematycznego, któremu w decydującej mierze zawdzięczamy oszałamiające osiagnięcia nauki XX wieku, (prawie) we wszystkich jej dziedzinach.

To jednak nie znaczy, że matematyczny spór o kontinuum został ostatecznie rozstrzygnięty. J.L. Bell w artykule *„Infinitesimals and the Continuum"* zebrał wypowiedzi matematycznych znakomitości dotyczących kontinuum. Warto je poznać. Choćby po to, by przestać wierzyć, że teoriomnogościowe rozstrzygnięcie tej kwestii jest jedynie słuszne:

Ch.E.Peirce (1839-1914): „Samo słowo ciągłość implikuje, że chwile czasu lub punkty linii są wszędzie ze sobą zespawane. Kontinuum nie składa się z niepodzielności, punktów lub chwil, i nie zawiera żadnych, chyba że zostanie przerwana jego ciągłość"
H.Poincaré (1854-1912): „Pomiędzy elementami kontinuum istnieje rodzaj intymnej więzi tworzącej całość, w której punkt nie jest wcześniejszy od linii, ale linia od punktu"
H.Weyl (1885-1955): „Punkty czasu - lub przestrzeni - nie są ostatecznymi, leżącymi u podstaw elementami czasu trwania - lub rozległości (extension) - danych nam przez doświadczenie. Prawdziwe kontinuum jest po prostu czymś połączonym samo w sobie i nie może być podzielone na oddzielne cząstki: to jest sprzeczne z jego naturą."
E.Brouwer (1881 - 1966)[35]*: „The linear continuum is not exhaustible by the interposition of new units and can therefore never be thought of as a mere collection of units".*
R.Thom (1923-2002)[36]*: „A true continuum has no points".*

Można uniknąć sporów przyjmując, że dedekindowskie kontinuum to byt matematyczny i dociekanie jego związków z „wyobrażeniem kontinuum" pozostawić filozofom. Tak zapewne myślał Poincare: *„Aby dowiedzieć się,* CO MATEMATYCY ROZUMIEJĄ PRZEZ CONTINUUM, *nie należy zwracać się do geometrii (...). Analitycy uwolnili matematykę od wszelkich obcych pierwiastków, mogą zatem odpowiedzieć na pytanie, czym jest w istocie continuum (...)? Continuum, (...) jest zbiorem elementów, uszeregowanych w pewnym porządku; jest ich wprawdzie nieskończenie wiele, ale poszczególne elementy są całkowicie rozdzielone.* NIE ODPOWIADA TO ZWYKŁEMU ROZUMIENIU CONTINUUM, *zgodnie z którym poszczególne elementy są połączone i tworzą całość, dzięki czemu nie punkt istnieje przed linią, lecz linia przed punktem." [57].*

To jednak myślenie nie tyle matematyczne, co teoriomnogościowe. Dlatego ponówmy pytanie: czy linia to zbiór punktów, czy też odrębny byt matematyczny? Pięknie - bo prosto - o tym fundamentalnym dylemacie napisał M. van Atten w artykule *„Brouwer as never read by Husserl" (Synthese 137, 3-19, 2003)*:

„Co bardziej przypomina linię: ziarna piasku ułożone jedno za drugim czy nić z topionego sera[37]*? Klasyczna matematyka optuje za ziarnami piasku, linia prosta jest myślana jako nieskończony zbiór odrębnych punktów. Ale już Arystoteles zauważył, że to nie do końca jest słuszne: punkty się nie łączą, więc gdzie tu jest ciągłość? Tymczasem ciągłość jest tym, co czyni linię linią.* JAK MY TO MODELUJEMY MATEMATYCZNIE*? Leibniz zaintrygowany tym pytaniem doszedł tak daleko, że w 1689 roku zadeklarował (cytat): „Są dwa labirynty ludzkiej myśli. Jeden to natura wolności a drugi to budowa continuum". (...) Oba mają to samo źródło - nieskończoność"*[38].

> W matematyce teoriomnogościowej „istnieć" oznacza „być zbiorem". Ockhamowski postulat wstrzemięźliwości w kreowaniu bytów podstawowych zrealizowano tu w sposób skrajny.
> Uparte poszukiwanie jednego jedynego pierwotnego pojęcia jako podstawy całej matematyki może być usprawiedliwione jedynie wiarą, że obcując z matematyką „dotykamy absolutu"... Obsesja? Religia?[39].

---

[34]Karl Weierstrass (1815-1897) - matematyk niemiecki, twórca obowiązującego do dziś tzw. *formalizmu* ϵ, δ.

[35]Luitzen E.J. Brouwer, matematyk holenderski. O jego koncepcji matematyki rozwijanej w opozycji do idei Cantora i Hilberta już za chwilę.

[36]Rene Thom, francuski matematyk laureat nagrody Fieldsa (matematycznego Nobla) w 1958 roku.

[37]W oryginale: *„string of melted cheese"*.

[38]Dodajmy jeszcze jedną wypowiedź Leibniza: *„a point may not be a constitutive part of a line."*

Dla oponentów Dedekinda i Cantora kontinuum to różny od zbioru byt matematyczny. Brouwer pisał: *„Uznawszy, że intuicja ciągłości (...) jest równie podstawowa jak intuicja kilku rzeczy pomyślanych jako tworzące razem jednostkę (...) jesteśmy w stanie określić właściwości kontinuum jako* „MATRYCĘ PUNKTÓW, KTÓRE NALEŻY TRAKTOWAĆ JAKO CAŁOŚĆ" [3],[44]. To bliższe poglądowi antycznych Greków - *„linia* NIE *jest zbiorem punktów"*[40].

Jak matematycznie opisać tę odmienną wizję continuum? Wyobraźmy sobie prostą rzeczywistą inaczej - jako wiązkę wszystkich otwartych odcinków o wymiernych końcach[41]. Ta wiązka jest splątana - jeden odcinek może zazębiać się z drugim, być w nim zawarty bądź mogą być one rozłączne. Te odcinki to *baza zbiorów otwartych*[42] pewnej metrycznej *przestrzeni topologicznej* posadowionej na zbiorze liczb rzeczywistych.

Matematyczne kontinuum to właśnie ta przestrzeń topologiczna.

Uważny czytelnik ma prawo czuć się zawiedziony: ten opis kontinuum nie jest niczym nowym w stosunku do propozycji Dedekinda: przecież aby taki obiekt skonstruować, musimy mieć do dyspozycji cały zbiór liczb rzeczywistych! To jest co najwyżej uzupełnienie opisu kontinuum Dedekinda a nie nowa propozycja.

Trudno zaprzeczyć. Chyba, że zwrócimy się do *topologii... bezpunktowej*: [43].
Topologia bezpunktowa to kolejny stopień abstrakcji trudny (niemożliwy) do „pozamatematycznego" wyobrażenia i wyjaśnienia: *„(...) the main idea (of pointless topology - GJ) is to* REVERSE THE TRADITIONAL CONCEPTUAL ORDER OF DEFINITIONS *and define points as particular filters of neighborhoods rather then neighborhoods as particular set of points [67]"*. To „odwrócenie kierunku myślenia" o przestrzeni topologicznej zrealizowano wprowadzając pojęcie *przestrzeni bezpunktowej* lub *locale* [44].

> *„(...) we are going to regard the real numbers as locale rather then a space. The basic idea (...) is that, assuming the set of rationals as given, we wish to make the set of open intervals with rational endpoints into a site for open-set locale of $\mathcal{R}$" [36] str. 123.*

Aby zrealizować ideę „odwrotnego kierunku myślenia" i zbudować bezpunktowe continuum - *locale of real numbers* - należy uwolnić opis wiązki odcinków otwartych od odwołań do dedekindowskich liczb rzeczywistych - zapomnieć, że odcinki to zbiory. Zrobimy to zastępując każdy odcinek (a, b) przez wyznaczającą jego końce parę liczb wymiernych (a, b). Elementy poszukiwanego *locale* to pewne podzbiory takich par. Wydaje się, że to proste: każdy zbiór otwarty $U \subseteq \mathcal{R}$ wyznacza zbiór par $U_\sim = \{(a, b) \colon (a, b) \subseteq U\}$ [45]. Podzbiory $U_\sim$ tworzą poszukiwane *locale*. Ale to błąd: te podzbiory trzeba zdefiniować BEZ odwołań do otwartych podzbiorów liczb rzeczywistych, bo prze-

[39] Tę skrajną oszczędność w wyborze pojęć podstawowych projektowanej uniwersalnej teorii Chaitin tłumaczy tak: *„(...) w systemie filozoficznym Spinozy świat zbudowany jest tylko z jednej substancji, a tą substancją jest Bóg, to wszystko, co istnieje. Teoria mnogości Zermelo-Fraenkla jest podobna. Wszystko jest zbiorem i wszystko jest zbudowane z pustego zbioru. To wszystko, co istnieje"[14]*
Benedykt Spinoza (1632-1677) - filozof niderlandzki, twórca systemu filozoficznego, który zakładał, że *„istnieje tylko jedna substancja stanowiącą podstawowy budulec wszechświata. Substancja ta musi istnieć sama przez się i musi być pierwotna w stosunku do wszelkich swoich atrybutów. Musi być nieskończona, istnieć samoistnie (nie być stworzona) i być przyczyną istnienia wszystkich innych bytów – czyli musi być wszechmocna. Nie może to być zatem nic poza Bogiem." (wikipedia).*

[40] Korzystając z kartezjańskiej fuzji geometrii i algebry możemy tę ideę próbować przybliżyć tak: traktujmy równanie $ax + by + c = 0$ jako *opis, specyfikację* prostej. Każde (konstruktywne) rozwiązanie tego równania to punkt - para liczb. Prosta (jej równanie) istnieje niezależnie od zbioru rozwiązań tego równania.

[41] Odcinek otwarty, to odcinek bez końców, np. $(0, 1) = \{x \in R : 0 < x < 1\}$.

[42] Każdy inny zbiór otwarty jest sumą pewnych zbiorów bazowych.

[43] Bezpunktowa topologia powstała w latach osiemdziesiątych XX wieku, choć niektórzy upatrują jej początków już 30 lat wcześniej, w pracach Ehresmanna [36]. Być może jest to realizacja wizji Poincare który o klasycznej topologii pisał tak: *„Point set topology is a disease (choroba, przypadłość) from which the human race will soon recover"* . Przestrzeń bezpunktowea pojawi się ponownie w drugiej części tych notatek, gdy będzie mowa o *teorii toposów*.

[44] Nazwa *„locale"* nie ma, jak dotąd, powszechnie akceptowanego polskiego odpowiednika.

[45] W pierwszym przypadku (a, b) to para liczb a w drugim - odcinek otwarty!

cież dopiero staramy się je zdefiniować!
Poprzestańmy - na razie - na zapewnieniu, że to jest możliwe[46].

W tej strukturze NIE MA punktów-liczb rzeczywistych. Liczby muszą być skonstruowane i dopiero potem MOGĄ BYĆ osadzone w miejscach wskazanych przez filtry otoczeń: *„Weyl mówi, że punkt lub liczba rzeczywista w tym sensie jest tylko pomyślany lub poczęty (though or conceived)." [3]*[47]. To bezpunktowe continuum to tylko „matryca możliwych miejsc dla liczb rzeczywistych".

Jeśli pominąć kwestię, czy filtry to punkty-liczby, czy też jedynie wskazują możliwe lokalizacje liczb, to ostateczny efekt obu konstrukcji - Dedekinda i tej odwołującej się do topologii bezpunktowej - jest taki sam. O co więc kruszyć kopie?
Jako robotnicy matematyki mainstreamowej nie musimy wybierać. Można korzystać z obu opisów. Jak pokazuje współczesna fizyka, dwoistość w opisie nawet najbardziej fundamentalnych obiektów nie musi prowadzić do konfliktu[48]. Ale taki kompromis jest trudny, gdy mowa o podstawach matematyki. Te dwie propozycje obrazują różnicę między hilbertowską a brouwerowską (konstruktywną) wizją matematyki[49].

Dlaczego koncepcja kontinuum Dedekinda i Cantora dominuje we współczesnej matematyce? Dzięki odwołaniu do metafory geometryczno-liczbowej jest przyjazna. Nie można tego lekceważyć. Nauka nie rozwija się w próżni. Wpływu tradycji (przyzwyczajeń) doświadczył już Kopernik przeciwstawiając się ponadtysiącletniej tradycji ptolemeuszowskiej[50].
Po drugie, jej podstawowa warstwa pojęciowa jest genialnie prosta.
Po trzecie wreszcie, ta koncepcja to fundament analizy matematycznej, niezwykle skutecznego narzędzia modelowania świata.

Bezpunktowa koncepcja kontinuum nie może - jak dotąd - przeciwstawić tym argumentom własnych, świadczących na jej korzyść. Jest trudna, wymaga już na starcie akceptacji wielu złożonych pojęć. Jej konstruktywny charakter (do pewnego stopnia) nie wszystkim - platonikom, ortodoksyjnym wyznawcom teorii mnogości - wydaje się istotny.

Bezspornie, kontinuum winno być postrzegane jako przestrzeń topologiczna. Oto spektakularny argument: Cantor pokazał, że prosta rzeczywista $\mathcal{R}$ jest równoliczna z płaszczyzną reprezentowaną przez iloczyn kartezjański $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$. To oznacza, że z teoriomnogościowego punktu widzenia te dwa zbiory są takie same - nie można w języku teorii mnogości sformułować własności, która rozróżnia prostą i płaszczyznę (choć „każdy widzi", że są różne...). Rzeczywistość teoriomnogościowa rozminęła się z rzeczywistością geometryczną. To zapewne zaskoczyło Cantora i sprowokowało go do słynnego stwierdzenia *„widzę, ale nie wierzę"*.

A Brouwer dowiódł, że prosta i płaszczyzna, postrzegane jako przestrzenie topologiczne, wcale nie są takie same (nie są „homeomorficzne") - w języku topologii potrafimy te przestrzenie rozróżnić.

Przykład: topologia nieskończonego drzewa

Nasza opowieść o „bezpunktowym continuum" jest niejasna, mętna. Pewnie dlatego, że brak nam adekwatnego języka. Spróbujmy jednak spojrzeć na przykład który, mam nadzieję, ułatwi oswojenie się z myślą, że przestrzeń bezpunktowa ma sens - przynajmniej wtedy, gdy doceniamy wagę

[46] *Locale* pojawią się ponownie w drugiej części tych notatek.

[47] H.Weyl (1885-1955) - niemiecki matematyk, fizyk i filozof. Zwolennik konstruktywizmu matematycznego.

[48] Nawiązuję tu do *dualizmu korpuskularno-falowego*, którego odkrycie i zaakceptowanie przez fizyków umożliwiło powstanie fizyki kwantowej. Dualność opisu kontinuum jest też akceptowana poza matematyką: w Słowniku PWN znajdujemy takie oto objaśnienie, zręcznie godzące obie koncepcje: *kontinuum - ciągły, uporządkowany* ZBIÓR *nieskończonej liczby elementów przechodzących* PŁYNNIE *jeden w drugi.*

[49] Będziemy o tym mowa już w kolejnym rozdziale. Warto też wspomnieć o jeszcze jednym aspekcie tej dyskusji. Liczby rzeczywiste to też, „continuum czasowe". Logicy dyskutujący o modelowaniu czasu - *logice temporalnej* - rozróżniają dwa sposoby modelowania: *„instant-based model of time"* oraz *„interval-based model"*.

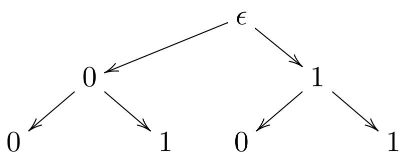
[50] A o zderzeniu Maxa Plancka z XIX-wieczną fizyką w [64] napisano tak: *„jego wyjaśnienie wydawało się bardziej zagmatwane niż problem, który miało wyjaśnić (chodzi o zjawisko promieniowania cieplnego, które M. Planck objaśnił wprowadzając „sztucznie" pewną stałą, zwaną dziś stałą Plancka - GJ). Teoria Plancka wydawała się śmieszna. Nikt się, co prawda, nie śmiał, bo Herr Professor był zbyt ważnym człowiekiem. Jego sugestie przeskoków kwantowych zostały po prostu zignorowane. (...)Sam Planck zgodził się z tymi obiekcjami i obiecał dalsze poszukiwania. Prawie niezauważona rewolucja kwantowa przeprosiła za swe nadejście."*

konstruktywnego spojrzenia na matematykę.
Rekurencyjną strukturę słów nad alfabetem A można wzbogacić dołączając do słów skończonych *słowa nieskończonej długości* - abstrakcyne „wielkości graniczne". Każde takie słowo jest aproksymowalne przez coraz to dłuższe początkowe skończone (pod)słowa. Każde słowo skończone można - na wiele sposobów - przedłużyć do słów nieskończonych. Tę intuicyjnie oczywistą relację między słowami skończonymi i nieskończonymi można ładnie opisać w języku przestrzeni topologicznych. Punktami tej przestrzeni są słowa nieskończone. Natomiast każde słowo skończone w wyznacza (bazowy) zbiór otwarty złożony z nieskończonych słów, które uzyskamy przedłużając słowo w „w nieskończoność". Zbiory otwarte to sumy takich zbiorów.

Taką przestrzeń topologiczną oznaczamy przez $\mathcal{SP}(A^*)$.

> W przestrzeni kartezjańskiej realne wydają nam się punkty a zbiory otwarte są „abstrakcją".
> W przestrzeni $\mathcal{SP}(A^*)$ jest odwrotnie: (bazowe) zbiory otwarte są KONKRETNE bo identyfkowane przez skończone słowa. Punkty tej przestrzeni są ABSTRAKCYJNE - ich „istnienie" wymaga akceptacji nieskończoności aktualnej.

Do stworzenia reprezentacji tej przestrzeni wykorzystmy ... *drzewo*. W matematyce *drzewo nieskończone* to graf[51] w wyróżnionym wierzchołkiem-*korzeniem*. Korzeń jest początkiem *gałęzi* - nieskończonych ciągów wierzchołków połączonych krawędziami. Każdy wierzchołek leży na pewnej gałęzi. Jeśli (a_i) i (b_j) są różnymi ciągami-gałęziami, i $a_k \neq b_k$ to $a_j \neq b_j$ dla wszelkich $j \geqslant i$[52].
Reprezentacją przestrzeni $\mathcal{SP}(A^*)$ jest drzewo nieskończone, w którym z każdego wierzchołka wychodzi dokładnie tyle krawędzi, ile jest liter w alfabecie A. Końce tych krawędzi etykietujemy różnymi literami. Etykietą korzenia jest słowo puste - ε. Np diagram:



przedstawia (maleńki) fragment nieskończonego drzewa - przestrzeni $\mathcal{SP}(\{0,1\})$.

Możemy narysować dowolnie duży, skończony fragment tego drzewa. Ale nigdy nie narysujemy żadnej nieskończonej gałęzi.

> To, co dostępne i konstruowalne - co potrafimy ilustrować rysunkiem - to skończony fragment struktury zbiorów otwartych przestrzeni $\mathcal{SP}(\{0,1\})$. Ale nigdy nie jest dostępny (konstruowalny, przedstawialny graficznie) jakikolwiek punkt tej przestrzeni.
> Czy to nie sygnał, że „odwrócenie kierunku myślenia" i związana z nim przestrzeń bezpunktowa mają sens?[53].

Pełne, nieskończone drzewo binarne jest ogromne. Ale czy rozumiemy co w tym przypadku oznacza to słowo?
Wiemy, że dowolny tekst można zapisać w pamięci komputera jako skończony ciąg zerojedynkowy. Jeśli tak to MUSIMY zgodzić się z twierdzeniem, że wszystko co człowiek stworzył lub stworzy - Biblia, sztuki Szekspira, te notatki a nawet to co powiesz jutro czy za rok - WSZYSTKO, dosłownie wszystko jest reprezentowane w tym drzewie jako początkowy, skończony fragment pewnej gałęzi binarnego drzewa nieskończonego... . Wszystko jest, trzeba tylko wskazać gdzie, na której gałęzi. Ale pomyśl: jak WSKAZAĆ jednoznacznie gałąź na której znajdziemy „Czarodziejską górę" T.Manna?

[51] *Graf (skierowany)* to zbiór *wierzchołków* wraz z *krawędziami* łączącymi niektóre pary wierzchołków

[52] Tak jak w przyrodzie: gałęzie drzewa moga mięć (skończony) wspólny początek, ale gdy się „rozejdą" to już nigdy się ponownie nie skleją.

[53] Nic się nie zmieni gdy alfabet binarny zastąpimy jakimkolwiek innym, nawet nieskończonym alfabetem. Przestrzeń $\mathcal{SP}(\{0,1\})$ jest matematykom znana jako *przestrzeń Cantora*. A $\mathcal{SP}(\mathbf{N})$ to *przestrzeń Baire'a*.

5.3.1 Liczby p-adyczne

Definiowanie liczb rzeczywistych za pomocą ciągów Cauchy'ego oparte jest na geometrycznym wyobrażeniu odległości między liczbami na prostej rzeczywistej. A gdyby tę odległość zdefiniować inaczej?[54]. To możliwe.

Z każdą liczbą wymierną $a \neq 0$ można jednoznacznie związać liczbę całkowitą c taką, że $a = 2^c \cdot \frac{q}{r}$ gdzie q i r to całkowite liczby nieparzyste.
Zdefiniujmy odległość między takimi liczbami tak: $d_2(x, y) = 2^{-n}$, gdzie $x - y = 2^n \cdot \frac{q}{r}$ a q i r to nieparzyste liczby całkowite[55]. Ta metryka jest istotnie różna od euklidesowej. Wystarczy pomyśleć o „otoczeniu zera o promieniu 1" w tej metryce - są w nim wszystkie liczby całkowite parzyste, wszystkie liczby całkowite nieparzyste są na jego brzegu. Liczby wymierne postaci $\frac{1}{2^n}$ są poza nim. To zdecydowanie mniej intuicyjne niż takie otoczenie zera w metryce euklidesowej - odcinek $(-1, 1)$.

Możemy teraz powtórzyć konstrukcję Cauchy'ego wykorzystując tę nową metrykę: w efekcie uzupełnimy zbiór liczb wymiernych wielkościami granicznymi dokładnie tak, jak to zrobił Cauchy. Tak zbudowany *zbiór liczb 2-adycznych* jest jednak istotnie różny od zbioru liczb rzeczywistych (choć jest z nim równoliczny)! Np. ciąg $(2^n : n \in \mathbf{N})$ jest teraz ciągiem Cauchy'ego, ale nie wyznacza 2-adycznej liczby niewymiernej, bo jest zbieżny do 0[56]. Nie można też zdefiniować „2-adycznej liczby e" tak, jak w zbiorze liczb rzeczywistych...

> *„Matematyk jest wynalazcą nie odkrywcą" - Wittgenstein.* Wynalazł konstrukcję graniczną, która - jak każde dobre narzędzie - może być użyta wielokrotnie[57].

Aby skonstruować *zbiór liczb p-adycznych* wystarczy zastąpić 2 przez liczbę pierwszą p. *„p-adic numbers are "far removed from our everyday intuitions", Scholze said. Over the years, though, they have come to feel natural to him.* „NOW I FIND REAL NUMBERS MUCH, MUCH MORE CONFUSING THAN P-ADIC NUMBERS. *I've gotten so used to them that now real numbers feel very strange."*[58].

Ale po co nam to? Nie czuję się zbyt pewnie w tych rejonach matematyki, wykpię się więc cytatem z wikipedii: *„liczby p-adyczne znajdują zastosowanie w teorii liczb, w tym w słynnym dowodzie Wielkiego Twierdzenia Fermata odkrytym przez Andrew Wilesa".*

---

[54] Liczba $|x - y|$ to odległość między liczbami wymiernymi x i y wyobrażonymi jako punkty prostej rzeczywistej. Naukowo: *metrykę euklidesową* w zbiorze liczb wymiernych chcemy teraz zastąpić inną metryką.

[55] Dodatkowo $d_2(0, 0) = 0$.

[56] Co więcej: nieskończona suma (suma szeregu) $1 + 2 + \cdots + 2^n + \cdots$ jest tu równa... -1 !

[57] Dla równowagi: *„czy matematykę wymyślamy czy odkrywamy? Czy matematycy tylko tworzą skomplikowane konstrukcje umysłowe, które (...) tak dalece ogłupiają nawet ich twórców, że wierzą w ich realność? Czy też matematycy odkrywają prawdy już istniejące? (...) Jak sądzę, jest jasne, że (...) jestem zwolennikiem tego właśnie poglądu"* - R.Penrose [55], str. 118.

[58] *Quanta Magazine,The Oracle of Arithmetic. Peter Scholze and the Future of Arithmetic Geometry3, 2016.* Peter Scholze (1987-). Za przełomowe wyniki w dziedzinie arytmetycznej geometrii algebraicznej, teorii liczb, oraz topologii algebraicznej został nagrodzony medalem Fieldsa w 2018 roku.

Rozdział 6

Prawda i dowód

Dowód matematyczny jest bramą do królestwa transcedentnej prawdy

Matematycy dowodzą twierdzeń a potem mówią, że są one prawdziwe. Ale czym jest „prawda”? Doprecyzujmy: czym jest prawda matematyczna?

Matematyka, pozostająca pod przemożnym wpływem osiagnięć starożytnych Greków, akceptowała platoński świat bytów idealnych, umieszczając w nim *uniwersum matematyczne* - świat bytów (idei) matematycznych. Zapewne to tę wizję matematyki mieli na uwadze kognitywiści Lakoff i Núnez pisząc o *„romance of mathematics”*[45][1] i wskazując - między innymi - takie cechy „romantycznego” postrzegania matematyki:

- matematyka jest transcendentna, tzn. istnieje niezależnie od ludzi i buduje nasz rzeczywisty fizyczny wszechświat (...).

- matematyka jest językiem natury i jest podstawową strukturą pojęciową, którą mielibyśmy wspólną z pozaziemskimi kosmitami, jeśli tacy istnieją,

- dowód matematyczny jest bramą do królestwa transcendentnej prawdy [2].

Pierwszy z tych punktów to właściwie manifest *matematycznego realizmu*: *„mathematical realism, (...) holds that mathematical entities exist independently of the human mind. Thus* HUMANS DO NOT INVENT MATHEMATICS, BUT RATHER DISCOVER IT *(...) there is really one sort of mathematics that can be discovered; triangles, for example, are real entities, not the creations of the human mind.” - wikipedia. Realizm skrajny - platonizm - zakłada, że obiekty matematyczne są pozaczasowymi, rzeczywistymi i obiektywnymi bytami, w przeciwieństwie do czasowych, przemijalnych i nie posiadających pełni istnienia przedmiotów zmysłowych i zjawisk.(...)”* - wikipedia, wersja polska.

> „Trudno nie wierzyć w nic”. Trudno nie wierzyć w istnienie czegoś, czego badaniu poświęciło się całe życie. Matematyka domaga się choć odrobiny (subiektywnego) realizmu[3].

‚Transcedentny świat bytów matematycznych” to wdzięczny temat do niekończących się dyskusji, które jednak są - z matematycznego punktu widzenia - jałowe. Bardziej odpowiada mi sformułowanie *„matematyka jest językiem natury i podstawową strukturą pojęciową”*. Darujmy sobie ciąg dalszy tego zdania (o kosmitach), w zamian uzupełniając je tak:

matematyka jest językiem OPISU *natury i podstawową strukturą pojęciową* TWORZONĄ I DOSKONALONĄ PRZEZ KOLEJNE POKOLENIA MATEMATYKÓW.

[1] *„matematyczny romantyzm”?* J. Pogonowski tłumaczył ten termin jako „matematyczną mitologię”.

[2] Więcej o poglądach G.Lakoffa i R.E.Nuneza w [45]. Warto też przeczytać artykuł J.Pogonowskiego [59] polemizujący z poglądami tych kognitywistów.

[3] „Realizm subiektywny”? Ci, którzy czytali *„Sto lat samotności” G. Marqueza wiedzą w czym rzecz.*

6.1 O matematycznej prawdzie - historycznie (naiwnie?)

Największym odkryciem XIX wieku było wynalezienie metody odkrywania.
A. N. Whitehead, Science and Modern World

W językach naturalnych posługujemy się zdaniami orzekającymi, którym przypisujemy *wartość logiczną*. Matematyczne zdania dotyczą relacji między obiektani (bytami) w matematycznym uniwersum. Te byty są wiecznotrwałe i niezmienne, więc wartość logiczna takich zdań jest stała. Logika uniwersum jest *dychotomiczna* - są tylko dwie wartości logiczne: *prawda* i jej przeciwieństwo - *fałsz*. Prawda matematyczna to zbiór matematycznych zdań orzekających, których wartością logiczną jest „prawda".

Dowolnemu zdaniu orzekającemu ϕ towarzyszy jego zaprzeczenie, negacja $\neg\phi$, logiczne przeciwieństwo ϕ: $\neg\phi$ jest prawdziwe wtedy, gdy ϕ nie jest prawdziwe. I *vice versa*. Trzeciej możliwości nie ma - *tertium non datur*. To jest trochę (mocno) niezgodne z naszym doświadczeniem rzeczywistego świata. Ale tym chętniej skłonni jesteśmy zgodzić się, że ta zasada obowiązuje w platońskim świecie idealnych bytów i w matematycznym uniwersum[4].

> *Is (true) or is not (true)* - to hamletowskie pytanie zadaje sobie (mainstreamowy) matematyk mając przed sobą zdanie matematyczne o nierozpoznanej wartości logicznej. W każdej parze przeciwstawnych zdań matematycznych $(\phi, \neg\phi)$ dokładnie jedno jest prawdziwe (a drugie fałszywe). Tylko które?
> Najkrócej jak można (i nieco naiwnie): działalność matematyków polega na wskazywaniu tego spośród pary matematycznych zdań $(\phi, \neg\phi)$, które jest prawdziwe.

Pięknie, tylko jak to zrobić?
„jeśli wszechświat jest uporządkowany matematycznie, wyjaśniałoby to użyteczność matematyki, ale nie wyjaśniałoby, w jaki sposób możemy dojść do wiedzy matematycznej (...). Dla realisty, który był albo chrześcijaninem, albo neo-platonistą (...), było to łatwe do wytłumaczenia[5]*. Chrześcijański Bóg stworzył nie tylko wszechświat, ale także istoty ludzkie; zostaliśmy stworzeni z intelektem, który jest skończonym obrazem nieskończonego intelektu Boga. Ta zdolność została nam dana po to, abyśmy mogli dojść do pewnej wiedzy o istnieniu Boga (...) i do ograniczonego poznania Bożej natury. Bóg stworzył istoty ludzkie z intelektem, który pozwala uchwycić zasady matematyczne i rozpoznać je jako prawdziwe ponad wszelką wątpliwość. (...) Dla neoplatonika dusza ludzka (mikrokosmos) była integralną częścią wszechświata (makrokosmos) i zdolna była rezonować z duszą świata. Mikrokosmos i makrokosmos odzwierciedlają się w taki sposób, że harmonie jednego będą rozpoznawane przez drugiego i wpływają na niego. W obu przypadkach wiedza matematyczna jest kwestią wglądu, intuicji intelektualnej lub widzenia w świetle rozumu, które jest analogiczne do objawienia religijnego. Kiedy umysł jest właściwie skoncentrowany, pierwsze zasady matematyki zostaną ujawnione z nieodpartą jasnością i wyrazistością, ponieważ są one integralną częścią natury intelektu. Ale ponieważ ludzki intelekt jest ograniczony i skończony, nie pojmuje wszystkich rzeczy bezpośrednio (...); obejmuje tylko te, które są proste i podstawowe. (W umyśle Boga wszystkie rzeczy są natychmiast intuicyjne; Bóg nigdy nie musi angażować się w rozumowanie ani wyciągać wniosków). Umysły ludzkie muszą stopniowo podchodzić do coraz bardziej złożonej i kompletnej wiedzy. Rozumowanie i dowód dedukcyjny nie dają same w sobie intuicji intelektualnej, która jest prawdziwą wiedzą, ale rozum i intuicja są dla skończonych umysłów konieczną drogą do niej." [83].*

To imponująco spójna koncepcja: istnieje transcedentny świat matematyki, który usiłujemy poznać. Nasza „ludzka" matematyka to tylko te fragmenty uniwersum, które - za łaskawym pryzwoleniem - udało się nam odkryć. „Intelekt pozwala uchwycić zasady matematyczne i rozpoznać

[4] To pogląd charakteryzujący matematykę opartą na teorii mnogości. O odstępstwach od tego dominującego poglądu spróbujemy opowiedzieć później.

[5] Neoplatonizm to jeden z nurtów filozofii późnej starożytności, specyficzna forma platonizmu. Przejęcie elementów neoplatonizmu przez myślicieli chrześcijańskich (m.in. św. Augustyna), spowodowało ukształtowanie się tzw. neoplatonizmu średniowiecznego. Stając się niemalże oficjalną filozofią kościoła katolickiego neoplatonizm wywierał znaczący wpływ na życie naukowe i intelektualne Europy, szczególnie w pierwszych „nastu" wiekach chrześcijaństwa.

je ponad wszelką wątpliwość" - brzmi to jak zaklinanie rzeczywistości. Owszem, zdarzą się pomyłki, ale można wycofać się z błędnych pomysłów pod wpływem krytyki (dla najbardziej opornych czasem rozpalano stosy...).

Tak właśnie przez wieki postrzegano opis geometrii płaszczyzny sporządzony przez Euklidesa i zawarty w jego dziele *„Stoicheia geometrias"*

> W antycznej Grecji utożsamiano poznanie z dążeniem do wskazania istoty (*„essence"*) badanych zjawisk. To tłumaczy zamysł Euklidesa by zacząć od wskazania minimalnego zbioru zdań ujmujących istotę geometrii [45]. *Elementy* Euklidesa to 16 ksiąg. W pierwszej z nich Euklides wskazuje podstawy geometrii płaszczyzny formułując pięć *aksjomatów*:
>
> *I. dowolne dwa punkty można połączyć prostą,*
> *II. dowolną prostą można przedłużyć nieograniczenie,*
> *III. dla danego odcinka można zaznaczyć okrąg o środku w dowolnym punkcie i promieniu równym odcinkowi,*
> *IV. wszystkie kąty proste są równe,*
> *V. aksjomat równoległości: przez punkt leżący poza prostą przechodzi dokładnie jedna prosta do niej równoległa.*
>
> Aksjomaty wskazują te konstrukcje tworzone za pomocą cyrkla i linijki na kartce papieru (papirusa), które są „istotą geometrii". Zauważmy, że drugi i piąty aksjomat mają sens tylko wtedy, gdy uznamy, że kartka papieru to fragment idealnej, nieograniczonej płaszczyzny.

Aksjomaty to osnowa każdej teorii matematycznej: *„pojęcie „aksjomatu" jest ściśle związane z ideą logicznej nieredukowalności. Aksjomaty to fakty matematyczne, które traktujemy jako oczywiste (...). Wszystkie teorie matematyczne zaczynają się od aksjomatów, a następnie dedukują konsekwencje tych aksjomatów, zwane twierdzeniami. Tak postępował Euklides dwa tysiące lat temu w Aleksandrii, a jego traktat o geometrii jest klasycznym modelem matematycznej prezentacji."*[6].

> Aksjomaty teorii opisującej dany byt (ideę) to jego finitarny opis.
> Wiedza o matematycznym bycie to (potencjalnie) nieskończony zbiór zdań - dowodliwych konsekwencji aksjomatów, To sens (treść) bytu.
> Aktualny stan teorii - zasób dotąd udowodnionych twierdzeń - to nasze jego rozumienie.
>
> Byt matematyczny jest tym, co można o nim powiedzieć

Taką organizację poznania matematycznego nazywa się o *metodą aksjomatyczno-dedukcyjną*[7].

Aksjomaty geometrii płaszczyzny są sformułowane w zastanym przez Euklidesa języku opisu konstrukcji tworzonych za pomocą cyrkla i linijki. Użyte nazwy - „punkt", „prosta", „okrąg" „kąt" - miały dla użytkowników cyrkla tych narzędzi oczywisty sens. Bez głębszej refleksji uznawano, że należą one do nieropoznanego w pełni (i nierozpoznawalnego) języka opisu transcedentnego matematycznego uniwersum[8]. Dlatego mają one ustalone znaczenie. Dlatego „wewnątrz" geometrii euklidesowej są one *pierwotne*, niedefiniowane.

Euklides aksjomatyzował geometrię w przekonaniu, że ta teoria opisuje pewien fragment absolutu - transcedentnego świata matematyki[9]. Pojęcia *„punkt"*, *„prosta"*, *„okrąg"* mają przypisane jednoznaczne intrerpretacje.

---

[5]Nie jestem pewny jak rozumieć czwarty aksjomat. Za pomocą cyrkla i linijki potrafimy - dla dowolnej pary różnych punktów - skonstruować nie tylko prostą przez nie przechodzacą ale i prostą prostopadłą do niej. Czy chodzi o to, że cztery uzyskane w ten sposób kąty są równe? A może o to, że taka konstrukcja pozwala uzyskać „takie same kąty proste" niezależnie od tego jakie punkty wybierzemy?

[6]G.Chaitin, *„The limits of reason" (internet)* Gregory Chaitin (ur. 1947) to argentyńsko-amerykański matematyk i informatyk.

[7]Gwoli ścisłości: to Arystoteles pierwszy postulował, by badania naukowe rozpoczynać od podania definicji i aksjomatów.

[8] „lokalnemu rozpoznawaniu uniwersum towarzyszy poznanie fragmentu języka jego opisu".

[9]W filozofii absolut był rozumiany jako (m.in.) *„pierwotna i podstawowa zasada, zasadniczy czynnik kosmosu, rzeczywistość pierwsza, pierwotna i podstawowa" (wikipedia).*

> Używając sformułowania R. Penrose, geometria Euklidesa była dla antycznych Greków LOGICZNĄ

> KONIECZNOŚCIĄ - opisem rezultatów odkrycia struktury pewnego fragmentu idealnego świata matematyki [55]. Podobnie arytmetyka jest opisem transcedentnej struktury liczb naturalnych.
> Jeśli działalność matematyczna to odkrywanie fragmentów uniwersum, to każda teoria matematyczna - jeśli tylko jest niesprzeczna - jest logiczną koniecznością[10].

Traktowanie teorii matematycznych jako logicznych konieczności dominowało aż do początku XX wieku. Ale w połowie XIX wieku ukazały się prace Beltramiego, Łobaczewskiego, Bolyai'a i Gaussa, które wywołały rewolucję w rozumieniu teorii aksjomatycznych. Beltrami, Łobaczewski, Bolyai sformułowali (pracując niezależnie) teorię aksjomatyczną - nieeuklidesową geometrię, znaną dziś jako *geometria hiperboliczna*. W skrócie: „nieeuklidesowość" tej teorii polega na tym, że aksjomat równoległości - *„przez każdy punkt poza prostą przechodzi dokładnie jedna prosta równoległa"* - zastąpiono zdaniem z nim sprzecznym: *„przez każdy punkt poza prostą przechodzi więcej niż jedna prosta równoległa"*. A Gauss zaproponował inną modyfikację - „siostrzaną" *geometrie epliptyczną*, w której aksjomat równoległości zastąpiło zdanie *„każde dwie proste mają punkt wspólny"*. Myśląc w kategoriach logicznej konieczności - czyli mając w głowie „oczywistą" interpretację słów „punkt", „prosta" - jesteśmy przekonani, że te teorie nie mają sensu.
Ale one mają sens - opisują pewne fragmenty matematycznego uniwersum, jeśli tylko dopuścimy przypisanie słowom (nazwom) „punkt", „prosta" innych znaczeń.

Prosty przykład: geometrię eliptyczną odnajdziemy na powierzchni kuli jeśli nazwę „punkt" zinterpretujemy jako parę antypodycznych punktów[11] *na powierzchni kuli, a nazwę „prosta" jako koło wielkie. Przy tej interpretacji każde dwie proste (koła wielkie) mają punkt wspólny dwie wspólne pary punkty antypodycznch.*

W XIX wieku geometria (...) przeszła okres rozwoju graniczącego z kataklizmem. (...) Nagłe skurczenie się geometrii euklidesowej do podgatunku rodziny matematycznych teorii przestrzeni, zburzyło złudzenia i wywołało ważne zmiany w naszej filozoficznej koncepcji ludzkiej wiedzy."[12].
Co się właściwie stało? Nagle okazało się, że geometria euklidesowa nie jest napisana w języku transcedentnego uniwersum. Odtąd słowa „punkt", „prosta" to tylko nazwy używane w „języku geometrii", kóre można w matematycznym uniwersum interpretować na różne sposoby. To oznacza, że aksjomatyczna teoria matematyczna może mieć wiele interpretacji, że NIE JEST LOGICZNĄ KONIECZNOŚCIĄ[13].
Paradygmat logicznej konieczności był w tym czasie tak dominujący, że twórcy tych teorii nie doczekali należnego im uznania. Gauss, w obawie przed śmiesznością, nie publikował swoich prac związanych z nową geometrią. Ale był pewny swego: w prywatnym liście pisał: *to (...) ciekawa geometria zupełnie inna od naszej, ale całkowicie spójna, którą opracowałem ku mojej pełnej satysfakcji"*.

Jednak historia doceniła przełomowy charakter ich poczynań. Oto jak o tym przełomie mówił Einstein w trakcie wykładu „Geometria a doświadczenie" wygłoszonego w 1921 roku [27]:

Rozważmy (...) aksjomat (...) „przez dwa punkty przestrzeni przechodzi dokładnie jedna prosta". Jak należy go interpretować (...).
Dawna interpretacja: każdy wie, czym jest prosta i punkt. Nie jest zadaniem matematyka decydować, skąd pochodzi owa wiedza (...). Tę kwestię pozostawia on filozofom. Po osadzeniu na tej wiedzy, która poprzedza matematykę, wymieniony aksjomat staje się (...) oczywisty, jest przejawem wiedzy a priori.
Nowsza interpretacja: geometria dotyczy obiektów, które opisywane są słowami prosta, punkt itp.

---

[10] Teoria jest niesprzeczna jeśli nie może się zdarzyć, że pewne zdanie ϕ i jego zaprzeczenie $\neg\phi$ są jednocześnie logicznymi konsekwencjami jej aksjomatów.

[11] „Leżących po przeciwnych stronach".

[12] Stanfordzka Encyklopedia Filozofii

[13] Geometria euklidesowa pozbawiona aksjomatu równoległości mnoże być interpretowana na płaszczyźnie i na powierzchni kuli.

Nie zakłada się żadnej wiedzy bądź intuicji dotyczącej tych obiektów, lecz jedynie słuszność jej aksjomatów (...) które należy traktować w formalnym znaczeniu, czyli jako pozbawione wszelkiej intuicji i doświadczalnej treści. Wszystkie inne twierdzenia geometrii są logicznymi wnioskami wynikającymi z tych aksjomatów. Aksjomaty są swobodnymi tworami ludzkiego umysłu. (…) Aksjomaty definiują obiekty, którymi zajmuje się geometria"

„Punkt" i „prosta" to odtąd tylko nazwy, *pojęcia pierwotne* trzech geometrii: euklidesowej, hiperbolicznej i eliptycznej. Żadnej z nich nie dajemy prawa do określenia uniwersalnego znaczenia tych pojęć. Systemy aksjomatów tych teorii to opisy pewnych fundamentalnych zależności między tymi pojęciami, obowiązującymi tylko w ramach rozwijanej teorii.
Matematyk jest nie tylko twórcą aksjomatów teorii, ale również twórcą języka jej opisu. Nie ma jednego uniwersalnego języka opisu (transcedentnej) matematyki. Teoria - wprowadzane przez nią nazwy i aksjomaty - musi być interpretowana w świecie matematyki.

> *Matematyk jest wynalazcą, nie odkrywcą - L. Wittgenstein.*[14]
> Matematyk przestał być odkrywcą (rzeczywistości). Stał się wynalazcą (sposobu jej postrzegania). Twórcą matematycznych teorii opisujących lokalnie matematyczne uniwersum.
> To się stało na przełomie XIX i XX wieku. Ale już wtedy niektórzy wątpili: *„For many philosophers, including Kant, would assert that the correct question is not "What is a thing?" but rather „What is a thing as it appears to us?"* [25].
> Być może właśnie w odejściu od absolutyzmu poznawczego należy upatrywać najważniejszej przyczyny fenomenalnego rozwoju nauki w XX wieku.

Podsumujmy: jeśli choćby na chwilę uwolnimy się od platonizmu i zapomnimy o transcedentnym rodowodzie (charakterze) „matematycznych bytów (idei)", to możemy je rozumieć jako *„struktury pojęciowe"* - zespoły nazw wraz z pewnymi zależnościami między nimi. *„Pojęcie to abstrakcyjny, myślowy odpowiednik przedmiotu. (...) „Tworzenie pojęć jest podstawową funkcją postrzegania i myślenia. Pojęcia pozwalają systematyzować naszą wiedzę o świecie." (wikipedia).*
Teorie aksjomatyczne to powszechnie przyjęta forma prezentacji matematycznych struktur pojęciowych.

$$\begin{tikzcd} & \textit{struktura pojęciowa} \arrow[dl, "\textit{formalizm}"'] \arrow[dr, "\textit{platonizmm}"] & \\ \textit{teoria aksjomatyczna} \arrow[rr, leftrightarrow] & & \textit{idea, byt matematyczny} \end{tikzcd}$$

> Pojęcia to nazwy - *„flatus vocis"*[15]. Jeśli struktura pojęciowa jest opisana jako teoria aksjomatyczna, to jej treścią są wszelkie twierdzenia, które można w tej teorii dowieść.
> Jej sensem jest idea matematyczna, którą ta teoria reprezentuje.
> *Obecna w naszej intuicji idea liczb naturalnych to platoński byt matematyczny. Odpowiadająca tej idei teoria to arytmetyka Peano operująca takimi pojęciami jak „liczba", „następnik", „suma", „iloczyn" . Dowodliwe w tej teorii twierdzenia to (nam dostępna) treść tej idei.*

Idee matematyczne powiązane wielorakimi zależnościami tworzą razem „hiperideę"- matematykę. Próbujemy ją zrozumieć tworząc coraz to nowe teorie matematyczne i włączając je do opisu owej hiperidei.

Matematyk jest twórcą (sformalizowanych) języków pozwalających na ścisłe sformułowanie aksjomatów i odnajdywanie ich *logicznych konsekwencji.*

Ale czy „logika języka" jest też jego dziełem czy też jest zastana, jest „logiką transcedentnego świata"?

---

[14] *„Uwagi o podstawach matematyki"*. W 1939 roku Wittgenstein prowadził wykład poświęcony podstawom matematyki, którego słuchaczem był A.Turing, jedna z głównych postaci tego tekstu.
[15] *„Flatus vocis"* - wyrażenie słowne. Termin wprowadzony przez średniowiecznych nominalistów.

6.2 Logika języka

Wszelka nauka jest niczym innym, jak tylko udoskonaleniem potocznego myślenia" - A.Einstein [27]

„Podczas gdy rywalizujące ze sobą systemy aksjomatyczne dla geometrii (euklidesowe i nieeuklidesowe) były przedmiotem wielkiego intelektualnego zainteresowania w XIX wieku, logiczne podstawy ich prezentacji były zazwyczaj przyjmowane za pewnik."[16]
Ale i ten pewnik został podważony... .

6.2.1 Logika praw prawdziwości G.Frege

Gottlob Frege pisał: *„Odkrywanie prawd jest zadaniem wszelkiej nauki; zadaniem logiki jest odkrywanie praw prawdziwości."*[17] Odkrywanie, a nie tworzenie. Dla G. Frege prawa logiki są uniwersalne i wspólne dla wszystkich języków. Logika to byt transcedentny i... logiczna konieczność.

„Ujawnianie praw prawdziwości". Brzmi nieźle. Ale czym jest to „prawo prawdziwości"? Matematyczna odpowiedź na to pytanie wymaga kilku ustaleń leżących u podstaw najprostszej logiki związanej z językiem, tzw. *logiki zdaniowej*:

. - przedmiotem naszego zainteresowania są zdania orzekające pewnego języka (np. języka polskiego) - te, którym można przypisać jedną z dwóch wartości logicznych - prawdę lub fałsz.

- wskazujemy (arbitralnie) skończony lub nieskończony zbiór takich zdań nazywanych odtąd zdaniami prostymi. Zdania złożone konstruujemy ze zdań prostych korzystając wielokrotnie z czterech spójników zdaniowych: koniunkcji („i"), alternatywy („lub"), negacji („nieprawda, że") oraz implikacji („jeżeli ... to ...").

- spójniki zdaniowe ustalają związek wartości logicznej zdania złożonego zbudowanego za ich pomocą z wartościami zdań, z których zostało ono zbudowane: np. koniunkcja „Z_1 i Z_2" jest prawdziwa dokładnie wtedy, gdy oba zdania Z_1, Z_2 są prawdziwe, a alternatywa „Z_1 lub Z_2" jest prawdziwa, gdy conajmniej jedno z tych zdań jest prawdziwe[18].

Przypisywanie zdaniu złożonemu jego wartości logicznej to proces, który dzieli się na dwa etapy:
a. wskazanie zdań prostych wchodzących w skład rozważanego zdania,
b. ustalenie wartości zdania na podstawie wartości tych zdań prostych i analizy struktury zdania.

> Te ustalenia to nie matematyka. To raczej wkład filozofów w logikę.
> *„(...) Zadaniem filozofii jest rozbiór, precyzowanie, i określanie pojęć, które są dane jako niejasne. Zadaniem matematyki jest łączenie i porównywanie pojęć dotyczących wielkości, które są jasne i pewne, aby zobaczyć, co z tego może być wywnioskowane." (...) O ile więc w matematyce chodzi o to, by przedstawić najpierw jasne definicje podstawowych pojęć, by w oparciu o nie rozwijać nasze poznanie (...) o tyle w filozofii nie należy zaczynać od definicji.* [19]

Do opisu struktur zdań złożonych służy *(meta)język formuł zdaniowych*[20]. To język rekurencyjny: formuły zdaniowe budujemy ze *zmiennych zdaniowych* (reprezentowanych tu przez duże litery $A, B, C, \ldots$) korzystając skończenie wiele razy z reguł konstrukcyjnych związanych z poszczególnymi spójnikami:

jeśli, X,Y są formułami, to są nimi również napisy $(X \wedge Y), (X \vee Y), (X \to Y), \neg X$.

[16]New Logic and the Seeds of Analytic Philosophy - Boole, Frege, Kevin C.Klement (internet).
Nazwa „Logika" pochodzi od greckiego słowa „logos". *Logos jest terminem oznaczającym wewnętrzną racjonalność i uporządkowanie czegoś: świata, duszy ludzkiej, wypowiedzi, argumentu (wikipedia).*

[17]Gottlob Frege (1848-1925) -twórca *logicyzmu matematycznego* zakładającego traktowanie logiki jako źródła twierdzeń matematycznych. Jest twórcą *logiki predykatów (logiki pierwszego rzędu)* .

[18]Obecność i jednakowa interpretacja (rola) tych spójników we wszystkich językach świata to fenomen porównywalny z wszechobecnością liczb naturalnych.

[19]A. Pietras *„Postneokantowskie projekty filozofii Nicolai Hartmann i Martina Heideggera"* praca doktorska (interne)

[20]Metajęzykiem zwykło się nazywać język używany do opisu i analizy innego języka.

Formułę opisującą strukturę zdania złożonego otrzymamy zastępując występujące w nim zdania proste zmiennymi zdaniowymi, a spójniki *„i”*, *„lub”*, *„jeżeli ... to ...”* oraz *„nieprawda, że”* odpowiednio symbolami $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$. I tak np. strukturę zdania *„Jeśli nie pada, to pójdziemy na plażę i kupimy lody”* opisuje formuła $\neg A \rightarrow (B \wedge C)$, gdzie A, B, C to *zmienne zdaniowe*[21].

Postępując „odwrotnie”, czyli biorąc za punkt wyjścia dowolną formułę zdaniową F i zastępując występujące w niej zmienne zdaniowe dowolnymi zdaniami (niekoniecznie prostymi) otrzymamy zdanie, nazywane *instancją* formuły F.
Te (nieco nużące) ustalenia pozwalają na precyzyjne sformułowanie definicji „prawa prawdziwości”:

Prawo prawdziwości to formuła zdaniowa, której wszelkie instancje są zdaniami prawdziwymi.
Prawa prawdziwości to *tautologie*[22].Przykładem tautologii jest przywołane już wcześniej „prawo wyłączonego środka” - formuła $X \vee \neg X$.

> Celem logiki zdaniowej nie jest rozpoznanie wszelkich prawdziwych zdań. Wskazując odkrywanie „praw prawdziwości” jako cel działania, logika pozwala rozpoznać tylko te zdania prawdziwe, które są instancjami tautologii, tzn. te zdania, których prawdziwość wynika z ich struktury.
> Logika matematyczna nie zajmuje się prawdziwością zdań zależną od treści zdań prostych wchodzących w jego skład[23].

Jak pokazać, że formuła zdaniowa jest tautologią? Kolejne generowanie wszelkich zdań-instancji danej formuły i odszukiwanie ich wartości logicznych nie jest zbyt dobrym pomysłem, bo przecież zdań-instancji może być nieskończenie wiele... .
Pomysł Fregego był genialnie prosty: potraktował on spójniki zdaniotwórcze - koniunkcję, alternatywę, negację i implikację - jako operacje na dwuelmentowym zbiorze wartości logicznych: gdy te wartości oznaczymy przez 1 (prawda) i 0 (fałsz), to operacje logiczne opiszemy tak:
koniunkcja: $1 \wedge 1 = 1, 1 \wedge 0 = 0 \wedge 1 = 0 \wedge 0 = 0.$
alternatywa: $1 \vee 1 = 1 \vee 0 = 0 \vee 1 = 0 = 1, 0 \vee 0 = 0.$
implikacja: $1 \rightarrow 1 = 0 \rightarrow 1 = 0 \rightarrow 0 = 1, 1 \rightarrow 0 = 0.$
negacja: $\neg 1 = 0, \neg 0 = 1.$

> W ten sposób dwuelementowy zbiór wartości logicznych stał się *algebrą wartości logicznych*, w której zakodowane są wszelkie informacje o spójnikach zdaniowych.
> Podkreślmy: nie ma żadnego matematycznego argumentu na rzecz stwierdzenia, że w logice należy operować tylko dwiema wartościami logicznymi. To wolny wybór twórców klasycznej logiki matematycznej, który usprawiedliwia jedynie przekonanie, że doskonałość świata transcedentnej matematyki wyraża się w jego prostocie.

Zastępując zmienne zdaniowe występujące w formule zdaniowej F dowolnie wybranymi wartościami logicznymi zbudujemy wyrażenie, któremu można przypisać wartość logiczną 0 lub 1. Np. dla formuły $A \wedge (\neg B \vee C)$ zastępując zmienne (A, B, C) przez wartości $(0, 1, 0)$ otrzymamy wyrażenie $(0 \wedge (\neg 1 \vee 0)$, którego wartość obliczymy tak: $(0 \wedge (\neg 1 \vee 0) = 0 \wedge 0 = 0.$

Powiemy, że *formuła F, w której występują zmienne zdaniowe ze zbioru $\{A_1, \ldots, A_n\}$, jest spełniona przy interpretacji (wartościowaniu)* $[A_1 := a_1, \ldots, A_n := a_n]$ (gdzie ciąg $(a_1, \ldots, a_n)$ to ciąg wartości logicznych), jeżeli tak obliczona wartość jest równa 1.

Określając wartość logiczną zdania złożonego odwołujemy się do wartości logicznych zdań prostych w nim występujących, a nie do ich treści. Dlatego - po chwili zastanowienia - zgodzimy się, że:

formuła zdaniowa F jest tautologią dokładnie wtedy, gdy jest spełniona przy dowolnym wartościowaniu zmiennych zdaniowych w niej występujących.

[21]Trochę tu niedopowiedzeń, ale ... .
[22]Termin „tautologia” został zaproponowany przez Wittgensteina.
[23]Prawdziwość koniunkcji *„2 jest liczbą parzystą i 15 jest liczbą podzielną przez 3”* jest oczywista. Ale nie jest to instancja prawa prawdziwości, lecz twierdzenie arytmetyki.

Dlatego np. łatwo pokażemy, że formuła $A \vee \neg A$ jest tautologią.

Filozoficzne „prawa prawdziwości” stały się w modelu Fregego „matematycznie uchwytne”. Co istotne: ten model pokazuje, że sprawdzanie, czy formuła zdaniowa jest tautologią jest problemem rozstrzygalnym, bo sprowadza się do wykonania SKOŃCZONEJ liczby obliczeń.

> Z dzisiejszej perspektywy nazywanie algebraizacji logiki genialnym i odważnym pomysłem wydaje się przesadne. Ale w czasach Fregego „prawda” i „fałsz” były pojęciami filozoficznymi i nie sądzę, by filozofowie byli wówczas skłonni dopuścić wykonywanie na nich operacji - tak jak na liczbach.
>
> Frege był tego świadom. Dzieło, w którym przedstawił koncepcję matematyzacji logiki zdaniowej nosiło niewiele mówiącą nazwę *Begriffsschrift*. Objaśniając jej zawartość Frege napisał, że traktuje ona o *„języku formuł,* WZOROWANYM NA ARYTMETYCE, *dla czystej myśli.”*[24].
>
> Wśród fizyków kwantowych dyskutujących o roli modeli matematycznych w ich dociekaniach, popularne było (jest nadal?) hasło *„shut up and calculate” - zamknij się i licz.* Frege mógłby powiedzieć to samo do nadmiernie filozofujących kolegów-logików... .

Ten entuzjazm łatwo ostudzić: jeśli w formule mamy np. dwanaście zmiennych zdaniowych (a dlaczego nie?), to sprawdzenie, czy jest ona tautologią wymaga 2^{12}, czyli 4096 takich obliczeń[25].

Być może dlatego Frege zaproponował też *aksjomatyczny opis logiki zdaniowej* - skonstruował system dowodzenia dla języka formuł zdaniowych taki, że:

formuła zdaniowa ma dowód w tym systemie dokładnie wtedy, gdy jest tautologią.

Jest wiele takich systemów. Szczególnie ceni się systemy ockhamowsko oszczędne, tzn. takie, w których jedyną regułą jest bezdyskusyjnie akceptowana reguła odrywania - *modus ponens* (str. 25). Jeden z takich systemów wygląda tak: jego aksjomaty to trzy schematy formuł:

$X \to (Y \to X)$,
$(X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (X \to Z))$,
$(\neg X \to Y) \to ((\neg X \to \neg Y) \to X)$.

a jedyną regułą dowodzenia jest właśnie reguła odrywania:

$$\frac{X, X \to Y}{Y}$$

(litery X, Y, Z reprezentują tu dowolne formuły zdaniowe)[26].

Ockhamowską oszczędność doprowadzono tu do absurdu: wpatrywanie się w te aksjomaty nie przyczynia się w żaden sposób do lepszego zrozumienia logiki zdaniowej. Trudno też wyobrazić sobie budowanie dowodów w tak absurdalnie oszczędnym systemie. Dlatego wiedza większości studentów o logice zdaniowejogranicza się do tzw. rachunku zdań, czyli poznania algorytmu obliczania wartości logicznej zdań złożonych. A to nadzwyczaj nudne zajęcie[27].

Taka powierzchowna znajomość logiki zdaniowej prowadzić może do nieporozumień: *alternatywa $(X \to Y) \vee (Y \to X)$ jest tautologią. Zatem dla dowolnych dwóch zdań p, q jedna z implikacji $p \to q$, $q \to p$ jest prawdziwa. W szczególności jedno ze zdań: „jeśli Kasia przypaliła zupę, to w Krakowie pada” i „jeśli w Krakowie pada, to Kasia przypaliła zupę” jest prawdziwe. Ale przecież niesposób zgodzić się, że istnieje związek przyczynowo-skutkowy między kulinarnymi umiejętnościami Kasi a średnią opadów w Krakowie (lub odwrotnie)*[28].

[24] *Begriffsschrift= Pismo pojęciowe (?).* „Algebraizację logiki zdaniowej” zawdzięczamy głównie G. Boole’owi(1815-1864). Dlatego tę dwuelementową algebrę nazywa się *algebrą Boole’a wartości logicznych.* Ciekawostka: gdy w 1879 roku Frege przygotowywał do druku wspomniane dzieło, algebra wartości logicznych była już znana w Niemczech. Ale (podobno) Frege wspomniał o niej dopiero po recenzjach, które zarzucały mu nieznajomość osiągnięć Boole’a... .

[25] Informatycy powiedzą, że *problem tautologii ma złożoność wykładniczą* - liniowemu wzrostowi liczby zmiennych towarzyszy wykładniczy wzrost liczby niezbędnych testów.

[26] Każdy z tych trzech schematów aksjomatów reprezentuje nieskończenie wiele aksjomatów, które otrzymamy zastępując litery X, Y, Z dowolnymi formułami. Oprócz wymienionych, w tym systemie są też aksjomaty „niejawne” - równoważności, pozwalające wyrazić koniunkcję i alternatywę za pomocą implikacji i negacji.

[27] *„A w filmie polskim, proszę pana, to jest tak: nuda... Nic się nie dzieje, proszę pana. Nic. (...) Dialogi niedobre... Bardzo niedobre dialogi są. W ogóle brak akcji jest. Nic się nie dzieje...” („Rejs” M. Piwowskiego).*

[28] Chyba, że ten świat jest jeszcze bardziej skomplikowane od opowieści fizykaów kwantowych...

Nieporozumienie bierze się stąd, że mówiąc o implikacji i o konsekwencji (związku przyczynowo-skutkowym) używamy w języku polskim (i innych) tej samej frazy: *„jeżeli p, to q”*. Tymczasem wartość logiczna implikacji $p \rightarrow q$ zależy wyłącznie od wartości logicznych zdań p i q podczas gdy odkrycie przyczynowo-skutkowego związku między zdaniami p i q wymaga zazwyczaj analizy treści obu zdań. A, jak ustaliliśmy, logika zdaniowa zajmuje się wyłącznie wartością logiczną zdań, a nie ich treścią. Dla nieprzekonanych: implikacja $p \rightarrow q$ zbudowana z prawdziwych zdań jest zawsze prawdziwa. A przecież absurdem jest twierdzenie, że między dowolnymi dwoma prawdziwymi zdaniami istnieje pewien związek przyczynowo-skutkowy... [29].

Może się jednak zdarzyć, że ów związek przyczynowo-skutkowy jest rezultatem porównania STRUKTURY obu zdań: *„Jasiu jest gruby i wysoki → Jasiu jest gruby”*. I, jak się zdaje, tylko ten rodzaj konsekwencji jest „uchwytny” w logice zdaniowej[30].
Tę szczególną konsekwencję opiszemy w języku formuł zdaniowych. Załóżmy, że w formułach F, G występują wyłącznie zmienne zdaniowe ze zbioru $\{A_1, \ldots, A_n\}$. Powiemy, że:

formuła G jest konsekwencją formuły F („konsekwencją strukturalną”), jeżeli formuła G jest spełniona przy każdym wartościowaniu $[A_1 := a_1, \ldots, A_n := a_n]$ przy którym spełniona jest formuła F. Piszemy wówczas $F \Vdash G$.

Związek tak definiowanej konsekwencji z implikacją, rozumianą jako operacja na formułach, opisuje - być może nieco zaskakujące - twierdzenie: dla dowolnych formuł zdaniowych F, G, H:

$$F \wedge H \Vdash G \quad wtw \quad H \Vdash F \rightarrow G$$

Stąd otrzymamy precyzyjny opis relacji między „strukturalną konsekwencją” i implikacją

$$F \Vdash G \quad wtw \quad F \rightarrow G \textit{ jest tautologią}$$

6.2.2 Dedukcja naturalna Gentzena

Poszukiwanie „praw prawdziwości” nie jest - nie musi być - ani jedynym, ani głównym celem badań nad logiką języka.
„Na swoim seminarium w 1926 r. Jan Łukasiewicz podniósł kwestię, że matematycy nie konstruują dowodów za pomocą teorii aksjomatycznej (...), lecz posługują się innymi metodami; w szczególności pozwalają sobie na „arbitralne założenia” i patrzą, dokąd prowadzą. Łukasiewicz rzucił wyzwanie logikom, by rozwinęli teorię logiczną zgodną z tą koncepcją, ale która dała ten sam zestaw twierdzeń, co istniejący wówczas system aksjomatyczny. Wyzwanie to podjął Stanisław Jaśkowski.” [31].

Niestety, wkład obu polskich logików w rozwój logiki założeniowej jest często niedoceniany. Więcej szczęścia(?) miał niemiecki logik G. Gentzen (1909-1945), twórca *systemu dedukcji naturalnej*. Stwierdzeniami tego systemu są *sekwenty* - napisy postaci $\Gamma \vdash F$, gdzie Γ to skończony zbiór formuł, a F to pojedyncza formuła zdaniowa.
Jedyny aksjomat (schemat aksjomatu) ma postać

$$\frac{}{\Gamma \cup \{X\} \vdash X}$$

[29] W internecie można znaleźć cyfrową kopię książki T. Kotarbińskiego *„Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk” (Lwów 1929) (http://www.ifispan.waw.pl/bibfis/news/zbiory/gallery/ marginalia/KotEl/index.html)* Ten egzemplarz, zgodnie z ówczesnymi zwyczajami, jest upstrzony dopiskami czytelników dokumentującymi wątpliwości związane z implikacją. Kotarbiński był świadom, że jest to odejście od intuicyjnego rozumienia frazy *„jeżeli p, to q”* gdyż (pięknie) napisał: *„W tym miejscu grożą poważne nieporozumienia między rachunkiem zdań a Czytelnikiem”*. Pięknie by było, gdyby i dziś studenci ujawniali swoje wątpliwości, nawet zapisując je na marginesach studiowanych (?) dzieł. Ale oni nie mają na to czasu, bo „zaliczają” kolejne przedmioty. To wszystko, czego od nich się wymaga.

[30] Przypomnijmy: zdania-instancje tautologii to też nie wszystkie zdania prawdziwe.

[31] F.J. Pelletier, A Brief History of Natural Deduction (History of Philosophy of Logic, 20(1999),1-31). JanŁukasiewicz (1878-1956) m.in. twórca *logiki trójwartościowej*, pierwszej nieklasycznej logiki. Stanisław Jaśkowswki (1906-1965) od 1945 roku pracował na Uniwersytecie M. Kopernika w Toruniu a w latach 1959-1962 był jego rektorem.

Reguły (schematy reguł) gentzenowskiego systemu, poza ostatnią, są przyporządkowane poszczególnym spójnikom zdaniowym:

$$\frac{\Gamma \cup \{X\} \vdash Y}{\Gamma \vdash (X \to Y)} \qquad \frac{\Gamma \vdash (X \to Y) \quad \Gamma \vdash X}{\Gamma \vdash Y}$$

$$\frac{\Gamma \vdash X, \Gamma \vdash Y}{\Gamma \vdash X \wedge Y} \qquad \frac{\Gamma \vdash X \wedge Y}{\Gamma \vdash X} \qquad \frac{\Gamma \vdash X \wedge Y}{\Gamma \vdash Y}$$

$$\frac{\Gamma \vdash X}{\Gamma \vdash X \vee Y} \qquad \frac{\Gamma \vdash Y}{\Gamma \vdash X \vee Y} \qquad \frac{\Gamma \vdash X \vee Y \quad \Gamma \cup \{X\} \vdash Z \quad \Gamma \cup \{Y\} \vdash Z}{\Gamma \vdash Z}$$

$$\frac{\Gamma \cup \{X\} \vdash \underline{0}}{\Gamma \vdash \neg X} \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg X \quad \Gamma \vdash X}{\Gamma \vdash \underline{0}}$$

$$\frac{\Gamma \cup \{\neg X\} \vdash \underline{0}}{\Gamma \vdash X}$$

(X, Y, Z to dowolne formuły, $\underline{0}$ to stała reprezentująca fromułę niespełnioną ($\underline{0}(a_1, \ldots, a_n) = 0$). W lewej kolumnie mamy *reguły wprowadzania* a w prawej - *reguły eliminacji* poszczególnych spójników. Ostatnia reguła sankcjonuje „dowodzenie przez sprzeczność".
Można pokazać, że:

> *sekwent $\Gamma \vdash F$ ma dowód w systemie Gentzena dokładnie wtedy, gdy F jest konsekwencją koniunkcji wszystkich formuł ze zbioru Γ.*

Jednak intencje Gentzena były nieco inne. Pisał: *„moim głównym celem było stworzenie formalizmu maksymalnie bliskiego rzeczywistemu dowodzeniu"*. Dowodząc twierdzeń w ramach pewnej teorii używamy - jak zauważył Łukasiewicz - „stwierdzeń hipotetycznych": *„mogę uzasadnić dowodliwość stwierdzenia F, jeśli tylko założymy dowodliwość wszystkich stwierdzeń ze zbioru* Γ" (lub, bardziej konstruktywnie: *„mogę skonstruować dowód F, jeśli tylko dane są dowody wszystkich stwierdzeń ze zbioru* Γ").
Stwierdzenia hipotetyczne podlegają ocenie - mogą być poprawne lub nie. Gentzenowski system opisuje zbiór wszystkich poprawnych stwierdzeń hipotetycznych logiki zdaniowej:

> *sekwent $\Gamma \vdash F$ reprezentuje poprawne stwierdzenie hipotetyczne dokładnie wtedy, gdy ma dowód w systemie dedukcji naturalnej.*

Co więcej: *formuła zdaniowa F jest tautologią dokładnie wtedy, gdy sekwent $\emptyset \vdash F$ ma dowód w systemie dedukcji naturalnej.*

Trzeba przyznać, że aksjomaty i (większość) reguł systemu Gentzena są rzeczywiście „naturalne". To ważne, bo pojęcie „dowodu" („uzasadnienienia") funkcjonuje również poza matematyką. Dlatego jego matematyczna formalizacja musi być zgodna z jego powszechnie akceptowanym „pozamatematycznym" sensem: *„dowód formalny ma dla nas sens tylko dlatego, że u jego źródeł jest dowód nieformalny"*[32].

W gentzenowskim podejściu do logiki zdaniowej nie ma algebry wartości logicznych[33]. Spójniki zdaniowe są tu postrzegane wyłącznie jako konstruktory złożonych formuł zdaniowych i jako takie, są definiowane przez reguły wprowadzania i eliminacji w systemie dedukcji naturalnej. Np. reguła wprowadzania koniunkcji mówi, że jeśli sekwenty $\Gamma \vdash F$ i $\Gamma \vdash G$ są opisami poprawnych stwierdzeń hipotetycznych to mamy prawo uważać, że sekwent $\Gamma \vdash F \wedge G$ jest też opisem poprawnego sądu hipotetycznego. A reguła eliminacji dla tego spójnika mówi „coś odwrotnego". Podobnie interpretujemy reguły wprowadzania i eliminacji dla pozostałych spójników [34].

[32] S.Krajewski, *Czy matematyka jest nauką humanistyczną.*

[33] W akademickich wykładach student poznaje system Gentzena (jeśli w ogóle) jako wtórny opis „rachunku zdań", niemalże jako ciekawostkę. To sprzyja przekonaniu, że integralną częścią systemu Gentzena jest algebra wartości logicznych. To nieprawda.

[34] Zauważmy, że zestawy reguły wprowadzania i eleminacji dla poszczególnych spójników są niezależne od takich zestawów dla pozostałych spójników. To ważne, jeśli te reguły chcemy uznać za opisy definiujące spójniki w kontekście badań dowodów w systemie dedukcji naturalnej.

Odkrywca Frege v. wynalazca Gentzen

Should we be monist or pluralist about logic?

Opisy klasycznej logiki zdaniowej zaproponowane przez Fregego i .Gentzena są różne. I to bardziej, niż nam się wydaje.

Jednym z fundamentalnych sporów matematycznych jest spór o jej konstruktywny charakter. Nie wnikając w szczegóły: przyczyn matematycznego niekonstruktywiamu upatruje się m.in. w dopuszczeniu możliwości dowodzenia przez sprzeczność: *„jeśli założenie prawdziwości zdania „nieprawda, że A" prowadzi do absurdu, to zdanie A jest prawdziwe"*. To może wykluczyć tę możliwość? Z punktu widzenia Fregego to niemożliwe i bezsensowne, bo oznacza odrzucenie jednego z praw prawdziwości - tautologii $(\neg X \to \underline{0}) \to X$ - a nie możemy przeciwstawiać się jej prawom.

Gentzenowski opis klasycznej logiki zdaniowej zachęca do innego myślenia. Po pierwsze, wykluczenie dowodzenia przez sprzeczność jest banalnie proste, bo sprowadza się do wymazania pojedynczej reguły dowodzenia. Po drugie, co stoi na przeszkodzie, by tak „zubożony" system uznać za opis nowej, odmiennej od klasycznej, logiki zdaniowej? Ten system USTANAWIA nowe prawa prawdziwości. Ustanawia nową logikę.

> Jesteśmy twórcami, a nie odkrywcami - również w odniesieniu do logiki.
> Logika nie jest logiczną koniecznością.

Tak zubożony system dedukcji naturalnej opisuje *intuicjonistyczną logikę zdaniową*. Ta logika odgrywa kluczową rolę w *teorii toposów* o której będę pisał w drugiej części tego skryptu.

W Stanfordzkiej Encyklopedii Filozofii napisano tak: *„Intuitionistic and constructive logic began when people saw the possibility of reading $A \to B$, as „if you give me an A, I will give you a B", which is a significant departure from the classical reading „B is true whenever A is"*[35].

Istnieje wiele logik. Ale po co nam one?
Zdania *„Jeśli mam 12 zł, to stać mnie na jasne piwo"* oraz*„Jeśli mam 12 zł, to stać mnie na ciemne piwo"* można uznać za prawdziwe[36]. Ale nikt przytomny nie powie, że *„jeśli mam 12 zł, to stać mnie na jasne i ciemne piwo"* - klasyczna reguła $\frac{\Gamma\vdash p, \Gamma\vdash q}{\Gamma\vdash p\wedge q}$ nie ma tu zastosowania. Tu potrzeba logiki, w której *„realizacja konkluzji powoduje wyczerpywanie przesłanek"*. To jest paradygmat rozwijanej na potrzeby informatyki teoretycznej *logiki liniowej*: *„Logika liniowa to wzbogacenie (refinement) logiki klasycznej i intuicjonistycznej. Zamiast koncentrować uwagę na prawdzie, jak w logice klasycznej, lub dowodzie, jak w logice intuicjonistycznej, logika liniowa podkreśla rolę formuł jako zasobów. (...) Logika liniowa zaczyna się od nowego odczytania „$A \to B$": czytamy to teraz „daj mi tyle A, ile będę potrzebować, a dam ci jedno B."* [37].

Inny przykład. Któż zabroni z przesłanki *„Jasiu znów zapłacił mandat"* wywnioskować, że *Jasiu już kiedyś zapłacił mandat"*? Ale klasyczna logika zdaniowa nas do tego nie upoważnia. Ona formalizuje tylko fragment logiki języka naturalnego[38]. Ta logika traktuje oba przytoczone zdania jako zdania proste. A żadne zdanie proste nie jest konsekwencją innego zdania prostego[39]. Gdyby stworzyć logikę, która frazy *„znów"* i *„kiedyś"* traktuje jako spójniki tworzące zdania złożone i gdyby dodać aksjomat $\frac{}{\textit{znów } A \vdash \textit{kiedyś } A}$, to dwa zdania o przypadkach Jasia byłyby związane (dowodliwą formalnie) relacją konsekwencji[40].

---

[35] *http://plato.stanford.edu/entries/logic-linear/*. Dosłownie to samo zdanie można znaleźć w artykule M.Gaboardiego, A.Momigliano i C.Schurmann dostępnym w internecie (http://momigliano.di.unimi.it/teaching/ Corsi di Dottorato/Linear Logic/outline.pdf). Autorzy jednak nie wskazują SEF jako źródła... Śmieszne? Mało.

[36] Kilka lat temu, gdy zaczynałem spisywać te notatki„ zamiast „12" była „7"... .

[37] *http://plato.stanford.edu/entries/logic-linear/*. Jednym z twórców logiki liniowej jest Y. Girard.

[38] Która, *in extenso*, najprawdopodobniej jest wewnętrznie sprzeczna.

[39] Reguły wnioskowania logiki zdaniowej formułowane są w oparciu o analizę struktury syntaktycznej (budowy) zdań-przesłanek i zdania-konkluzji. A struktura zdań prostych jest „atomem", jest niewidoczna.

[40] Jeśli zamiast tworzonego *ad hoc* przykładu rozszerzenia logiki zdaniowej ktoś chciałby czegoś, co rzeczywiście zajmuje logików, to polecam *modalną logikę zdaniową* w której frazy *„jest konieczne"* i *„jest możliwe"* są konstruktorami zdań złożonych. A potem warto poszukać w internecie (np. w Stanfordzkiej Encyklopedii Filozofii) objaśnień

> Możemy tworzyć różne logiki dla realizacji różnych celów. To różni jej współczesne i klasyczne rozumienie - logika nie jest odkrywaniem prawd uniwersalnych ale kreacją.
>
> *„Logiczny ład świata to nasza modlitwa do piramidy chaosu”*[41].
>
> Logika jest częścią języka. Jest naszą świadomością jego możliwości poznawczych.
> Jest wiele sposobów postrzegania świata. Jest wiele języków opisujących te postrzegania. Jest wiele logik. Klasyczna dwuwartościowa logika to tylko jedna z nich.

6.2.3 Język, logika, teoria, interpretacja, model - po raz pierwszy

„Mathematics and Logic, historically speaking, have been entirely different studies. Mathematics has been connected in Science, Logic with Greek.” *B. Russell*

Nic nie stoi na przeszkodzie, by dołączyć do systemu Gentzena dowolny sekwent, traktując go jako nowy aksjomat:

$$\overline{\Gamma \vdash F}$$

System Gentzena wzbogacony o zbiór T takich „nowych” aksjomatów to *teoria zdaniowa (propositional theory)*, którą oznaczać będziemy symbolem $PTh(T)$ [42].

Wyróżnijmy składowe teorii $PTh(T)$:

- *teoria $PTh(T)$ ma swój język, którym jest język formuł zdaniowych Form(Z),*
- *język teorii $PTh(T)$ ma swoją logikę opisaną przez system Gentzena. Aksjomaty tego systemu to aksjomaty logiczne teorii $PTh(T)$,*
- *aksjomaty specyficzne teorii $PTh(T)$ to sekwenty ze zbioru T,*
- *twierdzenia teorii $PTh(T)$ - „treść teorii” - to sekwenty dowodliwe w systemie Gentzena wzbogaconym o aksjomaty specyficzne.*

Wittgenstein mówił: *„The rules of logical inference are rules of the language-game”*. Areną gry związanej z teorią zdaniową $PTh(T)$ jest język formuł zdaniowych, a system dowodzenia związany z tą teorią to opis reguł gry. Zadaniem gracza jest konstrukcja dowodu rozważanego twierdzenia.

Matematyka to gra? Pytanie tym bardziej zasadne, że - co pokażemy za chwilę - każdą aksjomatyczną teorię można traktować jako opis zasad pewnej językowej „gry w dowodzenie”.
Zatem: czy matematyka to gra? Tak może powiedzieć matematyczny formalista[43]. Ale matematyczni realiści SENS swego działania widzą w tym, że udowodnione twierdzenia można interpretować w rzeczywistym świecie, lub - jak kto woli - w matematycznym uniwersum.

> Termin ”matematyczne uniwersum” odnosi się do koncepcji filozoficznej, która zakłada, że struktura i zasady rządzące wszechświatem mają naturę matematyczną - tak głosi wikipedia. Nie chcę wikłać się w filozoficzną dyskusję o tym, czym właściwie jest owa „matematyczna natura” wszechświata. Na potrzeby tego tekstu przyjmijmy, że oznacza to tylko tyle, że sposobem poznania wszechświata jest opis jego mniejszych i większych fragmentów za pomocą matematycznych teorii.

---

terminu *modalne logiki epistemiczne.*

[41] S.Lem, *Śledztwo*. W oryginale: „matematyczny” a nie „logiczny”. Pisarz następnego pokolenia S.Twardoch mówi jeszcze smutniej: *„Rzeczywistość jest chaosem, który łatwo nie poddaje się procesom nadawania sensów”*. Nieco mniej patetycznie: *„(...) język nigdy nie jest neutralny. Ludzie lubią myśleć, że odzwierciedla świat. To nieprawda. Słowa odzwierciedlają jedynie nasze rozumienie świata, nie rzeczywistość” - G. Lakoff.*

[42] Uściślijmy: jeśli rozważamy system Gentzena w wersji intuicjonistycznej, to mamy do czynienia z intuicjonistyczną teorią zdaniową. Przykładem takiej teorii jest... klasyczny system Gentzena: otrzymamy go dodając aksjomat odpowiedzialny za prawo wyłączonego środka. Teorie zdaniowe nazywane są czasem *teoriami rzędu zero.*

[43] *Formalizm - kierunek w filozofii matematyki, który postuluje, że matematyka jest systemem formalnym, (...) który zawiera aksjomaty, pewien zespół definicji oraz wyprowadza swoje wnioski w oparciu o te pojęcia korzystając z rachunku logicznego zdań (wikipedia)*

Tak należy patrzeć na opisane wcześniej rozwiązanie tego problemu dla klasycznych teorii zdaniowych zaproponowane przez Fregego:

- „po stronie syntaktycznej” mamy język formuł zdaniowych, klasyczne teorie zdaniowe i związane z nimi systemy dowodzenia,

- „po stronie semantycznej” jest dwuelementowa algebra wartości logicznych - obiekt matematycznego uniwersum który jest „matematycznym kodem” pełnej informacji o najprostszych spójnikach zdaniowych.

Interpretacją języka formuł zdaniowych „w matematycznym uniwersum” jest funkcja $f\colon Form(Z) \to \{0,1\}$, która jest rekurencyjnym rozszerzeniem wartościowania zmiennych zdaniowych (str. 65). Interpretacja f jest*modelem* zdaniowej teorii T, gdy $f(\phi) = 1$ dla każdego aksjomatu specyficznego $\phi \in T$. I jest pięknie: formuła zdaniowa ψ jest dowodliwa w systemie dowodzenia stowarzyszonym z teorią zdaniową T dokładnie wtedy, gdy $f(\psi) = 1$ dla każdego modelu f teorii T.

> Dowodząc stwierdzeń w systemie Gentzena stowarzyszonym z klasyczną teorią zdaniową T poznajemy „fragment” uniwersum związany z jego logiką.
>
> *„Dowód matematyczny jest bramą do królestwa transcendentnej prawdy”*

Ale ten piękny obrazek ma, przy bardziej wnikliwym oglądzie, pewną rysę: co zrobić z nieklasycznymi intuicjonistycznymi teoriami zdaniowymi? Dla zdaniowej logiki intuicjonistycznej nie mamy odpowiednika dwuelementowej algebry wartości logicznych Boole'a i Fregego z prostego powodu: ta logika nie ma ustalonej *a priori* „matrycy wartości logicznych”. Jak więc rozumieć jej semantykę, jak interpretować ją w matematycznym uniwersum? Czyżby zdaniowe teorie intuicjonistyczne były tylko i wyłącznie opisem zasad „gry językowej”?

Tak nie jest - te teorie mają swoja semantykę. Jednak opis tej semantyki jest na tyle złożony, że musimy go odłożyć do końcowych fragmentów drugiej części tych notatek.

Jest jeszcze druga rysa: klasyczne teorie zdaniowe są najprostszymi teoriami funkcjonującymi w matematyce. To teorie „rzędu zero”. Najważniejsze w matematyce są teorie pierwszego rzędu. Opis tych teorii i ich semantyk (modeli) jest zdecydowanie bardziej skomplikowany niż w wypadku teorii zdaniowych.

Zajmiemy się tym tematem już w następnym rozdziale.

Dodatek: o (drobnym) nieporozumieniu wokół kreski Sheffera

Kreska Sheffera jest bliska tym, którzy znają *sieci boolowskie (logiczne)*. Jest to dwuargumentowy spójnik zdaniowy wprowadzony jako „skrót”:

$$p|q \equiv \neg(p \land q)$$

Zdanie $p|q$ jest prawdziwe gdy zdania p i q wzajemnie się wykluczają - nie są jednocześnie prawdziwe. Za pomocą tego spójnika można odtworzyć (zdefiniować) wszystkie klasyczne spójniki zdaniowe:

$$\neg p \equiv p|p, \qquad p \land q \equiv (p|p)(q|q), \qquad p \lor q \equiv (p|q)(p|q).$$

To prowokuje do pytania: jaki kształt przyjęła by logika, gdyby kreska Sheffera była podstawowym i jedynym spójnikiem służącym do konstrukcji zdań złożonych?

Pytanie ciekawe, ale ... bezprzedmiotowe. Bo nie ma takiego języka naturalnego, w którym funkcjonuje kreska Sheffera. Nie ma języka, w którym fraza *„p kreska p”* zastępuje frazę *„nieprawda, że p”*. „Odkrycie” kreski Shaffera i jej zastosowanie w projektowaniu sieci boolowskich to efekt wtórny formalizacji i algebraizacji logiki zdaniowej[44]. A logika jest logiką języka. Koniec bajki.

[44] Algebraizacja logiki zdaniowej polega na algorytmicznym obliczaniu wartości formuł zdaniowych w dwuelementowej algebrze wartości logicznych (algebrze Boole'a) - $(\{0,1\}, \land, \lor, \neg)$. Ta algebra jest *zupełna* co oznacza, że wszystkie funkcje typu $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ można opisać za pomocą formuł zdaniowych. To zapoczątkowało badanie *sieci boolowskich*. Kreska Sheffera pełni tu ważną rolę, bo pozwala realizować te sieci jako „struktury jednorodne”, utworzone z bramek „nand”.

Rozdział 7

Język matematyki

Aby badać matematykę, badamy jej przybliżenia wyrażone w językach pierwszego rzędu. - R. Drake[1]

Define a full logic to be a language, together with a deductive system and a semantics.
S. Shaprio [70]

Odtąd, mówiąc o aksjomatycznych teoriach matematycznych, będziemy mieli na uwadze tzw. *teorie pierwszego rzędu.* Przytoczona jako motto wypowiedź R. Drake'a niech nam wystarczy jako usprawiedliwienie przyjętego samoograniczenia.

Przedmiotem zainteresowania matematyki są własności wiecznotrwałych i niezmiennych obiektów oraz układów takich obiektów.

Skoro tak, to dyskusję o języku matematyki trzeba zacząć od próby odpowiedzi na pytanie:

Co to jest „własność”?

„Koń jaki jest, każdy widzi” - czyż ta defincja Benedykta Chmielowskiego[2] nie jest najlepszą odpowiedzią, jaka możemy udzielić pytani o rzeczy oczywiste? Ale matematyka nie toleruje zbyt wielu oczywistości. Dlatego potraktujemy to pytanie poważnie.

Zacznijmy naiwnie: *„własność jest po to, by dzielić obiekty na te, które ją mają (czyli desygnaty tej własności) i te, które jej nie mają”*. Nic dziwnego, że teoria mnogości oparta na paradygmacie „wszystko jest zbiorem” uległa pokusie utożsamiania własności ze zbiorem jej desygnatów[3]. Ta propozycja jest atrakcyjna z kilku powodów:

- *nie mnożymy pojęć podstawowych ponad miarę (brzytwa Ockhama),*
- *jest zgodna z naszym doświadczeniem świata zbiorów skończonych.*

A jednak... . Z całą jaskrawością ujawnia się tu groza niefrasobliwego przenoszenia doświadczeń świata skończonego w kosmos zbiorów nieskończonych... Jeśli zgodzimy się, że „być zbiorem” jest własnością (dlaczego nie?), a „własność = zbiór”, to musimy uznać istnienie „zbioru wszystkich zbiorów”. A to doprowadziło Russella do odkrycia paradoksu, znanego dziś jako - jakby inaczej - *paradoks Russella*:

zbiór wszystkich zbiorów U ma tę własność, że jest własnym elementem, $U \in U$. A np. $\mathbf{N} \notin \mathbf{N}$. - zbiór liczb naturalnych nie ma tej własności. Konsekwentnie, możemy mówić o zbiorze K tych zbiorów, które nie są swoimi elementami:

$$K = \{A\colon\ A \text{ jest zbiorem i } A \notin A\}$$

Prosta analiza pokazuje, że:

$$K \in K \text{ dokładnie wtedy, gdy } K \notin K$$

To był szok. A nawet dramat[4]. I koniec tzw. naiwnej teorii zbiorów. Naiwnością okazało się aprioryczne

[1] *On the Foundations of Mathematics in 1987, Logic Colloquium'87, 1987.*
[2] *Nowe Ateny* - pierwsza polska encyklopedia.
[3] To jest tzw. *ekstensjonalne* rozumienie własności.

założenie, że język opisu uniwersum można stworzyć odwołując się - również w sferze metajęzyka - do jedynego pojęcia pierwotnego - zbioru - i pojedynczej zależności między zbiorami - relacji przynależności.

Związek między zbiorami i własnościami okazał się bardziej subtelny. *„Własność, którą potrafimy opisać w języku teorii zbiorów, wyznacza podzbiór dowolnego zbioru A złożony z elementów A posiadających tę własność"*. To pozwala uniknąć paradoksu Russella: własność $(x = x)$ - *„jestem zbiorem równym samemu sobie"* - która wcześniej wyznaczała zbiór wszystkich zbiorów - teraz wyznacza podzbiór dowolnego zbioru A (równy całemu zbiorowi A).

Równość „własność = zbiór" zamieniono na „własność = podzbiór (dowolnego zbioru)"[5].

To wszystko prowadzi do odmiennego, *intensjonalnego* rozumienia własności: jej niezbywalnym atrybutem jest to, że jest opisana w pewnym języku[6].

Jednak pełna swoboda języka opisu własności też jest niebezpieczna:

Paradoks Richarda [85]: *liczb rzeczywistych, które potrafimy opisać za pomocą skończonej liczby słów języka polskiego jest przeliczalnie wiele. Można je więc ponumerować, ustawić w ciąg* $(a^0, a^1, \ldots, a^n, \ldots)$ *korzystając np. z leksykograficznego uporządkowania ich skończonych opisów. Oznaczmy zbiór tych liczb przez* E *. Niech* $(a^i_0, a^i_1, a^i_2, \ldots)$ *bedzie rozwinięciem dziesiętnym liczby* a^i [7]*. Rozważmy liczbę* b *, której rozwinięcie dziesiętne* $(b^0, b^1, b^2, \ldots)$ *wygląda tak:* $b_n = a^n_n + 1$ *jeżeli* $a^n_n \neq 9$ *i* $b_n = 0$ *- w przeciwnym przypadku. Liczba* b *należy do zbioru* E *(bo właśnie przedstawiliśmy jej skończony opis). Ale to niemożliwe, bo przecież* $b_n \neq a^n_n$*, czyli* $b \neq a^n$ *dla dowolnej liczby naturalnej* n*!*

Kto winien, co zawiodło[8]? Przyczyną zamieszania jest to, że definicja (konstrukcja) ciągu (b_n) to przykład *definicji impredykatywnej*. Russell, twórca tego terminu, ilustrował go takim przykładem:*„a typical Englishman is one who possesses all the properties possessed by a majority of Englishmen"*. W dużym uproszczeniu: predykatywizm (przeciwieństwo impredykatywizmu) zakazuje formułowania własności, których desygnaty można określić jedynie odwołując się do całego zbioru desygnatów. Tak jak nasz ciag (b_n), którego skończony opis odwołuje się do zbioru E wszystkich ciągów o skończonym opisie[9].

Podobny kłopot miał G. Frege gdy definiował własność $N(x)$ „być liczbą naturalną" tak: zbiór A spełnia formułę $N(x)$ (czyli jest liczbą naturalną) jeżeli A spełnia każdą „własność hierarchiczną", która jest spełniona przez zbiór pusty. Własność jest hierarchiczna, gdy z tego, że przysługuje zbiorowi B wynika, że przysługuje też zbiorowi $B \cup \{B\}$[10]. To definicja impredykatywna, bo definiuje POJEDYNCZĄ hierarchiczną własność „bycia liczbą naturalną", odwołując się do wszystkich własności hierarchicznych.

Użycie definicji impredykatywnych może prowadzić do tzw. błędnego koła: zrozumiesz to, gdy spró-

[4]G. Frege tuż przed ukończeniem dzieła, które w jego mniemaniu miało stworzyć podstawy matematyki, otrzymał od Russella list opisujący ten paradoks. Wtedy dopisał do swego dzieła postscriptum: *„Uczonego rzadko może spotkać coś bardziej niepożądanego niż utrata podstaw akurat w momencie ukończenia pracy... .*

[5]Warto choćby wspomnieć o teorii zbiorów von Neumanna–Bernaysa–Gödla (*„NBG set theory"*, w której pojęciem pierwotnym jest klasa. Własność wyznacza klasę a nie zbiór. Zbiór to element pewnej klasy.

[6]Konstruktywiści odnosili wymóg „intensjonalności" również do zbiorów: E. Bishop pisał: *„a set is not an entity which has an ideal existence. A set exists only when it has been defined."*.
IntenCjonalny czy intenSjonalny? Filozofowie nie są zgodni w opisie relacji między tymi pojęciami (*„Umysł wobec świata" , K.Gajewski (internet)*). Przyjmuje się, że - w odniesieniu do matematyki - sa to pojęcia bliskie, a ich sens wyraża stwierdzenie: itencjonalność to aktywny stosunek umysłu do przedmiotu poznania. Zainteresowanym polecam hasło *„Intesional logic"* w Stanfordzkiej Encyklopedii Filozofii (internet).

[7]To rozwinięcie może być nieskończone, np. $\frac{1}{3} = 0,33333\ldots$. Gdy jest skończone, to uzupełniamy je do nieskończonego dopisując zera.

[8]Powołajmy komisję śledczą...

[9]Co z tym „typowym Anglikiem"? Jest jasne, że większość Anglików (ma tę cechę, że) nie ma wszystkich cech, które ma większość Anglików (bo „większości" odpowiadające różnym cechom mogą być różne). Zatem, zgodnie z definicja, typowy Anglik musi być jednocześnie... nietypowy.
Przykładem ilustrującym niebezpieczeństwa impredykatywizmu jest definicja równości Leibniza: *„obiekty A i B są równe, jeżeli każda własność przysługująca A przysługuje B. I odwrotnie"*. Czy „być równym A" jest własnością?

[10]Frege, współtwórca logicyzmu traktującego matematyke jako część logiki, uznawał prymat własności nad zbiorem.

bujesz - korzystając z definicji Fregego - pokazać, że $\underline{1} = \emptyset$ jest liczbą naturalną). *Viciuos Circle Principle (VCP)* sformułowane przez Russella i Poincarego zakazywało rozpatrywania obiektów definiowanych impredykatywnie. Zbiór opisany w paradoksie Richarda jak i „zbiór liczb naturalnych Fregego" są wtedy „zakazane".

> Być może, to właśnie kłopoty z definicją Fregego sprawiły, że w teorii mnogości mamy aksjomat orzekający o istnieniu (najmniejszego) zbioru induktywnego a własnością wyróżniającą zbiory-liczby naturalne jest przynależność do tego zbioru (str. 11).

Jeśli to mało (by zgodzić się, że wybór języka decyduje o tym, jak rozumiemy własność), to proponuję analizę PARADOKSU BERRY'EGO: *„n jest najmniejszą liczbą naturalną, której* NIE MOŻNA *opisać (w języku polskim) za pomocą mniej niż stu słów"* . Tu przyczyną kłopotu jest bezkrytyczne uznanie, że wiemy, czym jest „opis"[11].

> Możemy zmieniać język dostosowując go do aktualnych celów badawczych - to oczywiste. Ale mniej oczywiste jest, że można wskazać uniwersalny język pozbawiony ograniczeń jakie mają języki „lokalne" tworzone z myślą o konkretnych zadaniach badawczych.

7.0.1 Genialny wynalazek: formuła

„Symbol góruje nad wyrazem nie tylko krótkością i jasnością, lecz ma inną jeszcze zaletę pierwszorzędną dla matematyka: sam przez się nie oznacza nic a nic" *H. Steinhaus*[12]

Aby uniknąć kłopotów z rozumieniem opisu własności bytów matematycznych, lepiej zapomnieć o wieloznacznych językach naturalnych. Matematyka potrzebuje własnego języka, który będzie wolny od tej wady - to jedno z założeń „programu naprawczego" przyjętego przez Hilberta i innych matematyków na przełomie XIX i XX wieku.

Formalne języki matematyczne pierszego rzędu charakteryzują się tym, że operujemy w nich pojęciem *zmiennej (przedmiotowej).*

> Nie ma tekstu matematycznego bez „x-sów", „y-greków" i im podobnych symboli, które śnią się po nocach maturzyst(k)om. Mentalna akceptacja pojęcia zmiennej to dowód pewnej dojrzałości matematycznej.

Wprowadzenie zmiennych umożliwia opis własności obiektów matematycznych za pomocą *formuł*. Włączenie formuł do języka matematyki jest genialnym w swojej prostocie wynalazkiem, porównywalnym z wynalezieniem druku[13]. Aby wyjaśnić skąd ten entuzjazm, popełnimy małe nadużycie i opowiemy o - w rzeczywistości nieistniejących - „formułach języka polskiego".

Stwierdzenie *„być miastem nadwiślańskim"* to niezgrabny, ale zrozumiały opis własności przysługującej pewnym polskim miastom. Toruń ma tę własność a Poznań jej nie ma.

Sformalizujmy to: *formuły zdaniowe* tworzymy korzystając z tych samych reguł gramatycznych, które obowiązują przy budowie zdań orzekających. Różnica w tym, że budując formuł używamy, obok słów języka polskiego, specjalnych symboli - *zmiennych*.

Zapis „x `jest miastem nadwiślańskim`" jest formułą. Jeśli zmienną x zastąpimy nazwą „`Toruń`", to otrzymamy prawdziwe zdanie „`Toruń jest miastem nadwiślańskim`". I powiemy, że

formuła ,,x `jest miastem nadwiślańskim"` *jest spełniona przy wartościowaniu $x :=$* `Toruń`
albo:

obiekt o nazwie `Toruń` *ma własność opisaną przez naszą formułę.*

[11] Berry nie był matematykiem ale bibliotekarzem, który podzielił się swoimi przemyśleniami z ... Russellem.

[12] *„Czym jest a czym nie jest matematyka", Lwów 1923*

[13] By to docenić, wystarczy spróbować przeczytać jakąkolwiek pracę matematyczną z okresu przed upowszechnieniem tego wynalazku. *(...) wynalezienie zmiennych stanowi punkt zwrotny w dziejach matematyki; dzięki symbolom tym człowiek zdobył narzędzie, które utorowało drogę rozwojowi wiedzy matematycznej [81]*

A gdy za zmienną x wstawimy nazwę „`Poznań`", to otrzymamy sąd fałszywy - nasza formuła *nie jest spełniona* przy wartościowaniu $x :=$ `Poznań`.

> Formuła to SCHEMAT reprezentujący zdania które z niej uzyskamy zastępując zmienne przedmiotowe nazwami obiektów. Takie zdania to jej *instancje*.
> Formuła jest opisem własności. Jeśli formuła $\phi(x)$ opisuje własność W a zdanie-instancja otrzymana przez zastąpienie zmiennej x nazwą obiektu O jest prawdziwe, to obiekt O ma własność W.[14].

Dodajmy kolejny element do tej układanki. Własność *„bycia miastem nadwiślańskim"* badaliśmy w odniesieniu do zbioru polskich miast. Ale można też pytać, które z miast europejskich ma tę własność. Tę samą własność można badać w różnych kontekstach wyznaczanych przez *zakres zmienności* zmiennych występujących w formule. Matematyk powie - w różnych *modelach* języka[15] .

Własność może być atrybutem pojedynczego obiektu, ale też wyróżnikiem pary, trójki czy skończonego ciągu obiektów. Np. własność „x `jest miastem mniejszym niż` y" przysługuje parze `(Toruń, Poznań)`, bo ta formuła jest spełniona przy wartościowaniu $[x :=$ `Toruń`$, y :=$ `Poznań`$]$. A nie jest spełniona przy wartościowaniu $[x :=$ `Warszawa`$, y :=$ `Toruń`$]$.
Nie ma istotnej różnicy między opisem jedno- i wieloargumentowych własności za pomocą formuł. Poza tą, że opisując własności par używamy formuł z dwiema zmiennymi. Opisując własności trójek obiektów użyjemy trzech zmiennych. I tak dalej.
Skoro formuły to schematy zdań, to nie dziwi, że do budowy *formuł złożonych* umożliwiających opis złożonych własności używamy spójników znanych z logiki zdaniowej. Tak zbudujemy np. formułę „(x `jest miastem nadwiślańskim)` $\wedge$ (x `jest siedzibą uniwersytetu)`". Ocena, czy taka formuła jest spełniona np. przy wartościowaniu $[x :=$ `Toruń`$]$ (czy `Toruń` ma tak opisaną własność) wymaga tylko elementarnej umiejętności obliczania wartości logicznej zdania złożonego (i pewnej wiedzy o Toruniu).

Nasze intuicje związane z przypisywaniem obiektom własności zostały w ten sposób - poprzez wprowadzenie pojęcia formuły i jej spełniania - sformalizowane. Mamy język opisu własności.

Kolejny krok w stronę formalnego języka matematycznego, to wprowadzenie do opisu własności specjalnych symboli. I tak jeśli umówimy się, że symbol „>" zastępuje frazę `,,jest większy od"`, to przydługi zapis `,,`x `jest większy od` y`"` zastąpimy zgrabnym $x > y$.

Ot, cała tajemnica...

Równie genialny pomysł - termy

> Są dwa sposoby identyfikowania obiektu. Pierwszy - przez opis jego własności. Drugi - poprzez nazwę.

Są dwie kategorie nazw. Najprostsze to *identyfikatory* nadawane obiektom bez szczególnego uzasadnienia. Nazwa-identyfikator *Toruń* jednoznacznie wskazuje pewne polskie miasto[16]. *Nazwy złożone* pojawiają się wtedy, gdy zauważymy (udowodnimy), iż pewna własność pary (trójki, etc.) elementów ma *charakter funkcyjny*. Np. własność opisana np. formułą `,,x jest ojcem y"` - ma charakter funkcyjny, bo każdy człowiek ma jednego ojca. Dlatego można wprowadzić do języka złożoną nazwę `ojciec(Bolesława Chrobrego)` wskazującą osobnika, któremu przypisaliśmy wcześniej identyfikator - `Mieszko I`[17].

Podobnie funkcjonują nazwy w matematyce. Prześledźmy jak to działa w arytmetyce.

---

[14]G.Frege, któremu można przypisać wynalezienie formuł, mówił nie o własnościach ale o pojęciach: *„A concept is a function of a special kind: one whose value, for every argument, is a truth value. If a concept-word is completed by inserting a word for an object, which Frege calls a proper name, into the blank space, the result is a sentence" [66]*

[15]Definicję modelu języka poznamy później. Teraz wystarczy nam kojarzenie „modelu" z apriorycznym wyznaczeniem zakresu zmienności zmiennych przedmiotowych.

[16]Znawcy przedmiotu powiedzą, że mówimy tu o *nazwach własnych: „Karol to po prostu ten, kto został nazwany Karolem, i nie można na podstawie takiej definicji stwierdzić, komu jeszcze mogłaby taka nazwa przysługiwać" (wikipedia). „Sens nazwy własnej pojmuje każdy, kto jest wystarczająco obeznany z językiem" (Frege).*

[17]`ojciec(Mieszka I)` (który niewątpliwie istniał) jest identyfikowany tylko przez tę złożoną nazwę, a nie przez przypisaną mu nazwę własną.

Liczby naturalne - numerały - to identyfikatory. Własności „z `jest sumą liczb` x `i` y" i „z `jest iloczynem liczb` x `i` y" mają charakter funkcyjny - suma i iloczyn dwóch liczb są wyznaczone jednoznacznie. Zastępując zwroty „`jest sumą`" i „`jest iloczynem`" symbolami „+" i „·" można do języka arytmetyki włączyć złożone nazwy takie jak np. $2+2$ czy też $3 \cdot 11$ identyfikujące jednoznacznie pewne liczby. Nic też nie stoi na przeszkodzie, by - korzystając z *konstruktorów nazw* - „+" i „·" - budować dowolnie skomplikowane nazwy - np. $2 \cdot (3+8)$, $(7+3)\cdot(2+1)$.

Stąd tylko krok by pojąć, czym w językach formalnych matematyki są *schematy nazw* zwane *termami*. To wyrażenia budowane tak jak nazwy złożone, z tą różnicą, że do ich budowy używamy - obok nazw-identyfikatorów - tych samych zmiennych przedmiotowych, które odegrały tak istotną rolę w budowie formuł. Np. napis $(x+3)\cdot y$ jest *termem arytmetycznym* - schematem nazwy w języku arytmetyki. Nazwa złożona to teraz term w którym nie ma zmiennych - *term domknięty*.

Podobnie jak formuła, term to SCHEMAT reprezentujący klasę złożonych nazw, które uzyskamy ZASTĘPUJĄC zmienne w nim występujące termie przez identyfikatory[18].

Nazwy wskazują obiekty. Można je wstawiać - w procesie wartościowania formuł - w miejsce zmiennych. Np. możemy pytać, czy formuła $x \leqslant y$ jest spełniona przy wartościowaniu $[x := 2+2, y := 3]$ (nie jest). To oczywiste. Natomiast *podstawiając* w formule za zmienne przedmiotowe termy zawierające zmienne tworzymy nowe formuły. Np. $x \leqslant y \rightsquigarrow x+z \leqslant y\cdot(x+1)$ (podstawiliśmy tu term $x+z$ w miejsce z , a term $y\cdot(x+1)$ w miejsce y).

Wprowadzenie termów do języka matematyki stwarza możliwość operowania specyficznymi formułami zwanymi *równościami*. To napisy kształtu $t = p$ gdzie t i p są termami. Np. $x+y = y+2\cdot x$. To pozwala mówić o własnościach „opisywanych równościowo".

Wprowadzenie termów wzbogaciło składnię formalnych języków matematyki.
Co to daje? Nic, gdy mamy na uwadze li tylko siłę języka - wszystko, co powiemy w języku pierwszego rzędu z termami da się wyrazić w języku, w którym ich brak.
Ale język jest nie po to, by był, ale po to, by się nim posługiwać. Dlatego wzbogacenie język o termy jest istotne.
Oto przykład: dwie formuły arytmetyczne - $suma(x,y,z) \wedge suma(x,y,t) \rightarrow (z=t)$ oraz $x+y = y+x$ opisują przemieność dodawania. W drugiej formule użyliśmy termów, w pierwszej nie.
Który opis jest bardziej przyjazny?

7.1 Diabelska sztuczka - kwantyfikatory

Kwantyfikatory służą do pogarszania samopoczucia studentów... .

Wprowadzenie zmiennych prowadzi do wzbogacenia składni języka formuł - obok koniunkcji, alternatywy, negacji i implikacji pojawia się nowy rodzaj konstruktorów - *kwantyfikatory*.
Zacznijmy tak: gdy obu zmiennym występującym w formule:

„x `jest miastem większym od każdego miasta` y"

przypiszemy wartości - np. $[x := \texttt{Warszawa}, y := \texttt{Gdynia}]$ - to otrzymamy stwierdzenie:

„`Warszawa jest miastem większym od każdego miasta Gdynia`"

pozbawione nie tylko wartości logicznej, ale i sensu.

Fraza „*dla każdego*" poprzedzająca zmienną y zasadniczo zmieniła jej rolę. Logicy powiedzą, że została

[18]W lingwistyce (niematematycznej) zamiast o termach mówi się o *formułach nazwowych*. My ten drugi termin będziemy używać w nieco innej, niż rozpatrywana teraz, sytuacji.
A. Tarski w [81] używa terminów *funkcja zdaniowa* i *funkcja nazwowa*.

ona *związana* przez kwantyfikację. Zmienna x pozostała *wolna*. Nowa formuła nie opisuje już własności pary obiektów (co sugeruje liczba zmiennych), ale własność pojedynczego obiektu (bo tylko jedna zmienna jest wolna, niezwiązana).

Zapiszmy naszą formułę tak, by wyraźnie wskazać zmienną związaną:

„`dla każdego` y`:` x `jest miastem większym od miasta` y"

a frazę *„dla każdego y"* zastąpmy specjalnym symbolem - *kwantyfikatorem uniwersalnym*[19]:

$\forall_y$ (x `jest miastem większym od miasta` y)

Ta formuła (z jedną zmienną wolną x!) jest spełniona przy wartościowaniu [$x :=$ `Warszawa`] w modelu „polskie miasta" wtedy, gdy formuła o dwóch zmiennych wolnych powstała przez pominięcie kwantyfikacji:

„x `jest miastem większym od miasta` y"

jest spełniona dla **każdego** wartościowania postaci [$x :=$ `Warszawa`, $y := M$] gdzie za M możemy wstawić **dowolne** polskie miasto[20] .

To jest nie tylko zgodne ze zdrowym rozsądkiem. To jest też *opis procedury* orzekania o spełnianiu formuł tego kształtu:

aby sprawdzić, czy formuła $\forall_y\, \phi(x, y)$ *jest spełniona dla wartościowania zmiennej wolnej* $[x := A]$ *uwalniamy ją od kwantyfikatora uniwersalnego i testujemy spełnianie formuły* $\phi(x, y)$ *dla wszystkich wartościowań postaci* $[x := A, y := M]$ *, gdzie za* M *przyjmujemy kolejno wszystkie obiekty rozważanego modelu. Jeśli* **przy wszystkich** *takich wartościowaniach formuła* $\phi(x, y)$ *jest spełniona, to pierwotna formuła* $\forall_y\, \phi(x, y)$ *jest spełniona przy wartościowaniu* $[x := A]$.

Jest jeszcze drugi kwantyfikator - *egzystencjalny* (oznaczany symbolem $\exists$): formułę

„x `jest większe od pewnego miasta` y"

zapiszemy - porządkując składnię i wprowadzając symbol „$\geqslant$" - tak:

„$\exists_y$`:(`x `jest większe od` y`")` lub „$\exists_y(x \geqslant y)$"

Procedurę sprawdzania spełnialności formuły tego kształtu opiszemy tak:

aby sprawdzić, czy formuła $\exists_y \phi(x, y)$ *jest - w badanym modelu! - spełniona dla wartościowania zmiennej wolnej* $[x := A]$ *, realizujemy następującą procedurę:*

- uwalniamy od kwantyfikatora egzystencjalnego zmienną y*,*

- oceniamy spełnialność formuły $\phi(x, y)$ *dla wartościowań postaci* $[x := A, y := M]$ *wstawiajac za* M *kolejno wszystkie obiekty rozważanego modelu. Jeśli* **choćby przy jednym** *z tych wartościowań formuła* $\phi(x, y)$ *jest spełniona, to uznajemy, że formuła* $\exists_y\, \phi(x, y)$ *jest spełniona przy wartościowaniu* $[x := A]$.

Kwantyfikacja umożliwia opis własności nowego typu: takich, których spełnianie przez wskazany obiekt (obiekty) zależy od „kontekstu" - od tego, jaki ogół obiektów aktualnie rozważamy. Od *modelu*.
To różni logikę zdaniową i logikę pierwszego rzędu. Prawdziwość zdania „`Warszawa jest miastem nadwiślańskim`" nie zależy od tego, czy jako model wskazaliśmy zbiór wszystkich miast polskich czy europejskich. Ale to jest istotne dla oceny prawdziwości zdania `,,`$\forall_y($ `Warszawa` $\geqslant y)$`"`
Ocena spełnialności formuły w której występują kwantyfikatory wymaga oglądu całego modelu.
Wartość logiczna zdania języka pierwszego rzędu zależy od wyboru „kontekstu" (modelu).

7.1.1 Język pierwszego rzędu i jego semantyka

Zamienmy teraz nieformalną opowieść o języku pierwszego rzędu na formalną definicję.

[19]Gdzieś(?) wyczytałem, że ten symbol wprowadził G. Gentzen (w 1935 roku). Co nie zmiena faktu, że prekursorem matematycznego języka operującego formułami, termami i kwantyfikatorami jest G. Frege.

[20]Spełnianie tej formuły istotnie zależy od wyboru modelu! W modelu „polskie miasta" formuła jest spełniona przy wartościowaniu a w modelu „miasta europejskie" już nie!

Budowę takiego języka zaczynamy od arbitralnego ustalenia słownika (*sygnatury*) - zbioru *symboli relacyjnych* - R , *symboli operacyjnych* - Ω i stałych - C. Z każdym symbolem relacyjnym i operacyjnym wiążemy liczbę naturalną - jego *argumentowość (arność)*[21].

Przyjmijmy, że $\Sigma = (R = (R_n : n \in N), C, \Omega = (\Omega_n))$ jest takim słownikiem. Z symboli operacyjnych, stałych i *zmiennych przedmiotowych* budujemy *termy*:

- *zmienne i stałe są termami,*
- *jeżeli $t_1 \ldots, t_n$ są termami i $q \in \Omega_n$, to napis $q(t_1, \ldots, t_k)$ jest termem*[22].

Z symboli relacyjnych i termów budujemy *formuły*. *Formuły atomowe* to:

- *równości* $(t_1 = t_2)$,
- *napisy postaci* $r(t_1, \ldots, t_n)$, *gdzie* $r \in R_n$ *a* $t_1, \ldots t_n$ *są termami.*

Formuły złożone tworzymy z formuł atomowych według nastepujących reguł:
- *jeżeli napisy ϕ i ψ są formułami, to są nimi też napisy $\neg\phi$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$ oraz $(\phi \rightarrow \psi)$,*
- *jeżeli napis ϕ jest formułą, a x jest zmienną przedmiotową, to napisy $\forall_x \phi$, $\exists_x \phi$ są formułami (w których zmienna x jest odtąd związana).*

Interpretacja języka pierwszego rzędu sygnatury Σ wymaga wskazania:
- *zbioru A (wyznaczającego zakres zmienności zmiennych przedmiotowych),*
- *wskazania funkcji $q^A \colon A^n \rightarrow A$, dla każdego symbolu operacyjnego $q \in \Omega_n \subset \Omega$)*
- *wskazania podzbioru $A_r \subseteq A^n$, dla każdego symbolu relacyjnego $r \in R_n \subset R$,*
- *wskazania elementu $a_c \in A$, dla każdej stałej $c \in C$.*

Korzystając z rekurencyjnej definicji termów i formuł zdefinujemy semantykę termu $t(x_1, \ldots, x_n)$ jako funkcję $[[t]] \colon A^n \rightarrow A$ a semantykę formuły $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ jako podzbiór $[[\phi]] \subseteq A^n$.

Zdanie pierwszego rzędu sygnatury Σ to formuła, w której wszystkie zmienne są związane.

Aksjomatyczna teoria pierwszego rzędu sygnatury Σ to dowolny rozstrzygalny zbiór zdań tej sygnatury.

Interpretacja $(A, (q^A \colon q \in \Omega), (A_r \colon r \in R,\ a_c \colon c \in C)$ *jest modelem teorii T* jeśli wszystkie aksjomaty tej teorii są przy tej interpretacji prawdziwe[23].

> *Semantyka teorii pierwszego rzędu to klasa wszystkich jej modeli.*

Logika języka pierwszego rzędu jest opisywana jako system formalny pozwalający budować dowody zdań. Ten system jest niezależny od wyboru sygnatury Σ, jest wspólny dla wszystkich języków pierwszego rzędu[24].

Utrwalmy tę wiedzę czytając ze zrozumieniem poniższy tekst w jęz. angielskim: *„The notion of formal system is the central concept in any formalistic view of mathematics. Such a system is characterized by the fact that the process of proof is specified by explicitly stated rules. The initial conventions specifying such a formal system (...) will consist of three kinds of conventions (...):*
- First we shall have conventions stating what the objects of the theory, which I shall call its terms, shall be. These conventions will consist of a list of primitive terms, a list of operations for the formation of further terms and a set of rules of formation describing how new terms are to be formed from the primitive ones (...).”

---

[21] Słownik budujemy stosownie do celu badań. Np. gdy chcemy mówić o porównywaniu, to powinniśmy dysponować dwuargumentowym symbolem relacyjnym (zazwyczaj sugestywnie oznaczanym przez „$\leqslant$”). Gdy mamy zamiar rozważać operację dodawania, to do słownika włączymy symbol „+”. żbiór stałyc C to pewien zasób nazw indywiduowych.

[22] Termy to schematy nazw - formuły nazwowe (str. 75).

[23] Aksjomaty to zdania, czyli formuły bez zmiennych wolnych. Zatem semantyką aksjomatu jest jeden z dwóch podzbiorów zbioru jednoelementowego.

[24] Dlatego zapewne mówi się często o języku pierwszego rzędu (pomijając wskazanie sygnatury) i używa określeń: *rachunek predykatów pierwszego rzędu (first order predicate calculus)* oraz *logiką pierwszego rzędu (first order logic)* i skrótu *FOL*. Zainteresowanych detalami odsyłam do powszechnie dostępnej literatury i/lub wikipedii.

- Next we have conventions specifying a set of propositions, which I shall call elementary propositions, concerning the terms. Ordinarily (...) an elementary proposition is formed by applying a predicate to the appropriate number of terms as arguments.
- Finally we have specifications determining which of the elementary propositions are true. A certain set of these elementary propositions, called axioms, are stated to be true outright; and specific rules of procedure are given which are to determine how the derivation of new elementary theorems is to proceed. This process amounts to a recursive definition of the elementary theorems" - H. Curry [17].

7.1.2 Nowy rodzaj zdań

W formule $\forall_x \exists_y (x < y)$ nie ma zmiennych *wolnych* - obie zmienne x, y są tu *związane* przez kwantyfikatory. Takie formuły to *zdania*. Ale nieco inne niż *sądy jednostkowe* - zdania, które otrzymamy z formuł bezkwantyfikatorowych zastępując zmienne nazwami obiektów.

Sądy jednostkowe opisują fakty - `,,Jan jest podróżnikiem"` , $1 + 1 = 3$. Natomiast zdania „$\forall_x$ (`x jest młody` $\rightarrow$ `x lubi podróżować`)" czy też $\forall_x \exists_y\, x \leqslant y$ mówią „coś innego". Ale co?
Najpierw odpowiemy jak formaliści. Zdania to formuły, więc można pytać, czy zdanie jest spełnione przy wartościowaniu zmiennych wolnych w nim występujących. Tyle, że w zdaniu wszystkie zmienne są związane! To musi (powinno) budzić niepokój: jak wartościować zmienne, których nie ma? Formaliści - czerpiąc pełnymi garściami z teorii mnogości - odpowiadają: wartościowanie to funkcja określona na zbiorze $Free(\phi)$ wszystkich zmiennych wolnych danej formuły ϕ o wartościach w rozważanym modelu:

$$\textit{wartościowanie} : Free(\phi) \longrightarrow \textit{model}$$

Gdy ϕ jest zdaniem, to zbiór $Free(\phi)$ jest pusty. To nie boli formalistów: wiemy (wiedzą ci, którzy znają podstawy teorii mnogości), że funkcja $\emptyset \rightarrow \textit{model}$ istnieje i - dla ustalonego modelu - jest jedna jedyna!
Tyle formaliści. Ale RACJA BYTU formuł w tym, że opisują własności. Formuła o n zmiennych wolnych opisuje własność n-elementowych ciągów. Zdanie opisuje własności... 0-elementowych (pustych) ciągów? Próba tłumaczenia, co to jest „własność pustego ciągu elementów", skazana jest na porażkę. Znaczenie zdań trzeba tłumaczyć inaczej:

ZDANIA OPISUJĄ CECHY WŁASNOŚCI[25]

Oto przykład. Własność par ludzi opisana przez formułę „`y jest matką x`" ma oczywistą cechę - każdy człowiek ma matkę[26]. Tę cechę własności „`y jest matką x`" opiszemy za pomocą sekwencji dwóch kwantyfikatorów - „$\forall_x \exists_y$ `y jest matką x`".

Przykład bardziej naukowy: studenci wiedzą (bo muszą), że aby własność par elementów mogła być nazwana *równoważnością*, musi być *zwrotna, symetryczna i przechodnia.* Jeżeli tę własność opisuje formułę $r(x, y)$ to te cechy opiszemy tak: $\forall_{x,y}\, r(x, y)$ *(zwrotność),* $\forall_{x,y}\, r(x, y) \rightarrow r(y, x)$ *(symetria) i* $\forall_{x,y,z}\, r(x, y) \wedge r(y, z) \rightarrow r(x, z)$ *(przechodniość).*

Ale kwantyfikatory mogą pojawić się nie tylko na początku, ale też wewnątrz formuły, jak np. w zdaniu $\forall_x\, p(x) \rightarrow \exists_x\, r(x)$. Trochę trudniej uwierzyć, że takie zdanie opisuje „cechy własności". A jednak. Wynika to z *twierdzenia o preneksowej postaci normalnej*:

„dowolne zdanie języka pierwszego rzędu ϕ jest równoważne zdaniu w preneksowej postaci normalnej - zdaniu, w którym wszystkie kwantyfikatory zgrupowane są na początku:

$$\phi \equiv Q^1_{x_1} \ldots Q^n_{x_n} \psi$$

gdzie każde Q^i to kwantyfikator uniwersalny bądź egzystencjalny, a formuła ψ jest bezkwantyfikatorowa".

[25]Mówię o „cechach własności" by uniknąć niezręcznego zwrotu „własność własności". Może lepiej byłoby mówić o „cechach (skończonej) rodziny własności" , bo przecież w zdaniu można użyć jednocześnie kilku symboli relacji, np. $\forall_x\, (r(x) \rightarrow p(x))$ - *„każdy obiekt posiadający własność $r(x)$ ma również własność $p(x)$"*. Ale to nie jest istotne.

[26]Zapomnijmy na chwilę o Adamie...

|| Kwantyfikacja umożliwia konstrukcję nowego rodzaju zdań - zdań opisujących cechy własności[27].

Sądy jednostkowe pozwalają jednoznacznie opisać dowolny SKOŃCZONY obiekt matematyczny - wystarczy zadbać, by każdy element takiego obiektu miał swą indywiduową nazwę. Np. trójelementowy zbiór liniowo uporządkowany opiszemy wykorzystując pojedynczy binarny symbol relacyjny „$\leqslant$" i trzy nazwy a, b, c. Jego „teoria" - opisujący go zbiór zdań LO_3 - wygląda tak:

$LO_3 = \{a \leqslant b, a \leqslant c, b \leqslant c, \neg(b \leqslant a), \neg(c \leqslant a)....\}$ - darujmy sobie wypisywanie tego, co oczywiste.

Ale to ubogie: kolekcja sądów jednostkowych, nawet kompletna, to nie WIEDZA matematyczna! To tylko mało efektywny OPIS. I co najistotniejsze dla matematyki swobodnie operującej nieskończonością: nie można tej „faktograficznej" metody opisu stosować do obiektów nieskończonych.

Badanie modeli nieskończonych umożliwia język pierwszego rzędu. Zamiast nadawać indywiduowe nazwy elementom obiektu (co np. w przypadku liczb rzeczywistych i tak jest niemożliwe) wyróżniamy i NAZYWAMY pewne interesujące nas własności - relacje między elementami badanego obiektu. Poznanie obiektu to odnajdywanie cech tych własności opisywanych jako zdania języka pierwszego rzędu.

|| *Matematycy nie badają przedmiotów, lecz stosunki między przedmiotami - H. Poincare [57].*

Logika zdaniowa to logika sądów jednostkowych. W tej logice relacja konsekwencji jest słaba: wnioski, jakie można w niej wyprowadzić z wybranego *a priori* zbioru aksjomatów - sądów jednostkowych - nie są od nich zbyt odległe. To każe wątpić w sens organizowania wiedzy matematycznej w postaci teorii aksjomatycznych pisanych w „logice rzędu zero".

Relacja konsekwencji w logice języka pierwszego rzędu jest zdecydowanie silniejsza. Oto spektakularny przykład. Trzy zdania:

$\forall_{x,y,z}\, x(yz) = (xy)z,$

$\forall_x\, xe = x \wedge ex = x,$

$\forall_x \exists_y\, xy = yx = e$

to znana wszystkim matematykom *teoria grup*. Jeśli postrzegać ją jako teorię rzędu zero, to jej konsekwencje są żadne, gdyż są to - w logice zdaniowej - zdania proste. Nie są proste, gdy traktujemy tę teorię jako teorię pierwszego rzędu. Wówczas jej zbiór konsekwencji to bogata (pierwszorzędowa) *teoria grup* - całkiem spora książka.

Kwantyfikacja nie jest prosta

Nasz język i jego logikę ukształtowało doświadczenie świata skończonego. W tym świecie można mówić, że *„kwantyfikacja uniwersalna to uogólniona koniunkcja, a egzystencjalna to uogólniona alternatywa"*. Kwantyfikacja jest tu tylko usprawnieniem, optymalizacją języka[28].

Wchodząc z tym wyobrażeniem w świat matematyki obiektów nieskończonych nagle odkrywamy, że jesteśmy bezradni jeśli za sens działania matematycznego uznajemy ORZEKANIE o spełnialności formuł. Bo przecież *„aby orzec, czy formuła $\forall_y\, \phi(x, y)$ jest spełniona dla wartościowania $[x := A]$ testujemy spełnianie formuły $\phi(x, y)$ dla wszystkich wartościowań postaci $[x := A, y := M]$, gdzie za M przyjmujemy kolejno wszystkie elementy rozważanego modelu(...)".*

To wykonalne w modelu skończonym. Ale w modelu nieskończonym taka weryfikacja spełnialności formuły $\forall_y\, \phi(x, y)$ będzie trwała wiecznie. Bez sensu[29].

[27] Tak można opisać rolę kwantyfikatorów tylko w logice klasycznej, gdzie obowiązuje prawo wyłączonego środka!

[28] Nawet w świecie zbiorów skończonych, rozważając sądy rozpoczynane od frazy „dla każdego" oczekujemy uzasadnienia bardziej zwięzłego niż kolejne uzasadnianie poszczególnych przypadków. Czy zaakceptujemy uzasadnienie sądu *„każdy współcześnie żyjący człowiek ma swojego tatusia"* przez osobne rozpatrywanie kilku miliardów przypadków?

[29] Pozbawione sensu jest też mówienie o „kolejnym" wybieraniu elementów modelu, gdy jest nim np. nieprzeliczalny zbiór liczb rzeczywistych.

> W świecie skończonych modeli definicje spełniania formuł postaci $\forall_y\, \phi(x,y)$ i $\exists_y\, \phi(x,y)$ są jednocześnie opisem prostych procedur weryfikacji spełniania.
> W świecie modeli nieskończonych - w matematyce - te definicje są już tylko opisem zadania do wykonania. Jego rozwiązaniem musi być czymś innym niż cierpliwą weryfikacją spełnialności formuły przy kolejnych wartościowaniach zmiennych.

Pewną odpowiedzią na to wyzwanie są formalne systemy dowodzenia dla logiki pierwszego rzędu - takie, w których dowodliwość formuły oznacza jej spełnianie w dowolnym modelu przy dowolnym wartościowaniu. Ale wystarczy spojrzeć na jakikolwiek taki system formalny by się zniechęcić: reguły dowodzenia związane z kwantyfikatorami są zazwyczaj odległe od intuicji. Analiza tych systemów nie zbliża nas do zrozumienia istoty kwantyfikacji.

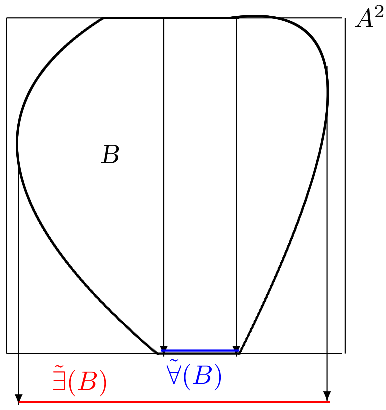
Dużo bardziej pouczająca jest analiza semantyki kwantyfikatorów. Spróbujmy. Niech $\underline{A}$ będzie modelem posadowionym na zbiorze A. Semantyką formuły o n-zmiennych wolnych $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ jest podzbiór n-tej potęgi kartezjańskiej A^n: $[[\phi(x_1,\ldots,x_n)]] \subseteq A^n$.
„Kwantyfikatory wiążą zmienne". to oznacza, że semantyką kwantyfikatorów powinny być pewne operacje przekształcające podzbiory zbioru A^n w podzbiory A^{n-1}:

$$B \subset A^n \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{\exists}B,\ \tilde{\forall}B \subseteq A^{n-1}$$

To wydaje się proste:

$$\tilde{\forall}\,(B) = \{(a_1,\ldots a_{n-1}) \in A^{n-1} \colon (a_1,\ldots a_{n-1},a) \in B \textit{ dla każdego } a \in A\},$$
$$\tilde{\exists}\,(B) = \{\{(a_1,\ldots a_{n-1}) \in A^{n-1} \colon \textit{gdy istnieje}\, a \in A \textit{ taki, że } (a_1,\ldots a_{n-1},a) \in B\}$$

Pomóżmy sobie rysunkiem (dla $n = 2$):[30]



Dlaczego tylko „wydaje się" proste? Kwantyfikatory „dla każdego" i „istnieje" opisałem tu odwołując się do potocznego rozumienia fraz „dla każdego" i „istnieje". Mało to elegenckie... . A właściwie błędne.
Szczęśliwie, można to poprawić:

$$\tilde{\forall}(B) \textit{ to największy podzbiór } A^{n-1} \textit{ taki, że } \tilde{\forall}(B) \times A \subseteq B,$$
$$\tilde{\exists}(B) \textit{ to najmniejszy podzbiór } A^{n-1} \textit{ taki, że } B \subseteq \tilde{\exists}(B) \times A.$$

co oznacza, że zbiory $\tilde{\exists}(B)$ i $\tilde{\forall}(B)$ są JEDNOZNACZNIE wyznaczone przez takie oto równoważności: dla dowolnych zbiorów $C \subseteq A^n$ i $D \subseteq A^{n-1}$:

$$B \subseteq A^{n-1} \times D \quad \textit{wtw} \quad \tilde{\exists}(B) \subseteq D$$
$$A^{n-1} \times D \subseteq B \quad \textit{wtw} \quad D \subseteq \tilde{\forall}(B)$$

> Takie odczytanie semantyki kwantyfikacji nie jest tylko ciekawostką. Jest to podstawa interpretacji języka pierwszego rzędu w matematycznym uniwersum różnym od tego, które opisuje teoria mnogości[31].

[30] Nie ma to jak metafory geometryczne... .

Załóżmy, że podzbiory B i D to semantyki formuł: $B = [[\psi(\bar{x}, y)]]$ i $D = [[\phi(\bar{x}))]]$ [32]. Wówczas $[[\phi(\bar{x})]] \times A = [[\phi(\bar{(x)}) \wedge (y = y)]]$ a opisane równoważności przybiorą taki kształt:

$$[[\psi(\bar{x}, y)]] \subseteq [[\phi(\bar{x}) \wedge (y = y)]] \quad \Leftrightarrow \quad [[\exists_y [[\psi(\bar{x}, y)]] \subseteq [[\psi(\bar{x})]]$$

$$[[\phi(\bar{x}) \wedge (y = y)]] \subseteq [[\psi(\bar{x}, y)]] \quad \Leftrightarrow \quad [[\phi(\bar{x})]] \subseteq [[\forall_y \psi(\bar{x}, y)]]$$

Zawieranie $[[\alpha(\bar{x})]] \subseteq [[\beta(\bar{x})]]$ oznacza, że - w rozważanym modelu - własność opisana przez formułę β jest *konsekwencją* własności opisanej przez formułę α , tzn. formuła $\beta(\bar{x})$ jest spełniona przy każdym wartościowaniu zmiennych w rozważanym modelu, przy którym spełniona jest formuła $\alpha(\bar{x})$.
Ale to ma sens (i jest zgodne z intuicją) tylko wtedy, gdy w obu formułach mamy te same zmienne wolne. Relację semantycznej konsekwencji między formułami o różnych zbiorach zmiennych wolnych można definiować odwołując się do kwantyfikacji. Wystarczy zauważyć, że formuła $\phi(\bar{x}) \wedge (y = y)$ jest spełniona przy wartościowaniu $[\bar{x} := \bar{a}, y := a_0]$ dokładnie wtedy, gdy formuła $\phi(\bar{x})$ jest spełniona przy wartościowaniu $[\bar{x} := \bar{a}]$. Wówczas lewe strony opisanych wyżej równoważności możemy odczytać tak: *formuła $\phi(\bar{x})$ jest konsekwencją formuły $\psi(\bar{x}, y)$"* oraz *formuła $\psi(\bar{x}, y)$ jest konsekwencją formuły $\phi(\bar{x})$"*

> Kwantyfikacja pozwala mówić o relacji konsekwencji semantycznej między formułami o różnej liczbie zmiennych wolnych poprzez redukcję do - intuicyjnie prostej - relacji konsekwencji między formułami o tej samej liczbie zmiennych wolnych.

Jak zwalczać z kwantyfikatory?

Bez wątpienia to kwantyfikatory sprawiają, że logika pierwszego rzędu (i, pośrednio, matematyka) zniechęca zwykłych śmiertelników. Dostrzegano to już w starożytności. Tworzono schematy, pozwalające zrozumieć (zapamiętać) subtelne zalezności między zdaniami języka pierwszego rzędu. Na przykład, *kwadrat logiczny* zdefiniowany i rozważany przez Arystotelesa to opis zależności między czterema *zdaniami*: $\forall_x (\phi(x) \to \psi(x))$, $\exists_x (\phi(x) \wedge \psi(x))$, i ich negacjami - $\neg\forall_x (\phi(x) \to \psi(x))$, $\neg\exists_x (\phi(x) \wedge \psi(x))$. Kwadrat logiczny wskazuje, które pary utworzone z tych zdań są *wzajemnie sprzeczne, wykluczające się* czy też *dopełniające*[33]. Opanowanie tego fragmentu logiki pierwszego rzędu jest dla większości studentów prawa koszmarem w czystej postaci.

Niewiele ryzykuję twierdząc, że powodem powszechniej niechęci do kwantyfikatorów są trudności związane z budową wyobrażenia o cechach własności opisywanych przez formuły z kwantyfikatorami. To proste, gdy w formule jest pojedynczy kwantyfikator. Nie jest też specjalnie trudne, gdy kwantyfikatory są dwa: $\forall_x \exists_y \phi(x, y)$ - *„dla każdego elementu a (rozważanego modelu) można wskazać element b taki, że para (a, b) ma własność opisaną przez formułę $\phi(x, y)$"*. Równie łatwo uchwycimy sens formuły $\exists_x \forall_y \phi(x, y)$.
Schody się zaczynają[34], gdy w formule buszuje całe stado kwantyfikatorów i to w sposób *zagnieżdżony*. Np. w zdaniu $\exists_y (\forall_x (\exists_z (y = x + z)))$ *w zasięgu* kwantyfikatora $\exists_y$ jest zagnieżdżona formuła z kwantyfikatorem $\forall_x (\dots)$ a wewnątrz niej - w zasięgu kwantyfikatora $\forall_x$ - jest zagnieżdżona formuła z kwantyfikatorem $\exists_z$. *Stopień kwantyfikatorowy* tego zdania to liczba 3.

Im większa głębokość zagnieżdżenia kwantyfikatorów, tym trudniej o intuicyjne wyobrażenie własności opisywanej przez formułę. Wielu studentów ma już kłopot ze zbudowaniem intuicji związanej z pojęciem granicy funkcji opisywanej formalnie za pomocą „koszmarnej" formuły:

$$\forall_x \ (x > 0 \to (\exists_y \ \forall_z \ (z > y \to |f(z) - g| < x))$$

[31] To zdanie stanie się zrozumiałe, gdy poznamy teorię toposów (opisaną w drugiej części tych notatek).

[32] $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$

[33] Patrz: *https://pl.wikipedia.org/wiki/Kwadrat logiczny*

[34] *„Skończyły się żarty, zaczęły się schody"* - to słynne powiedzenie generała Wieniawy-Długoszewskiego. Jedna z wersji tej anegdoty mówi, że powiedział to, gdy założył się, iż wjedzie konno po schodach na piętro hotelu Bristol. Inna, że wtedy, gdy - lekko zużyty - miał zejść z tychże schodów... .

A to dlatego, że stopień kwantyfikatorowy tej formuły jest równy 3 [35]. Liczba stopni schodów generała Wieniawy odpowiada głębokości zagnieżdżenia kwantyfikatorów... .

A teraz wyobraźmy sobie formułę, której stopień kwantyfikatorowy to np. 17...
Czy potrzebna jest niczym nieograniczona możliwość budowania skomplikowanych formuł, których sens nam umyka? Czy sądy matematyczne formułowane za pomocą zdań, w których głębokość zagnieżdżenia kwantyfikatorów jest równa, powiedzmy, tysiąc, są istotne, „mają sens”?
matematyki, jak każdy inny, to narzędzie, z którego korzystamy stosownie do potrzeb. Niesposób przewidzieć, jak bardzo złożone formuły będą kiedyś komuś potrzebne. Język polski też nie ogranicza *a priori* długości wyrazów i zdań, ale to nie oznacza, że będziemy kiedykolwiek tworzyć wyrazy złożone z tysiąca liter i składać zdania z tysiąca słów[36].

Jednak fakt, że nie można wykluczyć istnienia twierdzeń sformułowanych jako zdania o ogromnej złożoności kwantyfikatorowej, które są ważne dla naszego zrozumienia tej czy innej teorii matematycznej może niepokoić: jak można zrozumieć twierdzenie i docenić jego znaczenie, skoro nie potrafimy go odczytać?
Aby odpowiedzieć na to pytanie, musimy inaczej spojrzeć na język teorii matematycznej. Język pierwszego rzędu ustalonej *a priori* sygnatury Σ, w którym sformułowane są aksjomaty rozważanej teorii T, to *jądro* języka tej teorii. Jest to język formuł sygnatury Σ. Rozwój teorii to nie tylko poszukiwanie konsekwencji jej aksjomatów, ale też ewolucja jej języka. W ten sposób tworzona jest dynamiczna część języka teorii - jego *powłoka*[37].
Przykład. W sygnaturze arytmetyki Peano mamy trzy symbole operacyjne „$+\,\cdot, succ$” *(dodawanie, mnożenie, następnik)* i stałą „0” (zero) . W tym czystym języku arytmetyki możemy zdefiniować relację „<”:

$$x < y \equiv \exists_z(\neg(z = 0) \wedge (x + z = y))$$

a następnie własność „ być liczba pierwszą”:

$$prime(x) \equiv ((x > succ(0)) \wedge \forall_y\, ((\exists_z\, x = y \cdot z) \rightarrow (y = succ(0) \vee y = x)))$$

Napisy „$x < y$” i „$prime(x)$” to formuły rozszerzonego języka arytmetyki.
Te „skróty” pozwalają zapisać (dość koszmarne) zdanie należące do jądra języka arytmetyki:

$\forall_z\, \exists_x\, ((\exists_t(\neg(t = 0) \wedge (z + t = x))) \wedge (\exists_u(\neg(u = 0) \wedge (succ(0) + u = x))) \wedge \forall_w\, (\exists_v\, x = w \cdot v \rightarrow (w = succ(0) \vee w = x))$

które mówi: *„dla dowolnej liczby (naturalnej) istnieje liczba pierwsza od niej większa”*, w zdecydowanie bardziej przyjazny sposób w języku powłoki:

$$\forall_z \exists_x\, (z < x) \wedge prime(x)$$

> Rozszerzanie czystego języka teorii matematycznej poprzez wprowadzanie nazw-skrótów nakrywających złożoną treść jest koniecznością. Tylko tak można pokonać trudności związane z interpretacją formuł, których stopień zagnieżdżenia kwantyfikatorów jest zbyt wysoki, by były one czytelne.
>
> Trafnie wybrana nazwa-skrót uruchamia skojarzenia - jeden z podstawowych elementów twórczego myślenia. Używany nie tylko w matematyce zwrot „kluczowe pojęcie” można rozumieć dosłownie, jako klucz do nowych obszarów badań. Jeden z moich mistrzów mawiał:
>
> *„w matematyce definicje są równie ważne jak twierdzenia. A nawet ważniejsze.”*

W dyskusji o kwantyfikatorach i wywoływanych przez nie kłopotach trzeba też choćby wspomnieć o słynnym twierdzeniu Tarskiego *o eliminacji kwantyfikatorów*. Zacznijmy tak: w szkole nas uczono, że *„równanie $ax^2+bx+c = 0$ ma rzeczywiste rozwiązanie dokładnie wtedy, gdy $b^2-4ac \geqslant 0$”*.

Logik powie, że to twierdzenie orzeka o *równoważności formuł* $\exists_x\, (x_1x^2 + x_2x + x_3 = 0)$ oraz

[35] Ta formuła definiuje *„granicę funkcji $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ w $+\infty$”*. Liczba rzeczywista a jest tą granicą, jeżeli ta formuła jest spełniona przy wartościowaniu $[g := a]$.

[36] Co prawda Hilbert był Niemcem, a w języku niemieckim zdarzają się niemiłosiernie długie wyrazy... .

[37] Angielskie terminy *core language, shall language* używane są częściej w informatyce teoretycznej. Czasem też mówi się o „czystym” i „rozszerzonym” języku teorii.

$x_2^2 - 4x_1x_3 \geqslant 0$, w modelu $(\mathcal{R}, +, \cdot, 0, 1, \leqslant)$[38]. Dzięki tej równoważności trudne zadanie - stwierdzenie, czy istnieje pierwiastek rzeczywisty trójmianu - sprowadzamy do sprawdzenia prostej nierówności. Sens uproszczenia w tym, że „trudną” formułę z kwantyfikatorem zastąpiliśmy równoważną - w tym szczególnym modelu! - „łatwą” formułą bezkwantyfikatorową... .
Skłonni jesteśmy przypuszczać, że przytoczony przykład to sytuacja szczególna. To nie do końca prawda - Tarski udowodnił takie oto zdumiewajace twierdzenie:

Dla dowolnej formuły ϕ języka pierwszego rzędu ze słownikiem zawierającym jeden symbol relacyjny dwuargumentowy „$\leqslant$”, dwuargumentowe symbole operacyjne $+, \cdot, -$ i stałe $0, 1$ istnieje formuła bezkwantyfikatorowa ψ, która jest jej równoważna w modelu $(\mathcal{R}, +, \cdot, 0, 1, \leqslant)$”

Opisując pierwszorzędowe własności tego podstawowego obiektu matematyki, możemy się obyć bez kwantyfikatorów! Życie (matematyka zajmującego się liczbami rzeczywistymi) jest piękne!

Ostudźmy entuzjazm. Dowód twierdzenie Tarskiego to opis procedury zastępowania danej formuły przez formułę bezkwantyfikatorową, równoważną w modelu $(\mathcal{R}, +, \cdot, 0, 1, \leqslant)$. Tyle tylko, że ta procedura jest niesłychanie złożona, co czyni ją praktycznie bezużyteczną. Jak bardzo? Procedura zerojedynkowej weryfikcji tautologii w klasycznej logice zdaniowej ma złożoność wykładniczą: gdy w formule mamy n zmiennych zdaniowych to sprawdzenie, czy jest ona tautologią, wymaga 2^n testów. A to np. dla $n = 20$ oznacza nieskromną wielkość 2^{20}.

Złożoność procedury Tarskiego jest nieporównywalnie większa: nie można jej ograniczyć żadną liczbą postaci $2^{2^{2^{2^{\cdots}}}}$ .... [39]

> Kwantyfikatory to nie jest diabelski wynalazek - wprowadził je do logiki Gottlob Frege.
> Kwantyfikatory nie są źródłem trudności. One tylko ujawniły naturalne trudności tkwiące w języku w którym używamy fraz „dla każdego” i „istnieje”.

Dodatek: zmienne w informatyce

Czy zmienna w informatyce jest tym samym, co w matematyce? To zależy. Jeżeli myślimy o *programowaniu deklaratywnym*, to tak. Ale jeśli mamy na uwadze najpopularniejsze *programowaniu imperatywne* (np. w Javie) to nie. Nawet zdecydowanie nie.
Język matematyki to język zdań orzekających, których semantyką jest wartość logiczna. Formuły to schematy zdań. Język programowania imperatywnego to język poleceń, zdań rozkazujących. Semantyką polecenia jest zmiana *stanu (komputera)*. Taki stan to wektor złożony z zawartości wielu miejsc w jego pamięci -„kontenerów”. W zapisie imperatywnego programu „zmienna” pojawia się jako identyfikator (adres) takiego kontenera a podstawowym poleceniem programowania imperatywnego jest *instrukcja przypisania* - włożenie do kontenera o danej nazwie konkretnej wielkości. Zawartość kontenera wskazywanego przez daną zmienną może być wielokrotnie zmieniana w czasie realizacji programu - możemy np. umieścić w programie polecenie „$x := x + 1$”. A to ma się nijak do roli jaką przypisujemy zmiennym w logice i matematyce[40].

7.2 Skąd się biorą teorie?

Postrzeganie teorii matematycznych jako logicznych konieczności skończyło się gdzieś w drugiej połowie XIX wieku, co pięknie spuentował Wittgenstain pisząc *„Matematyk jest wynalazcą, nie odkrywcą.”* Skąd matematycy czerpią inspirację dla swoich wynalazków?

---

[38]Tzn. formuła $(\exists_x\, x_1x^2 + x_2x + x_3 = 0)$ jest spełniona przy wartościowaniu $x_1 := a, x_2 := b, x_3 := c]$ (czyli trójmian $ax^2 + bx + c$ ma pierwiastek rzeczywisty) dokładnie wtedy, gdy druga formuła jest spełniona - gdy $b^2 - 4ac \geqslant 0$.

[39]Pięknie to brzmi po angielsku: *„its time complexity is greater than all finite towers of powers of* 2.”

[40]Użycie wspólnego terminu dla tak odmiennych funkcjonalnie pojęć jest przyczyną dramatycznego zamieszania w głowach studentów informatyki, Nie tylko nie rozróżniają ról zmiennych w matematyce i informatyce, ale - w ogromnej większości przypadków żadnej z nich nie rozumieją. Probabliści też nieźle zamieszali: u nich *„zmienna losowa”* to nazwa... pewnej funkcji.

Teorie matematyczne można dzielić (choćby na użytek tego tekstu) na te o charakterze rewolucyjnym i pozostałe, wpisujące się w ewolucyjny rozwój matematyki. Tych pierwszych nie jest aż tak wiele - teorie Euklidesa, Fregego i Newtona (pamiętając wszak o Leibnizu), dzieło Kartezjusza, arytmetyka Peano i oczywiście teoria mnogości. Każdej z tych teorii towarzyszyła intencja opisu fragmentu pozamatematycznej rzeczywistości w języku matematyki. Ten „fragment" to *model zamierzony* budowanej teorii. Zazwyczaj realizacja tego zamiaru prowokowała (zmuszała) do rozbudowy języka i formułowania nowych teorii właśnie[41].

Teorie „nierewolucyjne" tworzone są w ramach zastanego języka. Z formalnego punktu widzenia stworzenie podstaw nowej teorii matematycznej tego typu to rozszerzenie logiki języka przez przyjęcie *aksjomatów specyficznych* - zdań, których prawdziwość nie wynika z ich struktury a jest apriorycznie przyjętym założeniem. Ale tak naprawdę punktem wyjścia do budowy takich teorii są zazwyczaj nieźle rozpoznane pojedyncze obiekty lub klasy obiektów - *modele zamierzone* teorii drugiego typu. Na którymś tam etapie badań takiego obiektu (lub ich klasy $\mathcal{K}$) ktoś - twórczy matematyk lub ich grupa - nabiera przekonania, że warto wyróżnić i przyjrzeć się bliżej pewnemu zespołowi własności i wybranym cechom jakie te własności mają we wszystkich obiektach rozważanej klasy. Pierwszorzędowy opis tych wspólnych cech to zbiór aksjomatów specyficznych $Ax(\mathcal{K})$ - zaczątek (pierwszorzędowej) teorii klasy $\mathcal{K}$"[42].

Tak było zapewne w przypadku wspomnianej już *teorii grup* dla której modelami zamierzonymi były geometryczne grupy symetrii oraz struktura liczb całkowitych. [43]. Dziś wiemy, że grup - modeli teorii grup - jest „nieskończenie wiele" i wielokrotnie są one bardzo odległe od intuicji związanych z pierwowzorem.

> W swych działaniach matematycy kierują się (zbiorowym) doświadczeniem i (indywidualną) intuicją. Ale intuicja bywa zawodna (Poincare). Na każdą teorię, która znajduje trwałe miejsce w matematyce, przypada kilkanaście (kilkadziesiąt?) odrzuconych i zapomnianych... . O tym, które teorie „przeżyją" decyduje ich *celowość*.
>
> Celowość jest niezbywalnym warunkiem uprawiania nauki[44].

7.2.1 Rozwój teorii matematycznej

Przypuśćmy, że przedmiotem naszego zainteresowania jest pewna klasa obiektów $\mathcal{K}$ opisanych w języku pierwszego rzędu a celem poznanie *teorii* tej klasy - zbioru $Th(\mathcal{K})$ wszystkich zdań które można sformułować w tym języku i które są prawdziwe we wszystkich obiektach tej klasy.
Podstawą hilbertowskiej wizji matematyki było przekonanie, że dla dowolnej klasy $\mathcal{K}$ można wskazać rozstrzygalny zbiór $Ax(\mathcal{K})$ tak, by każde zdanie, które jest prawdziwe w trj klasie było dowodliwą konsekwencją tych aksjomatów:[45]

$$Th(\mathcal{K}) = Con(Ax(\mathcal{K}))$$

Sądzono, że dla każdego pojedynczego obiektu $\mathcal{A}$ - takiego jak np. struktura liczb naturalnych - możliwa jest równość $Th(\{\mathcal{A}\}) = Con(Ax(\{\mathcal{A}\}))$ dla odpowiednio dobranego i rozstrzygalnego

[41] *„Intencja – świadomy proces umysłowy polegający na aktywnym stosunku umysłu wobec jakiegoś problemu, w wyniku czego pragnienia przekształcają się w potencjalny plan działania." (wikipedia).* Skąd te intencje? Nie wiem. Ale dzięki nim nie mieszkamy już w jaskinach.

[42] Oczywiście do opisu klasy obiektów zamierzonych można użyć innego języka niż pierwszorzędowy - np. języka przestrzeni topologicznych. Ale my pozostaniemy w świecie matematyki pierwszorzędowej.

[43] Kant o aksjomatach: *,These are synthetic a priori principles, insofar as they are immediately certain"*. Ważną - z psychologicznego punktu widzenia - cechą teorii aksjomatycznej jest też (względna) prostota wybranych aksjomatów. Matematycy, podobnie jak wielu filozofów, są głęboko przekonani, że to, co ważne, może (musi) być wyrażone prosto.

[44] Młodym adeptom nauki uprzejmie donoszę, że celem nie jest „zrobienie" doktoratu czy habilitacji... .
Konieczność celowości działania w matematyce jest negowana przez *konwencjonalistów*. Najbardziej radykalny spośród nich, Edouard Le Roy (1870-1954), uważał, że nauka jest subiektywnym tworem naukowca. Umiarkowanym zwolennikiem konwencjonalizmu był Poincare, który (upraszczam!), uznawał swobodę wyboru systemów aksjomatycznych. Konwencjonalistą był też polski filozof, Kazimierz Ajdukiewicz.

[45] Bez warunku rozstrzygalności zbioru aksjomatów zadanie jest trywialne: wystarczy za aksjomaty przyjąć wszystkie zdania prawdziwe w klasie $\mathcal{K}$.

zbioru aksjomatów $Ax(\{\mathcal{A}\})$. To miała być realizacja paradygmatu *„istnienie (matematycznego) bytu = niesprzeczny i zupełny opis"*.

Te marzenia zniweczył Gödel - opowiemy o tym nieco później. Dziś wiemy, że - poza wyjątkowymi sytuacjami - zamiast oczekiwanej równości mamy tylko zawieranie - $Con(Ax(\mathcal{K})) \subsetneq Th(\mathcal{K})$.

Zbiór dowodliwych konsekwencji aksjomatów jest potencjalnie nieskończony.Może się więc zdawać, że rozwój każdej teorii aksjomatycznej to proces nieskończony. Ale teorie powstają, żyją i ... umierają. Niesposób twierdzić, że udowodnienie jakiegokolwiek twierdzenia oznacza rozwój teorii. Ważne są tylko te twierdzenia, które są ważne. Teorie wyczerpują się gdy społeczność matematyków uzna, że wszystko co ciekawe zostało już - w ramach danej teorii - udowodnione. I nie próbujmy nawet ustanowić kryterium ważności[46]. Międzynarodowa społeczność matematyków potrafi ocenić wagę danego wyniku. Wprawdzie współistnienie obu czynników - swobody twórczej jednostek i społecznej akceptacji ich pracy - czasem zgrzyta (pewne ważne wyniki nie od razu zostają dostrzeżone i docenione, obiektywny osąd społeczny zamienia się w ład korporacyjny), ale przecież to działa. Od tysięcleci....

To, że formalna logika jest mało przydatna w ocenie celowości teorii czy wagi matematycznego wyniku specjalnie nie dziwi. Dziwić może stwierdzenie, że logika ma niewiele wspólnego z PROCESEM dowodzenia twierdzeń. Weyl jako podstawowy element procesu poznania wskazywał intuicję, pozostawiając dowodzeniu jedynie rolę weryfikatora poprawności. Banach pisał: *„Dobry matematyk potrafi dostrzegać fakty, matematyk wybitny – analogie między faktami, zaś matematyk genialny – analogie między analogiami."*[47] Dowodzenie angażuje naszą wiedzę, doświadczenie, inteligencję i intuicję. W procesie przeszukiwania wielowymiarowej przestrzeni matematycznej wiedzy ujawnia się ludzki intelekt. Czasem geniusz. Formalny zapis dowodu to tylko dokumentacja, opis rezultatu działania, nie informujący w żaden sposób o jego przebiegu. Sporządzany zazwyczaj *post factum*, gdy redagujemy artykułu przeznaczony do publikacji.

> *"No, no, you're not thinking; you're just being logical." - N. Bohr. „Dowód formalny ma dla nas sens tylko dlatego, że u jego źródeł jest dowód nieformalny"* [48].
> *„Gauss opowiadając o twierdzeniu, które usiłował bezskutecznie dowieść przez szereg lat, pisał: „w końcu (...) udało mi się osiągnąć rezultat i to nie dzięki moim bolesnym wysiłkom, ale za sprawą łaski Boga... -* J.Hadamard, Psychologia odkryć matematycznych..

Studenci zakuwający formalne zapisy dowodów nie mają szans na zrozumienie matematyki. Nie widzą najważniejszego - jak dowód powstawał. *„To really understand something, I believe that one must discover it oneself, not learn it from anyone else" - G. Chaitin.*

Być może to o tych nierozpoznanych procesach myślał Wittgenstein sprzeciwiając się programowi logicyzacji matematyki i Lakatos nazywający matematykę nauką quasi-empiryczną [50].

ISTOTA TWÓRCZOŚCI MATEMATYCZNEJ WYMYKA SIĘ FORMALIZACJI.

Czy intuicja i nieokreślone zdolności matematyczne są dziś, w epoce nowoczesnych technologii, niezbędne? Może wystarczy dla danej teorii zbudować program, który będzie generował coraz to dłuższe dowody a rolę człowieka ograniczyć do wyboru tych twierdzeń, które uzna za interesujace?

To niedorzeczność. Lepiej: to kwestia skali. Istotne twierdzenia to znikomy, niewyobrażalnie mały ułamek tego, co formalnie dowodliwe. Równie dobrze można nauczyć komputer składania literek i oczekiwać, że kiedyś przedstawi nam taki tekst, a my go odnajdziemy w morzu bełkotu:

And sometimes when the night is slow,
The wretched and the meek,
We gather up our hearts and go,

[46]Dowodzenie twierdzeń niczego nie wnoszących do rozwoju teorii to tzw. przyczynkarstwo, pokłosie obowiązującej od kilkudziesięciu lat w świecie nauki zasady „publikuj albo giń". Próby polegające na mierzeniu wagi wyniku liczbą cytowań są tylko dowodem postępującej żałosnej biurokratyzacji nauki.

[47]Stefan Banach (1892-1945) najwybitniejszy polski matematyk, jeden z twórców lwowskiej szkoły matematycznej.

[48]- S.Krajewski,*Czy matematyka jest nauką humanistyczną.*

A Thousand Kisses Deep.[49]
Nie ma tu żadnej przesady... . Matematyka jest nauką. Nauka jest sztuką wyboru i doboru. Wyboru celu i doboru środków. Tego komputer nie potrafi.

UNIWERSUM MATEMATYCZNE TO DOMENA INTUICJI I TWÓRCZOŚCI.
JĘZYK MATEMATYKI I JEGO LOGIKA TO TYLKO PEWNOŚĆ I KONTROLA

7.2.2 Trzeci wymiar języka

Powszechnie przyjętym obyczajem matematyków jest operowanie nic nie mówiącymi, „neutralnymi" symbolami. Skutkiem tego jest odarcie zapisów sporządzanych w języku formalnym z kontekstu (emocjonalnego, kulturowego). Dlatego matematyczna formalizacja to dla wielu przeszkoda wysoka jak K2[50]. Porównajmy: zapis

$$\forall_x \,(s(x) \longrightarrow (\forall_y \, p(y) \to \exists_z \,(d(z) \wedge m(z,y) \wedge k(z,x))))$$

nie wywołuje żadnych skojarzeń. Jest, mówiąc wprost, okropny... A przecież przy odrobinie dobrej woli można uznać, że to zapis zdania:

„Każdy żeglarz ma w każdym porcie dziewczynę, która go kocha"

tyle, że pozbawiony pozamatematycznego kontekstu...[51]

Porzućmy dyskusję o urokach (trudach) życia żeglarzy. Oto formalna teoria, zapisana w języku z dwoma symbolami relacji jednoargumentowych - „p, l" - i jednym symbolem relacji dwuargumentowej - „$\in$":

$$\forall_x (p(x) \vee l(x) \wedge \neg(p(x) \wedge l(x))$$
$$\forall_{x,y} \,(x \in y) \to (p(x) \wedge l(y)),$$
$$\forall_{x,y} \,(p(x) \wedge p(y) \wedge (x \neq y)) \to \exists_z \,(x \in z) \wedge (y \in z)$$
$$\forall_{x,y} \,(p(x) \wedge l(y) \wedge \neg(x \in y)) \to \exists_z \,(z||y) \wedge (x \in z)$$

($z||y$ jest tu skrótem formuły $(l(y) \wedge l(z) \wedge \neg(\exists_w \,(w \in x) \wedge (w \in y))$

$$\exists_{x,y,z} \,(x \neq y) \wedge (x \neq z) \wedge (y \neq z) \wedge \forall_w \,(l(w) \to (x \notin w) \vee (y \notin w) \vee (z \notin w))$$

Oczy bolą a rozum śpi... Można „to" przeczytać, ale tej lekturze nie towarzyszy żadna intuicja.

Powiedzmy to samo inaczej: *geometria afiniczna* to teoria operująca dwoma pojęciami pierwotnymi - *„punkt"* i *„prosta"*[52] - i opisująca cechy własności *„punkt leży na prostej"* (lub: *„prosta przechodzi przez punkt"*) reprezentowanej przez formułę $x \in y$. A formułę-skrót $z||y$ czytamy: *„proste z i y są równoległe"*.

Aksjomaty geometrii afinicznej sformułujemy teraz - po polsku - tak:

AX I. *Dla dowolnej pary różnych punktów istnieje dokładnie jedna prosta przez nie przechodząca.*
AX II. *Dla dowolnej prostej P i punktu a poza tą prostą istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez a i równoległa do P.*
AX III. *Istnieją trzy punkty nie leżące na jednej prostej.*

Wyobraźnia została pobudzona - „widzimy" punkty i linie. Odtąd nie uwolnimy się od tej geometrycznej interpretacji. To dobrze i źle. Dobrze, bo bez wyobraźni nie ma twórczości. Źle, bo dominacja jednej interpretacji przeszkadza. Np. wtedy, gdy napotkamy twierdzenie o istnieniu modelu tej teorii, który ma cztery punkty i sześć linii (spróbuj go skonstruować...). Ale wystarczy tylko trochę ostrożności, by nie dać się zaprowadzić zbyt daleko w stronę specyficznych cech tak wyróżnionego modelu.

> Trzeci wymiar języka teorii matematycznych to próba wzbogacenia formalnego zapisu o warstwę wyobrażeniową. Twórczość matematyczna dzieje się w tym trzecim wymiarze.

[49] *Czasem, gdy wlecze się noc, nieszczęśni i potulni, zbieramy nasze serca i wędrujemy, w głębię tysiąca pocałunków. - L. Cohen, A thousand kisses deep*

[50] K2 (8611m) - drugi najwyższy szczyt na świecie.

[51] $s(x) \equiv$ `,,x jest żeglarzem"`, $p(y) \equiv$ `,,y jest portem"`. Itd...

[52] Formuła $p(x)$ jest spełniona przy wartościowaniu $[x := a]$ gdy a jest punktem, a formuła $l(x)$ - gdy a jest linią.

> Ockhamowska oszczędność jest pożądana tylko przy formułowaniu podstaw teorii. Język badań może i powinien być „nadmiarowy".
> Kant uważał zdolność tworzenia pojęć za istotę ludzkiego intelektu[53].

Język matematyki nie ogranicza się do stwierdzeń a zależności między nimi do konsekwencji logicznej. *„To tworzywo czasami jasne... a czasem niewyraźne... które jest matematyką..."* - pisał pięknie Lakatos[54].
W odróżnieniu od beznamiętnego języka formalnego, w trzecim wymiarze komunikacji matematycznej jest miejsce na subiektywizm. Matematyka nie jest izolowana, jest uprawiana w pewnym kontekście kulturowym. *„Możliwość uchwycenia tego samego sensu dokonuje się prawie automatycznie (...) pomiędzy ludźmi z tego samego kręgu kulturowego"* - napisał Z. Król w eseju *Rozwój pojęcia zbioru" (internet)*. Wyobraźnia matematyków poszukujących nazw wywołujących pożądane skojarzenia jest imponująca. Mamy *„wiązki", „snopy", „źdźbła", „kiełki" , „orbity", „kołczany" „semirury", „atlasy" „łańcuchy", „przestrzenie nakrywające"* itp. Poza gronem wtajemniczonych te nazwy budzą uśmiech, respekt i ... skutecznie budują legendę matematyki[55].

> Trzeci wymiar języka jest też... nadużywany. Nazwanie elementów najmniejszego zbioru induktywnego liczbami naturalnymi to świadomy zabieg, który ma budować przekonanie, że w języku teorii mnogości nie opisujemy, ale kreujemy liczby naturalne.

Tę nieusuwalną różnicę między subiektywnym językiem twórczości a obiektywnym językiem dokumentowania i rozpowszechniania jej rezultatów dostrzegał już Platon. Pisał: *„...ten wynalazek niepamięć w ludzkich duszach posieje, bo człowiek, który się tego wyuczy, przestanie ćwiczyć pamięć; zaufa pismu i będzie sobie przypominał wszystko z zewnątrz, ze znaków obcych jego istocie. (...) Uczniom swoim dasz tylko pozór mądrości, a nie mądrość prawdziwą. (...) będzie im się zdawało, że wiele umieją (...); to będą mędrcy z pozoru a nie ludzie mądrzy naprawdę*[56].

Żaden zapis formalny nie odda subtelnej wiedzy o strukturze matematyki w stopniu choćby zbliżonym do tego, jak potrafi to robić mistrz w czasie wykładu. Wie to każdy, kto miał szczęście uczestniczyć w dobrym wykładzie czy twórczym seminarium[57]. Jego uczestnicy biorą udział w pełnym emocji i wahań procesie dochodzenia do rezultatu, do wyniku matematycznego. Pozostali skazani są na nużącą lekturę drukowanych sprawozdań, czyli prac naukowych[58].

> Umiejętne wykorzystanie trzeciego wymiaru języka matematycznego ma ogromne znaczenie w nauczaniu matematyki. Nie wolno uczyć matematyki w sposób przesadnie sformalizowany - to pewna klęska.
> *„Środek przekazu jest przekazem"*. Również w matematyce[59].

Opowieść o trzecim wymiarze języka będzie bardziej naukowa gdy odwołamy się do *semiotyki* („ogólnej teorii znaków"). Jej twórca - Ch.W.Morris - wyróżniał trzy składowe semiotyki - *syntaktykę, semantykę i pragmatykę*. O syntaktyce i semantyce mówimy tu dużo, o pragmatyce - poza tym skromnym rozdziałem - nic. *„Pragmatyka bada relacje zachodzące między znakiem a jego użytkownikami" (wikipedia)*. Nie da się ukryć - formalistycznie postrzegana matematyka tę relację

---

[53] A zdolność wyciągania wniosków wybiegających poza materiał doświadczenia za istotę rozumu.

[54] Imre Lakatos (1922 - 1974) – węgierski filozof matematyki.

[55] Czasem jest dziwnie: dlaczego po angielsku mówimy „field" a po polsku „ciało"? Trudno zrozumieć Anglików...

[56] *Platon, Fajdros.* Cytuję za [48]. Tamże można odnaleźć też takie zastanawiające zdanie: *„język jest metaforą w tym sensie, że nie tylko przechowuje lecz przenosi doświadczenia z jednej formy w drugą"*.

[57] „Uczestniczyć", a nie „być obecnym". Wykład to interakcja między wykładowcą a słuchaczami.

[58] Kilkanaście wieków po Platonie Goethe napisał: *„Słowo umiera pod piórem..." (Faust)*.

[59] Zachęcam do lektury jeszcze jednego tekstu McLuhana: *„Joyce, Mallarme i prasa"* [48] w którym można znaleźć taki fragment: *„Druk zwielekrotnił liczbę uczonych ale pomniejszył ich społeczną i polityczną rolę. (...) Jeśli tradycja rękopisu zachęcała do encyklopedyzmu, to kultura książkowa w sposób naturalny skłaniała do specjalizacji. Istniało dostatecznie dużo książek, by czytanie stało się pełnoetetowym zajęciem oraz zapewniało całej klasie uczonych zupełne zamknięcie się w sobie i życie w izolacji. W końcu liczba książek była na tyle wystarczająca, żeby rozdzielić czytającą społeczność na wiele nie komunikujących się ze sobą grup. (...). Naszą kulturę cechuje duży stopień nieznajomości znaczenia i kierunków jej rozwoju"*..

lekceważy.
W informatyce jest już inaczej - nie wystarczy zaprojektować kolejny język programowania - trzeba go jeszcze sprzedać. A to oznacza, że trzeba się starać by był on *user friendly* - przyjazny użytkownikowi...[60].

Ale nie twórzmy złudzeń: *„matematyzowanie oznacza umieszczenie fizycznej rzeczywistości poza możliwością percepcji, uczynienie jej percepcyjnie niedostępną.”* - jak napisano, nie bez racji, w pewnym dziele poświęconym związkom fenomenologii i matematyki.

[60]Być może to właśnie informatyka uświadomiła naukowcom (matematykom), iż kończy się w nauce era „splendid isolation” w której bariera językowa oddzielająca ich od reszty śmiertelników była uważana za coś oczywistego i niemal niezbędnego...

Rozdział 8

Koncepcja Hilberta

„Wir müssen wissen. Wir werden wissen.”
(Musimy wiedzieć. Będziemy wiedzieć)
David Hilbert

David Hilbert był przekonany, że metoda aksjomatyczno-dedukcyjna jest najlepszą z możliwych strategii rozwijania matematyki[1]. Ks. J. Dadaczyński opisał istotę tego programu w czterech, lapidarnie sformułowanych, punktach:
- *aksjomatyzacja zastanych dyscyplin matematycznych,*
- *budowanie modelu jednej teorii w dziedzinie innej teorii; wówczas można było drugą teorię traktować jako bardziej podstawową, taką, z której wyprowadzalna jest pierwsza teoria,*
- *(...)*
- *wskazanie teorii najbardziej podstawowej, z której wyprowadzalne są pozostałe. [19]*[2]

Pierwszy punkt już rozumiemy. Zajmijmy się dwoma pozostałymi.
„Budowanie modelu teorii T_1 w dziedzinie teorii T_2 rozumiemy tu jako takie tłumaczenie języka pierwszej teorii na język drugiej, przy którym twierdzenia dowodliwe w T_1 pozostają dowodliwe w teorii T_2 . W szczególności aksjomaty T_1 są twierdzeniami dowodliwymi w T_2.

Przykład. „We can simulate PA within ZFC by interpreting natural numbers set-theoretically”. Możemy - poprzez odpowiednie tłumaczenie - „zanurzyć” teorię liczb naturalnych (arytmetykę Peano, PA) w teorię mnogości ZFC.
Strukturę liczb naturalnych zdefiniowaliśmy jako najprostszą strukturę rekurencyjną z symbolem „0” jako jedyną wielkością początkową i pojedynczym konstruktorem *„succ”* (str **??**) Rekurencyjne definicje dodawania i mnożenia - po nadaniu im sformalizowanej formy - wraz z aksjomatem indukcji, to treść aksjomatów arytmetyki Peano[3].

Do opisu poszukiwanego tłumaczenia wykorzystamy zdefiniowany w teorii mnogości zbiór $\mathbf{N}$ *- najmniejszy zbiór induktywny (str. 11). Symbolowi „0” przyporządkujmy zbiór pusty* $\emptyset \in \mathbf{N}$. *Natomiast „tłumaczeniem operacji „succ” jest teoriomnogościowe przyporządkowane* $A \rightsquigarrow A \cup \{A\}$. *To pozwala interpretować liczby naturalne jako elementy zbioru* $\mathbf{N}$*:*

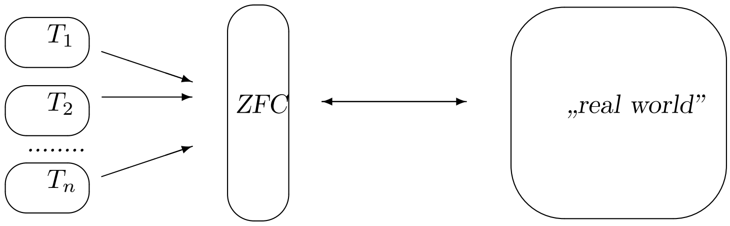
$$0 \rightsquigarrow \emptyset, \quad 1 \rightsquigarrow \{\emptyset\}, \quad 2 \rightsquigarrow \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

Przy takim tłumaczeniu aksjomaty i twierdzenia PA stają się dowodliwymi twierdzeniami teorii mnogości.

Teoria mnogości jest „bardziej podstawowa” niż arytmetyka Peano.
Stąd już niedaleko do pytania: czy istnieje „najbardziej podstawowa” matematyczna teoria aksjomatyczna?
Hilbert wskazał kandydata: to teoria mnogości[4].

[1]Być może podstawą tego przekonania był sukces, jaki odniósł on w 1899 roku, gdy „poprawił” on Euklidesa przedstawiając pełny system aksjomatów dla klasycznej, euklidesowej geometrii.
[2]Punkt trzeci świadomie pominąłem.
[3]Pełny opis arytmetyki Peano poznamy później (str. 109).
[4]Budowę teorii mnogości zainicjował G. Cantor pracami opublikowanymi w latach 70-tych XIX wieku. Historycy

> Teoria mnogości pośredniczy między światem matematyki budowanym przez matematyków a rzeczywistością. Dla matematyków mainstreamowych jest matematycznym uniwersum[5]. Dlatego „modele teoriomnogościowe teorii pierwszego rzędu” uznają oni za „modele rzeczywiste”. I *vice versa*.



W [89] teorię mnogości nazwano *„urlogiką”* i charakteryzowano tak: to
(...) najbardziej prymitywny formalny język, którego potrzebujemy, gdy chcemy mówić o procesie uprawiania matematyki. Urlogika to ten aspekt matematycznej aktywności, która polega na zapisywaniu zdań, zgodnie pewnymi ustalonymi regułami. (...) TYM ZDANIOM PRZYPISUJEMY INTUICYJNIE ZNACZENIA W UNIWERSUM (UNIWERSACH) MATEMATYCZNYCH. *Niektóre zdania są prawdziwe z uwagi na to, że wyrażają sądy prawdziwe w tym uniwersum. (...)*

> *Jeżeli zapytamy matematyka, dlaczego twierdzi, że pewne zdanie ϕ zapisane na tablicy jest prawdziwe, to nie odpowie on, że jest prawdziwe, ponieważ jego znaczenie jest prawdziwym stwierdzeniem w matematycznym uniwersum. Odpowie, że ϕ* JEST PRAWDZIWE PONIEWAŻ MOŻE BYĆ UDOWODNIONE Z „PODSTAWOWYCH ZASAD” *(„first principles”). Te podstawowe zasady są nazywane „podstawowymi” ponieważ są postrzegane jako oczywiste (...) .*

Czy trudno powiedzieć, która zasada jest podstawową zasadą? Jeśli chcemy pozostać na możliwie najniższym poziomie to nie powinno to być rozstrzygane jako pytanie matematyczne. Nie wykluczamy, iż kształt listy zasad podstawowych może być przedmiotem sporu. Tak więc (arbitralnie) ustalamy zdania, które nazwiemy aksjomatami urlogiki i uznajemy ich prawdziwość.
Jeżeli za urlogikę przyjmiemy pierwszorzędową teorię zbiorów, to zdaniami urlogiki są zdania pierwszego rzędu z jedynym symbolem relacyjnym „$\in$”. Aksjomatami są aksjomaty ZFC”. [6]

Ostatnie stwierdzenie tego obszernego cytatu ma charakter warunkowy: możemy, ale nie musimy uznać, że ur-logiką jest teoria zbiorów. To założył Hilbert przekonany, że nie wprowadza ono żadnych ograniczeń, że jest to sposób na organizację całej zastanej (i zapewne przyszłej) matematyki.

Ale tak być nie musi.
Teoria mnogości ma wady - matematycy doskonale o tym wiedzą. Wskażemy je, gdy będziemy do tego przygotowani. Jeśli tak, to dlaczego od ponad stu lat teoria mnogości jest podstawą matematycznego mainstreamu, językiem codziennej praktyki ogromnej większości matematyków?

Jednym ze źródeł tego sukcesu jest ockhamowska prostota języka i aksjomatów ZFC (widzę miny tych, dla których matematyka jest koszmarem...). O znaczeniu „prostoty” w formułowaniu teorii - sarkastycznie, ale trafnie -pisał L.Susanka: *„Aksjomaty mają być tak przejrzyste, klarownie jasne, że każdy głupiec (...) uzna ich konieczność i słuszność [80].*

Prostota i elegancja ZFC wynika też z tego, że operuje ona pojedynczym pojęciem pierwotnym - zbiorem.

---

matematyki twierdzą, że hilbertowskie porządkowanie matematyki wynikało po części z chęci obrony cantorowskiej teorii mnogości przed atakami jego przeciwników: *„To co robią Weyl i Brouwer to nic innego jak pójście w ślady Kroneckera! Próbują oni uratować matematykę wyrzucając z niej wszystko to, co sprawia kłopot (...) Jeśli zgodzimy się na takie propozycje, to ryzykujemy utratę wielu największych naszych skarbów. (...) Z raju, który stworzył nam Cantor, nikt nie powinien móc nas wypędzić” - „Uber das Unendliche”, Math. Annalen 95 (1926).* Dodajmy, że H. Weil był studentem Hilberta... A jak pisze P. Raatikainen Hilbert zapewne nie studiował prac Brouwera...

[5]Mniej ortodoksyjni maistreamowcy gotowi są zgodzić się z twierdzeniem, że teoria mnogości jest najlepszym znanym przybliżeniem matematycznego uniwersum.

[6]Przedrostek „ur” pochodzi z języka niemieckiego i oznacza mniej więcej to samo co „pierwotny”, „początkowy”.

Kognitywiści kojarzą zbiór ze „schematem wyobrażeniowym pojemnika” [45][7]. To wyjątkowo uniwersalny schemat. *Kolekcja, mnogość, zestaw, komplet,* to - w języku potocznym - synonimy słowa zbiór. A inne - jak np. *ciąg, układ* - to zbiory wzbogacone o pewną strukturę. Nie mamy żadnych trudności ze wskazaniem desygnatów tego pojęcia w otaczającej nas rzeczywistości. Wprawdzie zbiory, które poznajemy zaczynając edukację matematyczną są wyłącznie skończone, ale to nam nie wadzi. Przeciwnie: przekonanie o słuszności większości aksjomatów ZFC czerpiemy z ich oczywistości w świecie skończonych zbiorów. Tylko niewielu dostrzega groźne konsekwencje zamiany niewinnego stwierdzenia „liczb naturalnych jest nieskończenie wiele” przez aksjomat „istnieje nieskończony zbiór liczb naturalnych”. Nikt nas nie uprzedza, że przyjęcie tego aksjomatu wymusi akceptację nieskończonej skali nieskończoności. Nikt nie mówi, że niewinny - w świecie zbiorów skończonych - aksjomat wyboru doprawadzi nas do kuriozalnych wyników. Choć korzystamy z teorii mnogości, niewiele o niej wiemy. A jeśli nawet, to odkładamy te problemy... na niedzielę[8].

Hilbert dążył do finalnej teorii matematycznej. Doskonałej, więc ockhamowsko oszczędnej. Dlatego ograniczenie pojęć pierwotnych do jednego - zbioru - uważał zapewne za zabieg w pełni uzasadniony (a może nawet konieczny)[9].

8.1 Istnienie matematyczne według Hilberta

> *Wybierając spośród podstawowych pytań metafizyki zadamy tutaj to jedno: „Czym jest rzecz?” Pytanie jest dość stare. To, co pozostaje w nim ciągle nowe, to tylko to, że trzeba o to pytać raz po raz.*
>
> *Martin Heidegger, What is a thing?*

Jak rozumieć „istnienie matematycznego bytu” jeśli nie zadowala nas platońska koncepcja transcedentnego matematycznego uniwersum? Na przełomie XIX i XX wieku genialną - i jak się mogło zdawać, ostateczną - odpowiedź na to pytanie zaproponował Hilbert. Sformułował on fenomenalnie proste kryterium istnienia „bytu matematycznego” [74]:

„if the arbitrarily given axioms do not contradicts each other (...) then the object defined through the axioms exists. That, for me, is the criterion of true and existence”[10]

To jest istota, manifest tzw. *realizmu pojęciowego*[11]. Pogląd Hilberta podzielał Poincare: *„Twór matematyczny istnieje zawsze, jeśli tylko jego definicja jest wolna od sprzeczności wewnętrznych i nie prowadzi do sprzeczności z przyjętymi twierdzeniami”[57].*

Przeanalizujmy dokładnie, jak czekiści[12], ten manifest. Formułując aksjomaty używamy nazw obiektów i relacji (zależności) między nimi. Aksjomaty opisują własności tych relacji. Teoria to zbiór aksjomatów[13].

Czym jest hilbertowska niesprzeczność teorii? Zgodnością z rzeczywistością? Nic z tych rzeczy: teoria jest *sprzeczna*, gdy można w niej zbudować jednocześnie dowód pewnego zdania ϕ (zapisa-

[7]Termin „SCHEMAT WYOBRAŻENIOWY” używany w kognistywistyce, w [9] objaśnia się tak: *„(...) umysł wykorzystuje (...) wiele schematów wyobrażeniowych takich jak schemat część-całość (...) schemat centrum-peryferie, schemat plan pierwszy-tło, schemat pojemnika”*

[8]*(...) a correct philosophical position of a true mathematician should be:*
- platonism – on weekdays – when I'm doing mathematics (otherwise, my „doing” will be inefficient),
- formalism – on weekends – when I'm thinking „about” mathematics (otherwise, I will end up in mysticism). To - nieco zmanipulowany - cytat z *R. Hersh, Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics, Advances in Mathematics, 1979, vol. 31.*

[9]Jeśli wątpisz w wagę tego argumentu, spróbuj ooświecić choćby chwilę na znalezienie schematu wyobrażeniowego, który mógłby zastąpić „zbiór” w roli podstawowego (i jedynego pierwotnego) pojęcia matematycznego.

[10]Pogląd Hilberta nie był aż tak rewolucyjny. Np. w [51] znaleźć można w artykuł P.Vopenki *„Zbiory aktualnie nieskończone”*, w którym Autor przywołuje taką oto wypowiedź Bolzano: *„Niemożliwym trzeba nazwać to, co przeczy jakiejś prawdzie czysto pojęciowej: możliwym przeto to, co nie jest w sprzeczności z żadną prawdą czysto pojęciową”.*

[11]Dziś hilbertowską koncepcję nazywa się *koherencyjną teorią prawdy* (koherencja (łac.) = spójność, spoistość).

[12]CzeKa - Wszechrosyjska Komisja Nadzwyczajna do Walki z Kontrrewolucją, Spekulacją i Nadużyciami Władzy.

[13]Dodajmy warunek, który w czasach budowy podstaw teorii zbiorów wydawał się oczywisty: zbiór aksjomatów powinien być rozstrzygalny - winnismy umieć orzekać, czy dane zdanie jest aksjomatem czy nie.

nego w języku tej teorii) i jego zaprzeczenia $\neg\phi$ [14]. Niesprzeczność to zaprzeczenie sprzeczności. Niesprzeczność matematycznej teorii jest jej własnością wewnętrzną.

> O NIESPRZECZNOŚCI ROZSTRZYGA SIĘ W SFERZE LOGIKI.
> Hilbert wyznaczył logice rolę gwaranta obiektywnego charakteru procesu poznania matematycznego. Sformalizowane dowodzenie miało stać się synonimem prawdziwości. Hilbert był przekonany, że będziemy potrafili w sposób sformalizowany (czyli obiektywny i pewny) dowodzić niesprzeczności budowanych teorii - *„(...) consistency of the comprehensive formalized system is to be proved by using only restricted, uncontroversial and contentual finitistic mathematics” [62].*
> Deklarując, że uprawomocnieniem istnienia matematycznej idei jest niesprzeczność opisującej ją teorii, Hilbert odrzucił wszelkie inne kryteria istnienia. Zapewne nie chciał mieszać do budowy podstaw matematyki kryteriów „miękkich” niosących ryzyko niejednoznacznych interpretacji.

Inicjacja procesu poznania matematycznego bytu należy do genialnych matematyków konstruujących teorię aksjomatyczną opisujacą tę ideę. Odnajdowanie jej „treści” - twierdzeń, które są logicznymi konsekwencjami aksjomatów - to zadanie robotników matematyki[15]

Zawarte w analizowanej deklaracji stwierdzenie: *„(...) dowolnie wybrane aksjomaty”* to nie przyzwolenie na ich absolutnie arbitralny wybór. To tylko potwierdzenie prawa do swobody twórczej. *„Hilbert nigdy nie twierdził, że matematyka jest systemem sformalizowanym - dla niego była to tylko* REKONSTRUKCJA *istniejącej matematyki dokonywana w pewnym określonym* CELU*”* [49]. *Hilbert was at hart a platonist [53].* Dlatego przyjął on jako oczywiste założenie, że tworzenie bytów matematycznych będzie rezultatem odpowiedzialnych działań.

Przekonanie, że tak można zapanować nad światem matematycznych bytów to jeden z paradygmatów koncepcji Hilberta[16]. Wyraża wiarę, że można sprawować pełną kontrolę nad tak abstrakcyjnym przedmiotem badań[17]. Zamiast o przekonaniu czy wierze, można mówić o świadomym przyjęciu pewnego paradygmatu poznawczego: *„Gdy badamy podstawy dziedziny nauki, musimy stworzyć system aksjomatów, który zawiera dokładny i pełny opis (...) idei tej dziedziny (...). żadne twierdzenie (...) nie jest uważane za prawdziwe, chyba, że można je wyprowadzić z aksjomatów za pomocą skończonej liczby logicznych kroków.” ([70] str. 9).* „Dążenie do uniwersalnej aksjomatyzacji” było (i po części jest) emanacją *fundacjonalizmu epistmologicznego* głoszącego, że *„istnieją sądy bazowe, które stanowią fundament poznania i nie wymagają uzasadnienia za pomocą innych sądów (wikipedia)”.*

Stwierdzenia rzeczywiste i idealne

Jedynym ograniczeniem matematyki Hilberta jest wymóg jej wewnętrznej niesprzeczności. Świadom niebezpieczeństw stąd wynikających[18], Hilbert sugerował, by w matematyce widzieć dwa światy: świat *„real statements”* i świat *„ideal statements”*. *Real statements* to jądro matematyki, stwierdzenia odnoszące się wprost do przedmiotu badań. *Ideal statements* to wszelkie stwierdzenia formułowane w języku, w którym te badania prowadzimy. To nie jest jasno zdefiniowany podział: *„Hilbert intended to isolate what he viewed as an unproblematic and necessary part of mathematics, an elementary part of arithmetic he called „finitistic mathematics” [61]. „Hilbert's characterization of*

---

[14]Równoważnie: sprzeczność teorii oznacza, że można w niej zbudować dowód dowolnego zdania (napisanego w jej języku).

[15]W języku teorii informacji ujmiemy to tak: aksjomaty to przekaz informacji a wartość przekazu to zbiór dowodliwych twierdzeń.

[16]Nie mylmy koncepcji (programu) Hilberta z listą 23 problemów matematycznych przedstawionych przez niego na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Paryżu w 1900 roku (choć drugi problem na tej liście - (*„udowodnić niesprzeczność aksjomatów arytmetyki”*) - jest jednym z elementów tego programu). Ten program powstawał przez lata, a dojrzałą formę osiągnął około roku 1920

[17]Zapewne dlatego Hilbert popularną w tym czasie tezę niemieckiego zoologa E. du Bois-Reymonda: *„Ignoramus et ignorabimus”* (nie znamy i nie poznamy) nazywał krótko „idiotyczną” i przeciwstawił jej swoją - *„Wir müssen wissen. Wir werden wissen.”* (Musimy wiedzieć. Będziemy wiedzieć.). Ale historia zakpiła sobie z Hilberta równie ostro, jak on ze swojego adwersarza. Więcej o tym w rozdziale poświęconym twierdzeniom Gödla.

[18]Opowieści o smerfach i Gargamelu są też wewnętrznie niesprzeczne...

both finitistic mathematics and real statements are somewhat unclear (...). Nevertheless, it is in any case clear that the real statements include numerical equations and their negations, bounded existential and universal quantifications of these, and at least some universal generalizations. They are thus included in (...) the sentences that logicians nowadays call by Π^0_1-sentences" [74][19]. Upraszczając (nad miarę): *real statements* to jądro matematyki, stwierdzenia odnoszące się do rzeczywistości i weryfikwalne w praktyce matematycznej. Do owego „bezproblemowego" jądra matematyki Hilbert włączał też logikę klasyczną.

Świat idealny jest po to, by łatwiej, jaśniej i głębiej, dowodzić stwierdzeń dotyczących świata realnego[20]. I nic ponad to - wzbogacenienie języka nie miało prowadzić do wyników, których nie można interpretować w realnej matematyce. Rozszerzenie realnej matematyki do świata twierdzeń idealnych miało być *konserwatywne (zachowawcze)*.

Nieskończoność w matematyce Hilberta

Jeśli zbiór to tylko schemat wyobrażeniowy, to dlaczego mamy ograniczać się do zbiorów skończonych? Hilbert mógłby powiedzieć: „jeśli uznanie istnienia zbiorów nieskończonych nie prowadzi do sprzeczności, to dlaczego mamy je odrzucać?" A skoro dzielimy świat matematyki na sfery „realną" i „idealną", to lokując zbiory nieskończone w tej drugiej, unikamy oskarżeń o ingerencję w świat „rzeczywistej" matematyki.

Akceptacja nieskończoności aktualnej w matematyce to konsekwencja uznania „prymatu niesprzeczności"[21]. Ale *„Hilbert was at heart a Platonist" [53]*, a Platon nie akceptował nieskończoności aktualnej. Jak to pogodzić? Po pierwsze, jak już wspomnieliśmy, platonizm w XIX wieku różnił się znacznie od starożytnego pierwowzoru. Po drugie, aby zrozumieć Hilberta można, jak sądzę; sięgnąć do teorii poznania Kanta:

(...) „rozum nie jest w stanie ograniczyć swojego poznania do obszaru możliwego doświadczenia. Dąży do poznania rzeczy samych w sobie, dokonuje operacji abstrahujących i systematyzujących, czego rezultatem są idee (czystego rozumu)"[22].

Wyjaśnijmy, barbarzyńsko upraszczając, naturę owych idei. Opisując rzeczywistość formułujemy sądy, które Kant dzielił na:
- *syntetyczne, a posteriori* czyli te, które są skutkami doświadczeń,
- *analityczne, a priori*, które są niezależne od doświadczenia.

Kant wyróżnił też kategorię sądów *syntetycznych a priori* - niezależnych od doświadczenia, rozumianego jako obserwacja realnego świata. Od sądów analitycznych - logicznie uzasadnionych konsekwencji aktualnej wiedzy - różnią się tym, że formułują nowe idee - idee czystego rozumu.
Zdolność do formułowania sądów syntetycznych a priori to istota naukowego procesu poznania: wolno (należy) tworzyć abstrakcyjne pojęcia, gdy przybliżają poznanie istoty rzeczy. Na różnych poziomach. Nie tylko na podstawowym, pozostającym w ścisłym związku z oglądem rzeczywistości. Na wyższych poziomach kreujemy nowe pojęcia („jedności") próbując uchwycić zależności między pojęciami niższego poziomu.
Poznania tej hierarchicznej struktury nie można wesprzeć rzeczywistym doświadczeniem[23].

Kant zakładał istnienie pewnych „bytów abstrakcyjnych" - takich jak np. liczby - które są niezbędne w procesie poznawania rzeczywistości. Nieskończoność aktualna w matematyce jest wy-

[19]Czym są owe „Π^0_1-sentences" powiemy w przyszłości.

[20]W opisie filozofii transcendentalnej Kanta w internecie znalazło się zgrabne zdanie: *„idealizm transcedentalny (...) polega na myślowym wykroczeniu poza sferę przedstawień, aby odkryć to, co je konstytuuje"*. Nieco inaczej, bardziej w duchu formalizmu, relację między realnym a idealnym składnikiem matematyki opisano w [74] tak: *„The latter (i.e. real statements - GJ) are finitistically meaningful, or contentual, but the former (i.e. ideal statements - GJ) are strictly speaking just meaningless strings of symbols that complete and simplify the formalism, and make the application of classical logic possible"*.

[21]Zakładanej, a nie udowodnionej, o czym już za chwilę.

[22]C S. Sztajer -*http://mumelab01.amu.edu.pl/SKH/S.Sztajer.html*

[23]Być może, te „wyższe poziomy" to hilbertowski świat „stwierdzeń idealnych".

tworem naszej zdolności do formułowania i manipulowania pojęciami abstrakcyjnymi. Matematyka jest sposobem poznania świata opartym na takich abstrakcyjnych pojęciach.

> Akceptacja kantowskiej teorii poznania stworzyła nową perspektywę dla dyskusji o nieskończoności. Wolną od poszukiwania uzasadnień w rzeczywistym świecie i pytań w stylu: „czy ktoś widział nieskończoność?" Koncepcja Kanta to kulminacja nurtu w nauce zapoczątkowanego przez Platona[24]. Nurtu, który za cel nauki uznawał poznanie rzeczywistości nie wprost, przez doznania zmysłowe, ale przez budowanie modeli wykraczających poza dosłowne odwzorowanie rzeczywistości. To woda na młyn matematyków. Oni „od zawsze" (od Pitagorasa) szukając prawdy wychodzili poza obszar fizycznego doświadczenia.

> Kant utwierdza ich w słuszności takiego postępowania mówiąc, że to konieczne, jeśli chcemy przybliżyć poznanie „rzeczy samej w sobie"[25].

Hilbert pisał: *nieskończoność nie jest realizowana nigdzie w rzeczywistości. Nie istnieje w naturze, nie stanowi też prawomocności naszej myśli racjonalnej - godnej uwagi harmonii między bytem i myślą. W przeciwieństwie do wcześniejszych prób Fregego i Dedekinda jesteśmy przekonani, że pewne pojęcia intuicyjne i pewien wgląd są niezbędnymi warunkami jakiejkolwiek wiedzy naukowej, że sama logika nie wystarczy. Operowanie nieskończonością może być uprawomocnione tylko przez skończoność. Rola, jaka pozostaje do odegrania nieskończoności, jest jedynie rolą idei – jeżeli, zgodnie ze słowami Kanta, pod ideą rozumieć pojęcie rozumu, które przekracza wszelkie doświadczenie i za pomocą którego to, co konkretne, zostaje dopełnione w sensie ogólności idei, której możemy bez obaw zaufać w ramach, które ustanowiła naszkicowana tu przeze mnie teoria"*[26].

8.2 Czy jest coś oprócz języka?

„Jeśli ktoś widzi to (teorię mnogości - GJ) jako raj, to dlaczego ktoś inny nie może uznać tego za żart?" - Wittgenstein.

Skąd tak ostra, wręcz brutalna, jak na standardy świata nauki, wypowiedź? Wśród tez jego traktatu, znalazła się, opatrzona numerem 5.6, następująca:

„Granice mojego języka wyznaczają granice mojego świata"[27]

Hilbert chciał poprzez rygorystyczny formalizm i pojedynczą fundamentalną teorię wiernie odwzorować matematyczne uniwersum. „Wiernie", czyli tak, by pojęcia definiowane w języku uniwersalnej teorii miały jedną jedyną interpretację. Wtedy opis formalny jest jednocześnie kreacją. Tymczasem zdaniem Wittgensteina:

> Język nie kreuje matematycznego uniwersum. Może je tylko opisywać. Zawsze w części, a nie w całości.

[24]Stawianie tak blisko siebie Platona i Kanta może dziwić a nawet gorszyć. Wszak Platon myślał o odkrywaniu transcedentnego świata idei a Kant o kreowaniu języka modelującego rzeczywistość. Różne motywacje, ale rezultaty nie tak znów odległe.

[25]G.W.Hegel (1770-1831) pisał: *„Rzecz sama w sobie (...) oznacza przedmiot, o ile abstrahuje się od wszystkiego, czym on jest dla świadomości, od wszystkich jego określeń czuciowych, jak też od wszystkich dotyczących go określonych myśli."* W skrajnej wersji poznanie rzeczy samej w sobie ma być wolne od ograniczeń jakie niesie język.
Skoro zabrnęliśmy tak daleko, to dodajmy jeszcze cytat z pracy doktorskiej A. Pietras *„Postneokantowskie projekty filozofii Nicolai Hartmann i Martina Heideggera"* (internet): *„(...) Kant wyraźnie sprzeciwia się przenoszeniu metod właściwych dla poznania matematycznego na grunt metafizyki. Wskazuje on na specyfikę poznania metafizycznego, któremu przypisuje zadanie analizy, a nie (jak w matematyce) konstrukcji, pojęć. „Zadaniem filozofii jest rozbiór, precyzowanie, i określanie pojęć, które są dane jako niejasne. Zadaniem matematyki jest łączenie i porównywanie pojęć dotyczących wielkości, które są jasne i pewne, aby zobaczyć, co z tego może być wywnioskowane." (...) O ile więc w matematyce chodzi o to, by przedstawić najpierw jasne definicje podstawowych pojęć, by w oparciu o nie rozwijać nasze poznanie za pomocą syntezy, o tyle w filozofii nie należy zaczynać od definicji, gdyż cel tej nauki jest inny."*
Pamiętajmy, że te uwagi Kanta odnosiły się do matematyki jego czasów, która była w większości konstruktywna.

[26]*D. Hilbert, On the infinite, 1926.* Cytowany fragment znalazłem w [18].

[27]*„Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt"*. A w książeczce J.Hadamarda *„Psychologia odkryć matmatycznych"* trafiłem na takie, warte przypomnienia słowa dwunastowiecznego filozofa Abelarda: *„język jest tworem intelektu a zarazem jego twórcą."*

Nie oczekujmy od filozofa Wittgensteina matematycznych dowodów jego tez. Paradoksalnie, takich dowodów dostarczyli sami matematycy. Pojawiły się tzw. *twierdzenia limitacyjne* wskazujace nieprzekraczalne granice języka matematyki. Zalicza się do nich wyniki Gödla, twierdzenia Löwenheima-Skolema, prace Turinga, twierdzenie Łosia czy też wspomniany już wynik Cohena - że poprzestaniemy na niektórych[28].

Odrzucając założenie, że pojęciom towarzyszą byty, zbliżyliśmy się do poglądów matematycznych nominalistów. Pojęcia matematyczne to nazwy (*„flatus vocis”*[29]) - aksjomaty, pod którymi kryje się ich treść - dowodliwe konsekwencje aksjomatów, Źródłem matematyki jest krytyczna analiza języka rozumianego jako narzędzie poznania. Takich pojęć jak trójkąt, okrąg czy kwadrat starożytni Grecy używali długo przed Euklidesem, mierząc co trzeba było zmierzyć i wznosząc wspaniałe budowle. Dodajemy i mnożymy też od niepamiętnych czasów. Język rachmistrzów i mierniczych został przejęty, uporządkowany a potem wzbogacony przez matematyków. Tak powstała geometria i arytmetyka. I inne teorie[30].

Ale matematyka, zgodnie ze wskazaniem Kanta, *„nie ogranicza swojego poznania do obszaru możliwego doświadczenia. Dąży do poznania rzeczy samych w sobie, dokonuje operacji abstrahujących i systematyzujących, czego rezultatem są idee”*. W ujęciu nominalistycznym oznacza to przyzwolenie na tworzenie języków, pojęć i teorii wysoce abstrakcyjnych.

Nominalista prowokowany do dyskusji o istnieniu zbiorów nieskończonych odpowie zapewne jak Gauss[31]: *Infinity is nothing more than a* FIGURE OF SPEECH *which helps us talk about limits. The notion of a completed infinity doesn't belong in mathematics. In other words, the only access we have to the infinite is through the notion of limits and hence, we must not treat infinite sets as if they have an existence exactly comparable to the existence of finite sets”* [32].

Przykład: prędkość to stosunek długości drogi do czasu podróży. Tak wyliczymy średnią prędkość podróży z miasta A do B. Ale wszyscy posługujemy się też pojęciem prędkości chwilowej obiektu i wierzymy, że „licznik” w samochodzie nam ją pokazuje. Jednak to nie tak. Prędkość chwilowa to wielkość graniczna w stosunku do prędkości średniej. Jej zdefiniowanie wymaga nieskończonego skracania odcinka czasu, w którym dokonujemy pomiaru średniej prędkości. A to, jak już wiemy, w rzeczywistości fizycznej jest niemożliwe. Prędkość chwilowa to abstrakcja, należąca do języka modelowania matematycznego[33].

Nominalistę nie interesuje pytanie o istnienie zbioru i innych obiektów matematycznych. One istnieją jako pojęcia językowe. To, co należy robić, to poszukiwać związków między nimi.

> Nie trzeba pytać, co opisuje tak rozumiana matematyka. Ona opisuje to samo, co języki naturalne. Ale robi to bardziej dogłębnie, próbując dociec „istoty rzeczy”. I to w sposób, który zapewnia kontrolę nad procesem poznania i obiektywny charakter uzyskanej tak wiedzy.

Patrząc na dzieło Cantora i Hilberta z tej perspektywy można uznać, że chodziło właśnie o język umożliwiający budowę jednorodnej i uniwersalnej siatki pojęć zdolnej pokryć całą matematykę.

B. Russell w *„Principia Mathematica”* napisał: *„Matematyka jest zupełnie obojętna wobec zagadnienia, czy jej przedmioty istnieją”*. To nie rozstrzyga sporu, ale lokuje go tam, gdzie jego miejsce - poza matematyką[34]. Nie jest ważne, skąd płynie motywacja. Ważne są rezultaty.

---

[28] O tych twierdzeniach będzie mowa w dalszych rozdziałach.

[29] *„Flatus vocis”* - wyrażenie słowne. Termin wprowadzony przez średniowiecznych nominalistów.

[30] Kognitywiści twierdzą, że pojęcia matematyczne bazują na pojęciach języka potocznego [45]. Np. matematyczne pojęcie zbioru czy klasy opiera się na *„(...) pojęciu zespołu przedmiotów zgromadzonych w ograniczonym fragmencie przestrzeni”* (cytuję za [9]).

[31] Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) - genialny niemiecki matematyk, fizyk a także astronom.

[32] http://en.wikipedia.org/wiki/Controversy_over_Cantor's_theory

[33] Jeśli długość drogi przebytej w czasie t opisuje funkcja $f(t)$, to średnią prędkość między chwilą t_0 i chwilą t_1, opisuje iloraz $\frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}$. Prędkość chwilowa w chwili t_0 to wielkość, do jakiej zmierza ten iloraz przy t_1 zbliżanym nieskończenie do t_0 czyli... pochodna funkcji f w punkcie a. Jeśli ruch pewnego obiektu opisuje funkcja ciągła, która nie ma pochodnej w punkcie a, to nie można mówić o prędkości chwilowej tego obiektu w tym punkcie.

[34] Russell to - obok G. Frege i A.N. Whiteheada - jeden z twórców *logicyzmu*, który widzi istotę matematyki w

> Pablo Picasso mówił: *„Sztuka to kłamstwo, które pozwala zbliżyć się do prawdy”*. Czy powiedzenie tego samego o matematyce jest niewybaczalnym świętokradztwem?

8.3 O konstruktywizmie Brouwera (subiektywnie)

To exist in mathematics means to have been constructed by intuition. L. Brouwer

Przyjęliśmy - upraszczając - że jednym z wyróżników matematyki Cantora i Hilberta jest sprowadzenie istnienia obiektu matematycznego do niesprzeczności wprowadzającej (opisującej) go teorii. To, w szczególności, prowadzi do akceptacji nieskończoności aktualnej.
Czy można myśleć o matematyce bez tego paradygmatu?

Matematyka ograniczająca nieskończość do struktur rekurencyjnych jest bliska postulatom matematycznego *finityzmu*. Finityści uznają istnienie obiektów matematycznych gdy dane są „bezpośrednio” lub dają się skonstruować w skończonej liczbie kroków. Fintizm można charakteryzować jako *„(matematykę) opartą na pojęciu liczby naturalnej (lub skończonych, konkretnie reprezentowalnych strukturach) i w konsekwencji akceptacje dowodu indukcyjnego i definiowania rekurencyjnego.” [85].* To jednak, zdaniem wielu, zbyt radykalne, bo nadmiernie zubaża matematykę.
Ale matematyczny konstruktywizm niejedno ma imię[35] Spośród różnych jego odmian najbardziej intrygująca jest koncepcja matematyki L. Brouwera [61].

Matematyk ze szkoły hilbertowskiej ma spory kłopot ze zrozumieniem Brouwera. Rzecz nie w tym, że neguje on ten czy inny aksjomat teorii mnogości. On neguje wszystko: platońskie twierdzenie, że obiektami matematyki są byty idealne i wiecznotrwałe, prymat metody aksjomatyczno-dedukcyjnej i hilbertowskie równości: założoną *„niesprzeczność = istnienie”* i oczekiwaną *„prawdziwość = dowodliwość”*. Ale to też sprawia, że poznanie matematyki Brouwera jest warte trudu.
Szukając sposobu ukazania tej fundamentalnej różnicy posłużymy się - jakby inaczej - metaforą.

Malarstwo (...) posługuje się środkami plastycznego wyrazu, np. barwna plama i linia (...). Poszukiwanie odmiennych form wyrazu przyczynia się do kształtowania nowych oryginalnych kierunków i niezwykłej różnorodności dzieł malarskich. - to jest twórczość.

Krytyka sztuki (...) zajmuje się budowaniem kontekstu myślowego nowych zjawisk artystycznych, wspomaganiem teoretyczną refleksją oraz interpretacja działań artystycznych; (...) towarzyszy zjawiskom sztuki na zasadzie współuczestnictwa - to jest wiedza o malarstwie.

> Według Brouwera twórczość matematyczna jest bardziej sztuką niż „aktywnością społeczną”. To suma indywidualnych dokonań nielicznych geniuszy, a nie rezultat codziennej dłubaniny rzeszy robotników matematyki.
> Twórczości matematycznej nie można się nauczyć. Można opanować jej język, poznać pojęcia i metody badawcze. Ale stąd daleko do twórczości[36].

---

badaniu związków przyczynowo-skutkowych między zdaniami (stwierdzeniami) a nie w dyskusjach o zasadności przyjęcia takich czy innych aksjomatów egzystencjalnych. Stąd niechęć Russella do dyskusji o aksjomatach dekretujących istnienie nieskończonych obiektów. Krakowskim targiem godził się, by ceną za niewłączenie „aksjomatu o istnieniu nieskończoności” - nazwijmy go $\exists N$ - do zbioru aksjomatów, była zgoda na rozpatrywanie tez w postaci implikacji $\exists N \rightarrow \phi$ - *„jeśli założymy istnienie ... , to ...”*

[35] Obszerną informację o różnych odmianach konstruktywizmu znajdziemy w [84] i [85]. Upraszczając: wszystkich konstruktywistów łączy odrzucenie „zbioru” jako pojęcia pierwotnego. Np. Bishop uważał, że: *”(...) the notion of set is specified by stating that a set has to be given by a description of how to build its elements and by giving a binary relation of equality (...)”*

[36] *„Nie jestem językoznawcą. Jestem znawcą języka” - J.Tuwim.* Analitycy twórczości Brouwera dostrzegają w jego koncepcji wpływy E. Husserla (1859-1938), twórcy fenomenologii, który uważał intuicję za źródło poznania i z rezerwą odnosił się do roli języka w poznaniu. To zdanie może sugerować, że wiem, co to fenomenologia. Niestety.
Sugestia, że dla Brouwera matematyka jest bardziej sztuką niż nauką jest autorska i stworzona wyłącznie na użytek tego tekstu. Ten podrozdział nie jest obiektywnym opisem intuicjonizmu Brouwera. To tylko zapis tego, co zdołałem „poukładać” próbując rozpoznać, czym jest intuicjonizm.

Brouwer dystansował się od matematycznego formalizmu. *„Matematyka (...) jest w zasadzie niezależna od języka. Komunikacja przez język może służyć do sugerowania podobnych konstrukcji myślowych innym, ale nie ma gwarancji, że te inne konstrukcje są takie same" [85].*
Każdy matematyk potwierdzi, że formalne zapisanie dowodu matematycznego to tylko ostatni i najłatwiejszy etap pracy. Nikt też nie zaprzeczy, że w twórczej grupie matematyków może wytworzyć się swoisty „team spirit" a jej członkowie moga przekazywac sobie nie do końca zwerbalizowane idee. Tak jak muzycy w czasie jam session, o piątej nad ranem[37].

Nie tylko Brouwer odnosił się nieufnie do roli języka w nauce. Wątpili już starożytni Grecy[38]. W XVIII wieku von Humboldt pisał: *„Człowiek postrzega głównie przedmioty wśród których żyje, a ponieważ jego odczucia i działania zależą od jego precepcji, rzec można, że odbiera je wyłącznie tak, jak przedstawia je język. (...) każdy społeczny język rysuje magiczny krąg wokół ludzi, do których należy, krąg, z którego nie ma ucieczki oprócz przejścia do innego kręgu"*[39]. Jednak o ile dla Humboldta (i Wittgensteina) ograniczenia wyznaczane przez język są nieusuwalną koniecznościa, to Brouwer chciał uwolnienia twórczości matematycznej od takiego ograniczenia.

„Brouwer (...) stara się przejść między Scyllą platonizmu a Charybdą formalizmu" (Stanfordzka Encyklopedia Filozofii). Jego stosunek do formalizmu już poznaliśmy. O platonizmie - matematycznej transcedencji - jego uczeń i kontynuator, duński logik A.Heyting pisał: *„Nie przypisujemy istnienia niezależnego od naszej myśli, tzn. transcendentalnego istnienia ani liczbom całkowitym ani jakiemukolwiek innemu obiektowi matematycznemu"*. Pozbawiony tych fundamentów matematyk bezradnie pyta - jesli nie to (jest matematyką), to co?

„Obiekty matematyczne, poza pewnymi początkowymi intuicjami myślowymi, są konstrukcjami ludzkiego umysłu, opartymi na tych pierwotnych intuicjach" [56]

|| Matematyka Hilberta to matematyka pojęć. Matematyka Brouwera to matematyka konstrukcji.

Brouwer uważał, że mamy wrodzoną zdolność do tworzenia takich konstrukcji i ich mentalnej akceptacji. Ta zdolność - jak wszystko na tym świecie - nie jest dana wszystkim „po równo". Co więcej: możemy błądzić. Dlatego nieco poźniej Brouwer wprowadził korektę[40] - zaczął mówić o konstrukcjach kreowanych przez *idealnego matematyka*: *the objects of mathematics are* MENTAL CONSTRUCTIONS IN THE MIND OF THE (IDEAL) MATHEMATICIAN. *Only the thought constructions of the (idealized) mathematician are exact." [85]*[41]. Nie jest to jednak wprowadzanie wątków transcedentnych, a jedynie próba obiektywizacji pojęcia matematycznej konstrukcji.

Osnową tych konstrukcji są pewne pierwotne pre-intuicje - *„primordial intuition of mathematics" [3]"*. Wśród nich ta najważniejsza - związana z liczbami naturalnymi[42]:

„One, two, three,..., we know by heart the sequence of these sounds (spoken ordinal numbers) as an endless row, that is to say, continuing for ever according to a law, known as being fixed. (...) These things are INTUITIVELY CLEAR". To zdanie, które znalazło się na jednej z pierwszych stron

---

[37] To kolejna użyteczna metafora: nikt przecież nie twierdzi, że tworzenie muzyki to umieszczanie kropek na pięciolinii... Nikt więc nie powinien twierdzić, że twórczość matematyczna to „pisanie dowodów".

[38] *Sokrates: jasne jest, ze należałoby szukać jakichś innych rzeczy oprócz nazw (...), które ukazywały by nam bez nazw, które z nich sa prawdziwe.*
Kratylos: Tak mi się zdaje.
S.: Jesli tak, to wydaje się możliwe poznanie bytów bez nazw.
K.: Widocznie. (...)
S.: Jeśli więc możliwie najlepiej można poznać rzeczy poprzez nazwy i można je również poznać przez nie same, to która z tych form poznania będzie piękniejsza i bardziej prawidłowa? (Platon, Kratylos)

[39] Wilhelm von Humboldt (1767 - 1835), niemiecki filozof i językoznawca. Cytuję za M.McLuhanem (*„Galaktyka Gutenberga"*), który z kolei cytuje E.Cassiera (*„Language and Myth"*).

[40] Koncepcja Brouwera nie powstała w wyniku jednorazowego „aktu stworzenia". Powstawała przez lata i była modyfikowana. Nie ułatwia to jej prezentacji... .

[41] *„Ideal mathematician", „idealized human mind"* lub *„creating subject, creative subject"*.

[42] Początkowo Brouwer traktował również *continuum* jako taką pierwotną intuicję. Jednak później w jego matematyce pojawiła się konstrukcja tego obiektu.

rozprawy doktorskiej Brouwera (1907), to *„creme de la creme”* jego wizji matematyki. Współcześni kognitywiści piszą: *„Niezależnie od kultury oraz wykształcenia, wszyscy ludzie dysponują zdolnością bezrefleksyjnego, natychmiastowego ustalenia, z jaką niewielką liczbą obiektów mają do czynienia (...) Przy większej liczbie obiektów wymagana jest już pewna refleksja, działania polegające na porządkowaniu i liczeniu”* [59][43].

W XXI wieku, dla przeciętnie wykształconego człowieka „intuicyjnie akceptowalne” jest coś więcej niż *„one, two, three”*. Panujemy nad liczbami naturalnymi, całkowitymi i wymiernymi[44]. Te liczby są „skończenie konstruowalne”: każda liczba naturalna jest „którymś tam” następnikiem zera, każda liczba całkowita jest różnicą dwóch liczb naturalnych, a liczba wymierna - ilorazem dwóch liczb całkowitych.

Z liczbami rzeczywistymi jest inaczej - pojedyncza liczba rzeczywista to granica (nieskończonego) ciągu Cauchy'ego liczb wymiernych. Zatem jej konstrukcja wymaga przede wszystkim akceptacji aktualnej nieskończoności jako pojęcia matematycznego. Ale nie zawsze jest to KONSTRUKCJA akceptowana w matematyce Brouwera.

Oto przykład: *rozważmy ciąg* (a_n)*, który jest złożony z samych jedynek - jeżeli istnieje nieparzysta liczba doskonała i jest złożony z samych zer - w przeciwnym przypadku*[45].

W matematyce Cantora i Hilberta jest to poprawnie zdefiniowany ciąg Cauchy'ego[46]. ISTNIEJE liczba rzeczywista wyznaczona przez ten ciąg.
Ale, jak dotąd, nie wiemy, czy istnieje jakakolwiek liczba nieparzysta doskonała. Nie umiemy też temu zaprzeczyć.
Liczba rzeczywista, którą wyznacza ciąg (a_n) jest „niekonstruktywna”. Nie wiemy o niej nic pewnego (jednoznacznego) ponad to, że istnieje (w sensie Hilberta). Przyczyną tak rozumianej niekonstruktywności jest to, że opisując ciąg (a_n) i dowodząc, że jest to ciąg Cauchy'ego korzystamy z *prawa wyłączonego środka* - tautologii $X \vee \neg X$.

> Według Brouwera, prawo wyłączonego środka jest źródłem niekonstruktywizmu w matematyce Hilberta i Cantora.

Brouwer, lansując swoje wyobrażenie „matematycznej konstrukcji”, zanegował to prawo klasycznej logiki. Logika jego matematyki to NIE klasyczna logika dwuwartościowa ale *logika intuicjonistyczna*[47]. Na przykład, w jego matematyce zdanie *„istnieje nieparzysta liczba doskonała lub nieprawda, że istnieje taka liczba”* jest prawdziwe wtedy, gdy potrafimy dowieść istnienia takiej liczby lub dowieść, że to niemożliwe.

Matematykom mainstreamowym, żyjącym w świecie teorii mnogości trudno zaakceptować odrzucenia prawa wyłączonego środka, bo ma to konsekwencje rujnujące ich wyobrażenie matematyki. Np. metafora geometryczno-liczbowa dla liczb rzeczywistych to konsekwencja *prawa trychotomii: „dla dowolnych dwóch liczb rzeczywistych* x, y : $x = y$ *lub* $x > y$ *lub* $x < y$. W dowodzie tego twierdzenia również korzystamy z prawa wyłączonego środka[48]. Jak żyć (panie premierze)?.
Czasem jednak udaje się zastąpić teoriomnogościowe twierdzenie jego konstruktywną wersją. I tak konstruktwna wersja wspominanego wcześniej *twierdzenia Darboux* wygląda tak:

„jeśli funkcja f: : $[a, b] \to \mathcal{R}$ *jest ciągła,* $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, *to dla dowolnej liczby* n *istnieje liczba* $c \in [a, b]$ *taka, że* $|f(c)| < \frac{1}{2^n}$.”

Nie należy jednak sprowadzać brouwerowskiego konstruktywizmu do wyrzucenia z matematyki

[43] Jeśli pominiemy transcedencję, to taka jest też istota stwierdzenia Kroneckera, że *„liczby naturalne pochodzą od Boga”*.

[44] „Panujemy”, czyli potrafimy korzystać z tych struktur liczbowych stosownie do potrzeb.

[45] *Liczba doskonała* to liczba naturalna równa sumie swoich dzielników. Np. $6 = 1 + 2 + 3$. Do dziś nie wiadomo, czy istnieje nieparzysta liczba doskonała.

[46] zakładając istnienie doskonałej liczby nieparzystej dowodzimy, że ten ciąg składa się z samych jedynek, a potem, przecząc temu założeniu, pokazujemy, że jest to nieskończony ciąg zer. W obu przypadkach jest to więc ciąg Cauchy'ego.

[47] (str. 69).

[48] Ściślej: znane mi dowody korzystają z tego prawa.

prawa wyłączonego środka, choć, szczerze mówiąc, jest to jedyna cecha matematyki brouwerowskiej, którą można wskazać nie wikłając się w niejasne wywody filozoficzne. Jego *Principle of Constructive Existence* sformułowano w [56] tak: *a mathematical object exists if it has been constructed* WITH AN ACCEPTED METHOD" opatrując dodatkowym komentarzem: *„It is non-trivial to say which constructive method is the right one"*[49].

Konstrukcje liczb rzeczywistych Dedekinda i Cantora wymagają akceptacji aktualnej nieskończoności. Dlatego fundamentalnym wyzwaniem dla matematycznego konstruktywizmu było zbudowanie „konstruktywnego continuum". Jak to zrobić, nie korzystając z nieskończonych zbiorów? Upraszczając: nieskończoność w matematyce Brouwera jest bliska nieskończoności potencjalnej. Brouwerowskie obiekty nieskończone muszą mieć swoją „specyfikację" w postaci *spreadu*[50]:

„a spread M is determined through the (non-deterministic) spread-law Λ_M (...). Λ_M decides which finite sequences of natural numbers are accepted or not. Namely Λ_M:
(i) decides which naturals are admitted as sequences of length 1,
(ii) accepts $(a_1 a_2, \ldots, a_n)$, if it accepts $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})$,
(iii) decides, for any natural k, whether it accepts $(a_1, a_2, \ldots, a_n, k)$ or not, if it accepts $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$,
(iv) accepts $(a_1, a_2, \ldots, a_n, k)$, for some k, if it accepts $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$"[51]

W tej definicji liczby naturalne możemy zastąpić liczbami całkowitymi, wymiernymi bądź innymi obiektami o „finitarnej konstrukcji".

Definicja spreadu przypomina definicję struktury rekurencyjnej, jednak nią nie jest: ta druga wskazuje konstruktory wykorzystywane w budowie obiektów, podczas gdy spread-law wskazuje jedynie ograniczenia realizowanych „step by step" konstrukcji ciągów.

> *The notion of spread is one of Brouwer's most important conceptual innovations, since* IT HOLDS TOGETHER *all constructed sequances, without containing them as a set. The spread concept derives from Brouwer's need to avoid the concept of absolutely infnite set.*

Spread $\mathbb{R}$, wyznaczający zasady konstrukcji bouwerowskich liczb rzeczywistych, opisany jest tak:

- budowę ciągu można zacząć od dowolnej liczby wymiernej,

- liczba wymierna a może być dopisana jako następna do ciągu $a_1, \ldots, a_n$, o ile $|a - a_n| < 2^{-n}$.

Myśląc teoriomnogościowo, zbiór opisany przez spread $\mathbb{R}$ skojarzymy z podprzestrzenią $\mathcal{SP}(\mathbb{R})$ przestrzeni $\mathcal{SP}(Q^*)$ (str. 57), której punktami $\mathbb{R}$-*ciągi* - nieskończone ciągi liczb wymiernych budowane z zasadami określonymi w $\mathbb{R}$.
Ale $\mathbb{R}$-ciągi nie są „obiektami brouwerowskimi": *„every such sequence is produced step-by-step and (...) it is* NEVER FINISHED *process,"*. „Brouwerowskie" - konstruowalne (i dostępne) są tylko skończone podciągi początkowe $\mathbb{R}$-ciągów dowolnej długości.

> Strukturę wyznaczoną przez spread $\mathbb{R}$ należy kojarzyć z BEZPUNKTOWĄ wersją przestrzeni $\mathcal{SP}(\mathbb{R})$, w której bazowe zbiory otwarte są wyznaczone przez skończone ciągi budowane zgodnie z zasadami spreadu $\mathbb{R}$.

To, co wiemy o $\mathbb{R}$-ciągu - co jest w danej chwili dostępne - opisują jego skończone podciągi początkowe:

- partial knowledge of an on-going object intuitionistically means knowledge of an initial part of it.

- knowledge of an on-going object intuitionistically means the gradual and evergrowing partial knowledge of it.

---

[49] *On an intuitionistic view (...), the only thing that can make a mathematical statement true is a proof of the kind we can give:* NOT, INDEED, A PROOF IN A FORMAL SYSTEM, *but an intuitively acceptable proof, that is, a certain kind of mental construction"* - M. Dummet, Elements of Intuitionism, The Clarendon Press, Oxford, 1977.

[50] Nie znam polskiego odpowiednika tego terminu. *Zasada rozszerzania (?)*

[51] [56].

O tym, czy dany $\mathbb{R}$-ciąg ma interesującą nas własność, można orzekać tylko na podstawie znajomości jego pewnego skończonego, początkowego podciągu. To *zasada ciągłości („continuity principle”)* - paradygmat matematyki brouwerowskiej[52]. Sformułuję ten paradygmat tylko w odniesieniu do funkcji przyporządkowujących $\mathbb{R}$-ciągom liczby naturalne:

funkcja ϕ: $\mathcal{SP}(\mathbb{R}) \to \mathbf{N}$ jest zgodna z zasadą ciągłości, jeśli dla każdego $\mathbb{R}$-ciągu α można wskazać liczbę naturalną m taką, że $\phi(\alpha) = \phi(\beta$ jeśli tylko β jest $\mathbb{R}$-ciągiem takim, że $alpha(i) = \beta(i)$ dla wszelkich $i < m$,

„o wartości funkcji w „punkcie α” decyduje kształt pewnego skończonego podciągu tego $\mathbb{R}$-ciągu”.

> *„The continuity principle is a natural axiom born by exiprence. We never were in a situation in which we found reason to affirm the premiss but hestitate to hold the conclusion” [90].*
> Ten paradygmat ustala interpretację terminu „funkcja” w matematyce Brouwera - wszystkie funkcje, które rozpatrujemy muszą spełniać zasadę ciągłości.

Zasada ciągłości jest mniej mistyczna, gdy spojrzymy na zbiór $\mathbf{N}$ jak na dyskretną przestrzeń topologiczną (w której, w szczególności, każdy jednoelementowy podzbiór, jest otwarty). Wówczas przyporządkowanie $\mathbb{R}$-ciągom liczb naturalnych zgodne z zasadą ciągłości to nic innego jak ...funkcja ciągła z przestrzeni $\mathcal{SP}(\mathbb{R})$ do dyskretnej przestrzeni $\mathbf{N}$.

Różne ciągi Cauchy'ego mogą wyznaczać tę samą (teoriomnogościową) liczbę rzeczywistą (bo mogą mieć tę samą granicę). W brouwerowskim świecie jest podobnie: unika się wprawdzie stwierdzenia, że „liczba rzeczywista to klasa równoważnych $\mathbb{R}$-ciągów” (bo to byt nieskończony), ale definiuje się odpowiednią równoważność: *ciągi α, β są koincydentne - $\alpha =_R \beta$ - gdy dla każdej liczby naturalnej n, $|\alpha(n) - \beta(n)| < \frac{1}{2^{n-1}}$.*

Dlatego (brouwerowska) *funkcja rzeczywista (real function)* to efektywna metoda przyporządkowania ϕ: $\mathcal{SP}(\mathbb{R}) \rightsquigarrow \mathcal{SP}(\mathbb{R})$ taka, że dla dowolnych $\mathbb{R}$-ciagów α, β, jeśli $\alpha =_R \beta$, to również $\phi(\alpha) =_R \phi(\beta)$ [90][53] .

Można teraz udowodnić twierdzenie, które - dla matematyka mainstreamowego - jest herezją:

„każda funkcja rzeczywista jest ciągła”(!) [90].

Ale nie boimy się stosu, bo terminy „funkcja” i „ciągłość” mają tu inny sens niż w teorii mnogości.

Ostatnia uwaga: w dyskusjach o brouwerowskim continuum wiele uwagi poświęca się podziałowi $\mathbb{R}$-ciągów na *„lawlike sequences”* i „lawless sequences (choice sequences)”. Te pierwsze to $\mathbb{R}$-ciągi którym towarzyszą procedury generowania ich skończonych podciagów początkowych dowolnej długości. Takie są np. ciągi definiowane rekurencyjnie. ale nie tylko:

> Liczba Pi jest rzeczywistą liczbą niewymierną, ale jest obliczalna: można wyznaczyć dowolnie długi odcinek początkowy jej rozwinięcia dziesiętnego (binarnego) korzystając choćby ze wzoru Leibniza:
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$
>
> Dlatego potrafimy (przynajmniej teoretycznie) generować dowolny skończony podciąg początkowy $\mathbb{R}$-ciągu odpowiadającego liczbie Pi. Ten ciąg jest „lawlike”[54].

[52] Jeśli chcemy „coś” powiedzieć o wspólnych własnościach wszystkich $\mathbb{R}$-ciągów musimy posłużyć się *ciągiem losowym*: *„A spread choice sequence is completely diffrent from a classical sequence, which is a complete object under umbrella of classisally accepted absolute infinity.”[56].* O ciągu losowym wiemy tylko to, że jego podciągi początkowe są budowane według zasad spreadu $\mathbb{R}$.

[53] Niestety, w pracy [90] z której tu korzystam, nie tłumaczy się, jak rozumieć termin „effective method”. Pewnie chodzi o to, że każdą liczbę $\phi(\alpha)(n)$ wyznaczamy na podstawie znajomości skończonego podciągu α (continuity principle(?)). Zainteresowamy polecam lekturę przywoływanej pracy [90].

[54] Liczba π i jej rozwinięcie - *nieskończony ciąg cyfr, którego każdy skończony początkowy odcinek potrafimy obliczyć, ale całości nie poznamy nigdy* - była chętnie wykorzystywana przez Brouwera do konstrukcji jego „słabych kontrprzykładów”.

„Lawless sequences” to pozostałe $\mathbb{R}$-ciagi. (tak mi się przynajmniej wydaje).

To jedynie „namiastka zarysu szkicu” opowieści o matematyce Brouwera. Ale, mam nadzieję, wystarczająca by rozumieć dylemat:

Hilbert czy Brouwer?

G. Sambin w artykule *Step towards dynamic construtivism* pisał: (...) *„brouwerowska filozofia matematyki (...) jest odrzucana przez większość z uwagi na jej „związki z mistycyzmem”.*
Ale czy matematyka Hilberta jest w pełni racjonalna? Czytajmy dalej: *„(...) prawdziwym problemem jest to, że jesli przez religię rozumiemy jakakolwiek formę nieudowodnionej wiary w coś, co jest poza naszą percepcją, to najwyraźniej również wszystkie inne istniejące filozofie matematyki opieraja się na takiej religii.(...) Problem z religią polega na tym, że często przyjjmowano ją bezkrytycznie, w postaci „ślepej wiary”, co może prowadzić do dużych błedów. (...)* Przypuszczenie, a nawet dogmat, że musi istnieć prawda absolutna i że klasyczne aksjomatyczne teorie mnogości, takie jak ZFC, muszą stanowić część tej prawdy, spowodowało szereg błedów kulturowych - nawet intelektualnych okrucieństw - *wsród których paradoks Banacha-Tarskiego to bardzo zły – lub doskonały – przykład. To w większym stopniu niż filozoficzna chwiejność ZFC okrutnie osłabiło naszą intuicję, oddzielając ją od tego, w co teoria ZFC każe nam wierzyć” (...)*[55].

Mistycyzm matematyki Hilberta sprowadza się do jednorazowego aktu zawierzenia - uznania uniwersalności praw klasycznej logiki i aksjomatów teorii mnogości. Potem wszystko jest poukładane. To stwarza pozór racjonalności. Nikt przecież nie żąda od rozpoczynających karierę młodych matematyków świadomej akceptacji aksjomatów teorii mnogości. Wchodzimy w ten świat nieświadomi problemów jakie leżą u podstaw. Co zdumiewające, większość robotników matematyki wcale nie chce zmieniać tego stanu rzeczy... . A przecież *„z pewnościa (...) nie jest rozsądną praktyką opieranie wiedzy naukowej na jakiejkolwiek formie wiary religijnej”* - G. Sambini.

W matematyce Brouwera ta niepewność jest bardziej widoczna. Jego matematyka jest sztuką, czyli, z natury rzeczy, jest subiektywna i „mistyczna” - nie tylko w warstwie podstawowych ustaleń ale właściwie w każdym działaniu.

W chwili powstania teoria mnogości była jednocześnie zachowawcza i rewolucyjna. Zachowawcza, bo wierna euklidesowemu paradygmatowi postrzegania matematyki jako teorii aksjomatycznej. Rewolucyjna, bo nie tylko porządkowała zastaną matematyką, ale otworzyła też nowe obszary

Podziwu godna liczba Pi
trzy koma jeden cztery jeden.
Wszystkie jej dalsze cyfry też są początkowe
pięć dziewięć dwa, ponieważ nigdy się nie kończy.
Nie pozwala się objąć sześć pięć trzy pięć spojrzeniem,
osiem dziewięć obliczeniem,
siedem dziewięć wyobraźnią,
a nawet trzy dwa trzy osiem żartem, czyli porównaniem
cztery sześć do czegokolwiek
dwa sześć cztery trzy na świecie.
Najdłuższy ziemski wąż po kilkunastu metrach się urywa.
Podobnie, choć trochę później, czynią węże bajeczne.
Korowód cyfr składających się na liczbę Pi
nie zatrzymuje się na brzegu kartki,
potrafi ciągnąć się po stole, przez powietrze,
przez mur, liść, gniazdo ptasie, chmury, prosto w niebo,
przez całą nieba wzdętość i bezdenność.
O, jak krótki, wprost mysi, jest warkocz komety!
Jak wątły promień gwiazdy, że zakrzywia się w lada przestrzeni!
A tu dwa trzy piętnaście trzysta dziewiętnaście
mój numer telefonu twój numer koszuli
rok tysiąc dziewięćset siedemdziesiąty trzeci szóste piętro
ilość mieszkańców sześćdziesiąt pięć groszy
obwód w biodrach dwa palce szarada i szyfr,
w którym słowiczku mój a leć, a piej
oraz uprasza się zachować spokój,
a także ziemia i niebo przeminą,
Podobnie, choć trochę później, czynią węże bajeczne.
Korowód cyfr składających się na liczbę Pi
nie zatrzymuje się na brzegu kartki,
potrafi ciągnąć się po stole, przez powietrze,
przez mur, liść, gniazdo ptasie, chmury, prosto w niebo,
przez całą nieba wzdętość i bezdenność.
O, jak krótki, wprost mysi, jest warkocz komety!
Jak wątły promień gwiazdy, że zakrzywia się w lada przestrzeni!
ale nie liczba Pi, co to to nie,
ona wciąż swoje niezłe jeszcze pięć,
nie byle jakie osiem,
nie ostatnie siedem,
przynaglając, ach przynaglając gnuśną wieczność
do trwania.

Wisława Szymborska, Liczba Pi

[55]Twierdzenie Tarskiego-Banacha, mówi, że *„kulę można pociąć na skończenie wiele kawałków, z których można złożyć dwie kule równe kuli wyjściowej.”*

eksploracji. Proponując niekontrowersyjne (w większości i dla większości) aksjomaty i oferując uniwersalny język, stworzyła wrażenie, że to, co zastała, spojone z tym, co oferuje, to wymarzone matematyczne uniwersum. Akceptacja hilbertowskiej koherencyjnej teorii istnienia to radykalne odejście od dominującego wcześniej konstruktywizmu[56]
Konstruktywizm Brouwera nie może w pełni konkurować z teorią mnogości. H. Weyl: *Matematyka Brouwera zyskuje najwyższa intuicyjną przejrzystość. Początki analizy udaje mu się rozwijać w sposób naturalny, cały czas zachowując kontakt z intuicją (...) . Nie da się jednak zaprzeczyć, że w przejściu do wyższych i ogólniejszych teorii, niemożność zastosowania prostych praw logiki klasycznej prowadzi w końcu do nieznośnego niedołęstwa. A matematyk patrzy z bólem, jak większa część jego strzelistego gmachu, który, jak sądził, zbudowano z betonowych bloków, rozpływa się we mgle na jego oczach."*[57].
To prawda. Ale tylko dlatego, że chcemy, by brouwerowski konstruktywizm sprawdził się na boisku rywala. Odrzucając aktualną nieskończoność rezygnujemy z możliwości kreacji wielkości granicznych, a bez tego nie ma klasycznej analizy matematycznej. Może właściwym miejscem starcia obu wizji matematyki stanie się rzeczywistość świata ery postindustrialnej, w którym najważniejsza staje się jakość procesów pozyskiwania i przetwarzania informacji, efektywność obliczeń. To wyzwanie, na które musi odpowiedzieć matematyka XXI wieku. I nie można wykluczyć, że matematyka konstruktywna okaże się na tym polu bardziej skuteczna niż teoriomnogościowa[58].

Rygorystyczny formalizm matematyki Hilberta sprawia, że jest ona czytelna nie tylko dla nielicznych geniuszy, ale dla szerokiego kręgu robotników matematyki. To ma dobre i złe strony. W 1975 roku Bishop pisał: *„We współczesnej matematyce jest kryzys, a każdy, kto go nie zauważył, jest świadomie ślepy. Kryzys wynika z zaniedbania kwestii filozoficznych. Kursy podstaw matematyki prowadzone na uniwersytetach kładą nacisk na matematyczną analizę systemów formalnych, kosztem treści filozoficznej. Matematyczna profesja ma tendencje do utożsamiania filozofii z badaniem systemów formalnych, których zrozumienie wymaga znajomości „technicznych" twierdzeń. Nie chcą uczyć się kolejnej gałęzi matematyki i dlatego filozofię pozostawiają ekspertom. W konsekwencji* DOWODZIMY TWIERDZEŃ I NIE WIEMY, CO ONE ZNACZĄ".
Trudno się nie zgodzić. Jest pewne, że większość publikowanych prac matematycznych skazana jest na szybkie zapomnienie. Choć formalnie poprawne, nie wnoszą nic do dorobku matematyki. To cena demokratyzacji matematyki, która jest ubocznym skutkiem dominacji koncepcji Hilberta.

> Można mieć nadzieję, że matematyki Hilberta można się nauczyć. Matematyki Brouwera - nie. Można się nauczyć rzemiosła, ale nie twórczości.
> *„Matematyk intuicjonista sugeruje by traktować matematykę jako funkcję intelektu; wolną, żywotną aktywność umysłu. Posługuje się językiem, zarówno naturalnym, jak i sformalizowanym, tylko do przekazywania myśli (...), tj. do nakłaniania innych lub siebie samego do podążania za własnymi matematycznymi pomysłami. Taki akompaniament językowy nie jest reprezentacją matematyki; jeszcze mniej jest samą matematyką." - A.Heyting*[59].

Wystarczy. I tak napisałem za dużo. „O czym nie można mówić, trzeba milczeć"[60].

---

[56] *with the notable exception of geometry, where proof by contradiction was commonly accepted and widely employed"* [85]. Nie należy jednak arogancko twierdzić, że przed teorią mnogości ciemni ludzie nie znali matematyki. *W Borach Tucholskich funkcjonuje do dziś Wielki Kanał Brdy zbudowany w latach 1842-1848. Przepływ wody przez kanał wymusza różnica poziomów między jego końcami. Kanał ma ok. 20 km długości, a ta różnica to... 140 cm.* Siedem centymetrów na każdy kilometr kanału. Kto i jak to wyliczył? Bez teorii mnogości, continuum Dedekinda i analizy matematycznej Weierstrassa?

[57] http://plato.stanford.edu/

[58] Warto zajrzeć na stronę http://www.charlespetzold.com/blog/2008/05/Turing-and-Brouwer.html, gdzie można odnaleźć ciekawe dywagacje na temat wpływu Brouwera na Turinga.

[59] *The intuitionist foundations of mathematics, (Philosophy of mathematics, selected readings, ed. P.Benacerraf, H.Putnam).*

[60] L.Wittgenstein.

Rozdział 9

Arytmetyka

(...) in the study of the foundation of mathematics, arithmetic and set theory are two of the most important first-order theories; indeed, the usual foundational development of mathematical structures begins with the integers as fundamental and from these constructs mathematical constructions such as the rationals and the reals [11].

Popatrzmy, jakie cechy struktury liczb naturalnych Russell uznał za kluczowe:

- *„zero nie jest następnikiem żadnej liczby”,*
- *„każda liczba różna od zera jest następnikiem dokładnie jednej liczby”,*
- *„wszelka własność, która przynależy zeru oraz następnikowi każdej liczby, która posiada tę własność, przynależy wszystkim liczbom” [63].*

Dwa pierwsze stwierdzenia to opis struktury rekurencyjnej odpowiedzialnej za generowanie liczb naturalnych - *zero* to wielkość początkowa, a *następnik* to konstruktor[1].

Trzecie zdanie to *zasada indukcji*[2]. Jej sens można ująć tak: uznanie struktur rekurencyjnych oznacza zgodę na konstruowanie potencjalnie nieskończonych zbiorów. Kto tej maszynerii będzie używał, chciałby też dysponować narzędziem umożliwiającym orzekanie o wspólnych własnościach wszystkich obiektów, jakie w ten sposób zbuduje.

W języku struktur rekurencyjnych zasadę indukcji formułujemy tak:

„jeśli wielkości początkowe mają pewną własność W i zastosowanie konstruktora do obiektów posiadających własność W tworzy obiekt posiadający tę własność, to mamy prawo twierdzić, że każdy obiekt utworzony za pomocą tej struktury rekurencyjnej ma własność W.

Czym jest zasada indukcji? Odpowiedź nie jest jednoznaczna. Russell traktował indukcję jako niezbywalny składnik definicji liczb naturalnych. Podobnie Poincare. To AKSJOMAT arytmetyki. „Wewnątrz” teorii mnogości odpowiemy inaczej: to proste TWIERDZENIE, które mówi o szczególnej własności *najmniejszego zbioru induktywnego* $\mathbf{N}$: *jeżeli $A \subseteq \mathbf{N}$ jest podzbiorem takim, że:*

- $\emptyset \in A$,
- *dla dowolnego zbioru B: jeśli $B \in A$ to również $B \cup \{B\} \in A$,*

to $A = \mathbf{N}$.

> Dla zwolenników teorii mnogości ten wynik jest potwierdzeniem, że najmniejszy zbiór induktywny JEST zbiorem liczb naturalnych.
> Dla sceptyków ten wynik jest jedynie konieczny - bez niego niesposób twierdzić, że teoriomnogościowa definicja opisuje liczby naturalne, że zbiór $\mathbf{N}$ to *standardowy model* arytmetyki (str. 11).

[1] W [63] rozdział poświęcony liczbom naturalnym nosi tytuł „Ciąg liczb naturalnych” a nie „Zbiór liczb naturalnych”...

[2] Zasada indukcji to nie wynalazek XIX wieku. Ślady jej użycia odnaleziono już w pracach arabskiego matematyka Al-Karaji'ego (tego, od którego pochodzi nazwa „algebra”) żyjacego w X wieku.

W tym teoriomnogościowym twierdzeniu termin „własność” został zastąpiony przez „podzbiór”. To jest zgodne z ekstensjonalnym rozumieniem własności. Intensjonalne rozumienie tego terminu musi być poprzedzone zdefiniowaniem języka w którym chcemy opisywać własności liczb naturalnych i ich skończonych ciągów[3]. Tym językiem jest „od zawsze” język arytmetyki.

9.1 Język arytmetyki

Język arytmetyki to znane ze szkoły *wyrażenia* (czyli *termy*) i *formuły arytmetyczne*. Jednocześnie jest to najpowszechniej znany przykład *języka pierwszego rzędu* (str. 77).
Słownik tego języka to: stała „0”, trzy symbole operacyjne: „$+$, $\cdot$, *succ*” i symbol rtelacyjny „$\leqslant$”.

Rekurencyjny język *termów arytmetycznych* - WA - opisujemy tak:

$$\frac{}{x \in WA}\, x \in Zm, \qquad \frac{}{0 \in WA} \qquad \frac{t \in WA}{succ(t) \in WA} \qquad \frac{t_1, t_2 \in WA}{(t_1 + t_2) \in WA} \qquad \frac{t_1, t_2 \in WA}{(t_1 \cdot t_2) \in WA}$$

gdzie Zm to ustalony zbiór zmiennych przedmiotowych[4].
Będziemy pisać $\underline{n}$ zamiast $\underbrace{succ(succ(\ldots(succ(0)\ldots))}_{n}$. Np. $\underline{2}$ zamiast $succ(succ(0))$.

Najprostsze, („atomowe”) formuły arytmetyczne to równości i nierówności - napisy postaci $(t = p)$ lub $(t \leqslant p)$, gdzie t i p to termy.
Formuły arytmetyczne budujemy rekurencyjnie z formuł atomowych: jeżeli napisy ϕ i ψ są formułami, to formułami są też napisy:

$$(\phi \wedge \psi)\,,\ (\phi \vee \psi)\,,\ (\phi \to \psi)\,, \neg\phi\,,\ \forall_x \phi\,,\ \exists_x \phi$$

W formułach $\forall_x \phi$, $\exists_x \phi$ zmienna x jest związana.

Zdanie arytmetyczne to formuła, w której wszystkie zmienne są związane.
Formuły arytmetyczne opisują *własności arytmetyczne*: *„własność opisana przez formułę $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ przysługuje liczbom naturalnym $m_1, \ldots, m_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy formuła $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ jest spełniona dla wartościowania $[x_1 := m_1, \ldots x_n := m_n]$”*[5]
Np. formuła $even(x) \equiv \exists_y\, (x = y + y)$ opisuje „własność parzystości” - jest spełniona przy wartościowaniu $[x := m]$ wtedy, gdy liczba m jest parzysta. Jej zaprzeczenie - formuła $\neg(\exists_y\, x = y + y))$ - opisuje nieparzystość. A formuła $prime(x) \equiv (\underline{2} \leqslant x) \wedge (\forall_y\, (\exists_z\, x = y \cdot z) \to (y = \underline{1} \vee y = x))$ opisuje własność „jestem liczbą pierwszą”.

Arytmetyczny podzbiór wyznaczony przez formułę $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ to zbiór k-elementowych ciągów liczb naturalnych posiadających własność opisaną przez tę formułę - zbiór jej *desygnatów*[6].

‖ I to o własnościach arytmetycznych należy myśleć czytając russellowską definicję indukcji matematycznej.

Zdania arytmetyczne opisują cechy własności arytmetycznych. I tak zdanie $\forall_x (prime(x) \wedge even(x)) \to (x = \underline{2})$ orzeka, że jedyną parzystą liczbą pierwszą jest 2.

Zbiór $Th(\mathbf{N})$ zdań arytmetycznych prawdziwych w standardowym modelu liczb naturalnych to **arytmetyka zupełna**.

Teoria $Th(\mathbf{N})$ jest zupełna - w tym zbiorze zdań jest dokładnie jedno z każdej pary przeciwstawnych zdań arytmetycznych $(\phi, \neg\phi)$.

---

[3]Ta zmiana ilustruje różnicę między zwolennikami logicyzmu i teoriomnogościowcami (tak sądzę).
[4]Przyjmujemy, że będą to końcowe litery alfabetu $x, y, z, \ldots$ używane w razie potrzeby wraz z indeksami, np. $x_1, x_2, y_2, z_4 \ldots$.
[5]Tu i dalej napis $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ oznacza, że mamy do czynienia z formułą, której zmienne wolne są w zbiorze $\{x_1, \ldots, x_n\}$.
[6]Takich zbiorów jest nie więcej niż napisów-formuł, czyli „tylko” przeliczalnie wiele. Stąd wynika, że nie każdy podzbiór zbiorów postaci $\mathbf{N}^k$ jest arytmetyczny.

> To stwierdzenie wydaje się oczywiste, bo w **N** każde zdanie MUSI być prawdziwe albo fałszywe. Ale tylko wtedy, gdy akceptujemyuniwersalny stats prawa wyłączonego środka (str. 65).
> A dlaczego nie? Zamiast odpowiedzieć, zapytam: a dlaczego tak?[7]

9.2 Ważne pytanie

Czy potrafimy ORZEKAĆ, że własność opisana przez formułę arytmetyczną $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ przysługuje ciągowi liczb naturalnych $(m_1, \ldots, m_k)$?

CZY POTRAFIMY POZNAĆ CAŁĄ ARYTMETYKĘ ZUPEŁNĄ

- orzekać, czy dane zdanie arytmetyczne jest prawdziwe w modelu standardowym?
Użyłem terminu „orzekanie" bo jest on intuicyjnie jasny i jednocześnie - jak się zdaje - nie ma w żadnym matematycznym języku swego formalnego odpowiednika. A jeśli tak, to możemy podrążyć:

JAK NALEŻY ROZUMIEĆ SŁOWO „ORZEKAĆ"?

E. Zermelo za niezbywalny atrybut jakiejkolwiek własności uważał naszą zdolność do orzekania, czy przysługuje ona badanemu obiektowi matematycznemu[8]. Wierzono, że prawda (matematyczna) jest poznawalna, a kłopoty z orzekaniem o niej wynikają li tylko z naszej niedoskonałości i słabości metod badawczych. Tak było ponad sto lat temu. A dziś?

9.2.1 Orzekać = rozstrzygać?

W odróżnieniu od *orzekania*, termin *rozstrzyganie* ma ściśle określony sens matematyczny. To kluczowe pojęcie *teorii obliczalności.*

Problem spełniania dla formuły arytmetycznej $\phi(x)$ jest ROZSTRZYGALNY*(rekurencyjny), jeżeli istnieje procedura, która dla dowolnej liczby naturalnej n da - po skończonej liczbie kroków - odpowiedź „*TAK*", gdy formuła $\phi(x)$ jest spełniona przy wartościowaniu $[x := n]$ i „*NIE*" - w przeciwnym wypadku.*
Taką procedurę nazywamy rozstrzygajacą.
Mówimy wtedy, że formuła $\phi(x)$ (i własność przez nią opisana) jest rozstrzygalna[9].

> Co to jest „procedura"? Matematyczną definicję poznamy później. Teraz poprzestanę na nieco mniej precyzyjnym wyjaśnieniu.
> Procedura to proces realizowany w czasie dyskretnym, krok po kroku i odbywający się według ściśle określonych i posiadających skończony opis reguł. Taki proces może się zakończyć po wykonaniu skończonej liczby kroków, ale nie musi. Może trwać wiecznie[10].

Czy każda własność arytmetyczna jest rozstrzygalna?
Opanowanie procedur rozstrzygających o własnościach opisanych przez formuły atomowe - równości i nierówności - to zmartwienie uczniów najmłodszych klas: *„czy para liczb $(3, 5)$ ma własność opisaną przez formułę-nierówność $x \cdot y \leqslant succ(x + y)$?"* Oczywiście nie: wystarczy policzyć wartości obu termów dla wartościowania $[x := 3, y := 5]$ by otrzymać fałszywe zdanie $15 \leqslant 9$. Komplikowanie formuł przez użycie koniunkcji, alternatywy i negacji nic nie zmienia: *własności opisane przez formuły bezkwantyfikatorowe są rozstrzygalne.* To jest łatwy świat.

Co się dzieje, gdy pojawią się kwantyfikatory? Czy istnienie procedury rozstrzygającej o spełnianiu formuły $\psi(x, y)$ gwarantuje istnienie takiej procedury dla formuły $\phi(x) \equiv \exists_y \psi(x, y)$?
Najpierw odpowiemy brutalnie: nie gwarantuje. Potem trochę bardziej optymistycznie: gwarantuje istnienie nieco słabszej procedury, tzw. *procedury sprawdzającej.* Co to znaczy?

---

[7]Wrócimy do tego pytania, gdy będziemy lepiej przygotowani.
[8]Pisze o tym J. Pogonowski w artykule *„Projekt Logiki Infinitarnej Ernsta Zermela"* zamieszczonym w internecie.
[9]Ograniczamy się tu do formuł o jednej zmiennej wolnej. Ale to nie jest istotne ograniczenie.
[10]Realizacja procedury rozstrzygającej musi być zawsze skończona, bo ZAWSZE ma dać odpowiedź - „tak" lub „nie"!

Szukając odpowiedzi na pytanie: *„czy liczba naturalna n, która ma własność opisaną przez formułę $\exists_y \psi(x,y)$?”* możemy kolejno rozstrzygać: *„czy para $(n,0)$ ma własność opisaną przez formułę $\psi(x,y)$?”*, *„czy para $(n,1)$ ma tę własność?”* itd. Jeśli istnieje liczba m taka, że para (n,m) spełnia formułę $\psi(x,y)$, to ją kiedyś znajdziemy. I wtedy zakończymy pracę dając pozytywną odpowiedź na postawione pytanie.
Ale odpowiedź negatywną można dać jedynie po ZAKOŃCZENIU NIESKOŃCZONEJ weryfikacji wszystkich takich par. To oznacza, że negatywnej odpowiedzi nie mamy prawa udzielić. Nigdy.

Ta procedura już nie rozstrzyga - ona tylko *sprawdza:*

Spełnialność formuły $\phi(x)$ jest CZĘŚCIOWO ROZSTRZYGALNA *(częściowo rekurencyjna), gdy istnieje procedura, która dla dowolnej liczby naturalnej n da - po skończonej liczbie kroków - odpowiedź* „TAK”*, jeżeli jest ona spełniona przy wartościowaniu $[x := n]$ i nigdy nie skończy pracy („nie zatrzyma się”) w przeciwnym wypadku. Taką procedurę nazywam sprawdzającą.*
Mówimy wtedy, że formuła $\phi(x)$ (i własność przez nią opisana) jest sprawdzalna[11].

> Procedura rozstrzygająca informuje zarówno o sukcesie jak i o porażce. Procedura sprawdzająca - tylko o sukcesie.
> Rozróżnienie między rozstrzyganiem a sprawdzaniem napotyka na psychologiczny opór. Z prostego powodu - nie możemy odwołać się tu do doświadczeń z realnego świata obiektów skończonych.
> W tym świecie każda własność jest rozstrzygalna[12]. Własności, które nie są rozstrzygalne, a jedynie sprawdzalne ujawiają się, gdy akceptujemy istnienie zbiorów nieskończonych. W świecie matematyki.

> Wyróżnienie sprawdzalnych własności dziwi, bo przeczy prawu wyłączonego środka. A nas wychowano tak, że jesteśmy skłonni świat widzieć tak, jak porucznik Zubek ... [13].

Proszę na czas dalszej lektury tego rozdziału, uwierzyć:

ISTNIEJĄ SPRAWDZALNE WŁASNOŚCI ARYTMETYCZNE, KTÓRE NIE SĄ ROZSTRZYGALNE[14]

Na pozór nie zagraża to naszemu myśleniu o podstawach matematyki. Ale to tylko pozór.

Przypuśćmy, że formuła $\phi(x)$ jest sprawdzalna, ale nie rozstrzygalna. Wówczas dla jej zaprzeczenia - formuły $\neg\phi(x)$ - nie ma nawet procedury sprawdzającej!
Dlaczego? Niech P_1 będzie procedurą sprawdzającą dla formuły $\phi(x)$. Załóżmy chwilowo, że mamy też procedurę sprawdzającą P_2 dla formuły $\neg\phi(x)$. Wtedy wystarczy - dla danej liczby naturalnej n - uruchomić obie procedury jednocześnie. Uruchamiamy i ... spokojnie czekamy. Spokojnie, bo jedna z tych procedur musi się zatrzymać! Nie wiemy która, nie wiemy kiedy, ale jedna z nich musi się zatrzymać. Jeśli będzie to P_1, to formuła $\phi(x)$ jest spełniona dla wartościowania $[x := n]$. Jeśli P_2, to spełniona jest jej negacja, (a formuła $\phi(x)$ nie jest spełniona).
Mamy, czego NIE chcieliśmy - procedurę rozstrzygającą dla formuły $\phi(x)$. Wbrew założeniu. To dowodzi, że własność opisana przez formułę $\neg\phi(x)$ nie jest sprawdzalna!

> Są własności, które potrafimy opisać w języku arytmetyki, a nie potrafimy proceduralnie weryfikować. Nawet połowicznie, czyli tylko sprawdzać! Nie dlatego, że brak nam wiedzy czy umiejętności: takiej procedury sprawdzającej po prostu nie ma! Niewiarygodne, ale prawdziwe.
> Postulat Zermelo jest niemożliwy do spełnienia. Nawet w odniesieniu do własności arytmetycznych... .

Uniknijmy nieporozumień:

---

[11] Nasz przykład nie jest przypadkowy. Dowiedziono, że *„formuła $\phi(x)$ jest sprawdzalna dokładnie wtedy, gdy jest ona równoważna formule postaci $\exists_y \psi(x,y)$, gdzie $\psi(x,y)$ jest formułą rozstrzygalną.”*. Formuły nazwane tu sprawdzalnymi w literaturze przedmiotu funkcjonują jako formuły *pozytywnie obliczalne*.
Jeśli kwantyfikator egzystencjalny zastąpimy uniwersalnym, to ; stosując opisaną procedurę, na pytanie: *„czy liczba n ma własność opisaną przez formułę $\forall_y \psi(x,y)$?”* możemy dać jedynie odpowiedź negatywną (gdy znajdziemy liczbę m, taką, że para (n,m) nie ma własności opisanej przez $\psi(x,y)$). Formuła $\forall_y \psi(x,y)$ jest „negatywnie obliczalna” To trudno zaakceptować: wszak chcemy, by nasze poznanie miało charakter pozytywny... .

[12] Pomijam tu niefrasobliwie wątpliwości zgłaszane przez fizyków kwantowych.

[13] Porucznik Zubek - bohater „kultowego” serialu *„07 zgłoś się”* - miał zwyczaj twierdzić, że na każde pytanie można odpowiedzieć: „tak” lub „nie”. Do czasu, gdy ktoś go spytał: „Czy przestał Pan bić żonę?”

[14] Przykłady podamy poźniej, gdy będziemy w stanie takie stwierdzenie uzasadnić.

1. Procedura polegająca na kolejnym sprawdzaniu: *„czy* $0, 1, \ldots$ *ma własność opisaną przez formułę* $\exists_y \psi(x, y)$*?"* nie wyczerpuje możliwości sprawdzania spełnialności formuł tego kształtu. Ale nie zmienia to faktu, że są formuły, które nie są sprawdzalne.
2. Brak procedury rozstrzygającej (sprawdzającej) dla danej formuły nie oznacza, że jesteśmy bezradni, gdy dla KONKRETNEJ liczby chcemy sprawdzić, czy ona ma własność przez nią opisywaną. Potrafimy rozstrzygnąć, czy dla liczby 100 istnieje para większych od niej liczb pierwszych bliźniaczych. Podobnie uporamy się z tym problemem dla $n = 10000$. Ale prawdopodobnie użyjemy w obu przypadkach innych argumentów, innych środków - nie korzystamy z uniwersalnej procedury, skutecznej dla dowolnej liczby naturalnej. Dlatego do dziś nie potrafimy rozstrzygnąć, czy „DLA KAŻDEJ *liczby naturalnej istnieje para liczb pierwszych bliźniaczych od niej większych"*.
3. A może problem w tym, że zajęliśmy się spełnianiem formuł, a nie prawdziwością zdań? Niestety...:

TWIERDZENIE [**Prawda arytmetyczna jest niesprawdzalna**]
Nie istnieje procedura sprawdzająca, czy dane zdanie jest twierdzeniem arytmetyki zupełnej $Th(\mathbf{N})$ *- zbiór zdań arytmetycznych prawdziwych w* $\mathbf{N}$ *jest nierozstrzygalny.*

Gdyby taka procedura AR istniała, to można by utworzyć procedurę sprawdzającą spełnialność dowolnej formuły arytmetycznej $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ [15]: dla danych liczb naturalnych $n_1, \ldots, n_k$ wystarczy utworzyć zdanie $\phi(\underline{n_1}, ..., \underline{n_k})$ (zastępując wolne zmienne numerałami $\underline{n_i}$) i - korzystając z procedury AR - sprawdzić, czy jest prawdziwe. Prawdziwość tego zdania w standardowym modelu arytmetyki oznacza spełnianie formuły $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ przy wartościowaniu $[x_1 := n_1, \ldots, x_k := n_k]$!

Opisane postępowanie *„zbuduj zdanie* $\phi(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k})$ *i uruchom procedurę* AR*"* jest procedurą sprawdzającą dla dowolnej formuły ϕ... . Sprzeczność!

9.2.2 Orzekać = dowodzić?

Sprowadzenie procesu poznania do procedur rozstrzygających i sprawdzających może się wydać barbarzyńskim uproszczeniem. Oponenci powiedzą, że matematyczna weryfikacja prawdziwości zdań odbywa się przez *dowodzenie* a nie przez jakieś tam procedury. A dowodzenie to coś istotnie odmiennego od bezdusznych procedur.

Czy rzeczywiście? Zapomnijmy na chwilę o arytmetyce i wróćmy do dowodzenia w ramach dowolnego systemu formalnego (str. 24). Opisując taki system zakładaliśmy, że zbiory stwierdzeń, aksjomatów, reguł dowodzenia i w konsekwencji dowodów są rozstrzygalne: z każdym systemem dowodzenia związane są procedury, która zawsze zwracają jedną z dwóch odpowiedzi: „tak", gdy dany napis jest stwierdzeniem (aksjomatem, regułą) i „nie" - w przeciwnym przypadku. *„we recognise a proof when we see one"*[16].

Rozstrzygalność zbiorów stwierdzeń, aksjomatów i reguł dowodzenia rozważanego systemu gwarantuje, że rozstrzygalny jest też zbiór (poprawnie zbudowanych) dowodów (str. 25).
W konsekwencji otrzymujemy jeszcze ciekawsze, wręcz fundamentalne stwierdzenie:

Dla dowolnej teorii aksjomatycznej (z rozstrzygalnym zbiorem aksjomatów) zbiór zadań dowodliwych jest sprawdzalny.

co oznacza, że mamy procedurę odpowiadającą „tak", gdy dane zdanie ϕ ma dowód, a w przeciwnym przypadku pracującą w nieskończoność. Można ją sobie wyobrazić tak: ta procedura tworzy - w określonej kolejności - coraz to dłuższe dowody. Po wygenerowaniu każdego dowodu rozstrzyga, czy jego ostatnim stwierdzeniem jest ϕ. Jeśli tak, to procedura kończy pracę i zwraca odpowiedź „tak".

[15] A to, jak ustaliliśmy, jest niemożliwe.
[16] Ponieważ nasza definicja procedury jest nieformalna, to i wszystkie powyższe definicje są obarczone tym samym grzechem. Formalnie poprawne definicje tych pojęć pojawią się w rozdziale *„Obliczalność"*.

Jeśli nie, to procedura generuje kolejny dowód i rozstrzyga, czy ... . I tak dalej. Gdy zdanie ϕ nie ma dowodu, to takie poszukiwanie dowodu nigdy się nie skończy...[17].

> Sprawdzalność zbioru dowodliwych twierdzeń jest szczęśliwym kompromisem między „trywialną" rozstrzygalnością a bezradnością wobec dowolnych zbiorów. W 1927 roku von Neumann pisał: *„(...) wydaje się, że nie sposób znaleźć ogólnego kryterium rozstrzygnięcia, czy prawidłowo sformułowana formuła jest dowodliwa. (...) Nierozstrzygalność jest warunkiem sine qua non*[18] *współczesnej praktyki matematyki (...) W tym samym dniu, w którym ta nierozstrzygalność przestanie istnieć, matematyka, jaką teraz rozumiemy, przestanie istnieć; zostanie zastąpiona absolutnie mechanicznym zaleceniem (...), za pomocą którego każdy mógłby* ROZSTRZYGNĄĆ *o dowodliwości lub niedowodliwości danego zdania." [72]*
> W 1927 roku... Dziś już wiemy, że taki dzień nigdy nie nadejdzie...

Nie będziemy nigdy mieli procedury rozstrzygającej o dowodliwości zdań w dowolnej teorii aksjomatycznej. Ale mamy - możemy sobie wyobrazić - procedurę sprawdzającą. Dlaczego nie zaimplementujemy takiej procedury pozbawiając matematyków pracy (racji bytu)? Mówiąc najprościej - to „kwestia skali". Można wyobrazić sobie program komputerowy generujący coraz to dłuższe dowody, ale tylko niewyobrażalnie znikoma część z nich będzie dowodami interesujących twierdzeń. Tę sytuację można porównać z twórczością pisarzy i poetów. Można sobie wyobrazić komputer produkujący coraz to dłuższe słowa (czyli teksty), ale te spośród nich które będą dziełami na miarę „Hamleta", będą pojawiać się niewspółmiernie rzadziej niż genialni ludzie, zdolni tworzyć takie dzieła bez pomocy komputera.

9.3 Twierdzenie Gödla - po raz pierwszy

Hilbert chciał pełnej kontroli nad matematyką. Uważał, że każdą teorię T można *zaksjomatyzować*, czyli wskazać rozstrzygalny podzbiór $Ax_T \subset T$ taki, że $Con(T) = Con(Ax_T)$ - zbiory dowodliwych konsekwencji teorii T i zbioru Ax_T są takie same.

Czy arytmetyka zupełna $Th(\mathbf{N})$ ma takie przedstawienie? Czy potrafimy wskazać rozstrzygalny zbiór zdań $Ax_{\mathbf{N}}$ prawdziwych w $\mathbf{N}$ i taki, że $Con(Ax_{\mathbf{N}}) = Th(\mathbf{N})$?

Odpowiedź właściwie już znamy ale... jeszcze chwila.

Najbardziej znaną propozycją aksjomatyzacji teorii $Th(\mathbf{N})$ jest aksjomatyka sformułowana przez G. Peano[19].

AKSJOMATY:

1. $\forall_{x,y}\, (succ(x) = y) \;\to\; \neg(y = 0)$
2. $\forall_{x,y}\, (succ(x) = succ(y)) \;\to\; (x = y)$
3. *(schemat indukcji); dla dowolnej formuły arytmetycznej $\phi(x)$ aksjomatem jest zdanie:*
$$(\phi(0) \wedge (\forall_x\, \phi(x) \to \phi(succ(x)) \to \forall_x\, \phi(x)$$
4. $\forall_x\;\; x + 0 = x,$
5. $\forall_{x,y}\;\; x + succ(y) = succ(x + y)$
6. $\forall_x\;\; x \cdot 0 = 0,$
7. $\forall_{x,y}\;\; x \cdot succ(y) = x \cdot y + x$
8. $\forall_{x,y}\, x \leqslant y \leftrightarrow \exists_z\, x + z = y$

[17] Sporo tu uproszczeń, ale nie gubimy istoty.
Na marginesie: czy można złagodzić wymagania i żądać jedynie, by zbiór aksjomatów teorii był tylko sprawdzalny? To problem pozorny: W. Craig udowodnił, że każdy sprawdzalny zbiór aksjomatów teorii pierwszego rzędu można zastąpić zbiorem rozstrzygalnym tak, że zbiór dowodliwych zdań pozostanie niezmieniony.

[18] *condicio sine qua non = warunek „bez którego nie".*

[19] G. Peano, matematyk włoski (1858-1932) zaproponował ten aksjomatyczny opis arytmetyki w 1889 roku. Uniknijmy nieporozumień: mówimy tu o pierwszorzędowej teorii zwanej *arytmetyką Peano*. Oryginalna *aksjomatyka Peano* nie jest teorią pierwszego rzędu, bo „schemat indukcji" zastępuje (teoriomnogościową) *zasadą indukcji* .

Ten zbiór zdań-aksjomatów oznaczamy symbolem PA. Piszemy $PA \vdash \phi$, jeżeli formuła ϕ posiada dowód w tym systemie, $\phi \in Con(PA)$.

Wystarczy conieco wiedzieć o matematyce by się przekonać, że w standardowym modelu arytmetyki wszystkie aksjomaty Peano są prawdziwe, a każde zdanie wywodliwe z tych aksjomatów należy do arytmetyki zupełnej:

$$PA \vdash \phi \qquad \Longrightarrow \qquad \phi \in Th(\mathbf{N})$$

Czy odwrotna implikacja jest też prawdziwa, tzn. czy każde zdanie arytmetyczne prawdziwe w modelu standardowym jest dowodliwą konsekwencją aksjomatów Peano?

$$\phi \in Th(\mathbf{N}) \qquad \stackrel{?}{\Longrightarrow} \qquad PA \vdash \phi$$

To nie jest prawda. A to dlatego, że w dyskusji o interpretacji terminu „orzekanie” przedstawiliśmy dwa twierdzenia:

I. NIE ISTNIEJE *procedura sprawdzająca przynależność zdania arytmetycznego do zbioru* $Th(\mathbf{N})$,
II. ISTNIEJE *procedura sprawdzająca, czy zdanie posiada dowód w systemie* PA.

Wniosek może być tylko jeden: $Th(\mathbf{N}) \neq Con(PA)$!

ISTNIEJĄ ZDANIA PRAWDZIWE W MODELU STANDARDOWYM $\mathbf{N}$, KTÓRE NIE MAJĄ DOWODU W SYSTEMIE AKSJOMATYCZNYM PA.

To może trzeba spróbować wskazać inny, ..lepszy” niż PA system aksjomatów dla teorii $Th(\mathbf{N})$? Nic z tego: jakkolwiek nie wybierzemy rozstrzygalny zbiór aksjomatów Ax, to zbiór jego konsekwencji pozostanie sprawdzalny. To oznacza, że równość $Con(Ax) = Th(\mathbf{N})$ jest niemożliwa (bo zbiór $Th(\mathbf{N})$ jest niesprawdzalny)!
I to jest głęboki sens *twierdzenia Gödla*:

ARYTMETYKA ZUPEŁNA NIE JEST AKSJOMATYZOWALNA

Z twierdzenia Gödla wynika też , że:

arytmetyka Peano nie identyfikuje jednoznacznie standardowego modelu liczb naturalnych.

co oznacza, że ta teoria ma model $\mathbf{N}_1$ taki, że $Th(\mathbf{N}) \neq Th(\mathbf{N}_1)$: istnieje zdanie arytmetyczne prawdziwe w modelu standardowym, które nie jest prawdziwe w $\mathbf{N}_1$.
Wybierzmy dowolnie zdanie ϕ prawdziwe w modelu standardowym, które nie posiada dowodu w PA. Wówczas jego zaprzeczenie- zdanie $\neg\phi$ - też nie ma takiego dowodu[20]. Teoria $T \cup \{\neg\phi\}$ jest więc niesprzeczna co oznacza, że posiada model[21]. Ten nowy model jest oczywiście modelem arytmetyki Peano. Ale nie jest to model standardowy, bo jest w nim prawdziwe zdanie $\neg\phi$!
Arytmetyka Peano nie jest „idealnym” opisem standardowego modelu liczb naturalnych bo nie identyfikuje tego obiektu jednoznacznie. Nie można też tej teorii „poprawić” - żadna teoria pierwszego rzędu mocniejsza od arytmetyki Peano nie identyfikuje jednoznacznie standardowego modelu liczb naturalnych.

> Marzenie Hilberta o sprawowaniu pełnej kontroli nad matematyczną prawdą legło w gruzach...
> Oczekiwanie, że każdy obiekt matematyczny ma swój unikatowy opis w języku pierwszego rzędu, który będziemy kontrolować dzięki równości „prawdziwość = dowodliwość”, musi pozostać NIESPEŁNIONE.

Dodatek: niestandardowy model arytmetyki

Definiowany rekurencyjnie model zamierzony arytmetyki Peano (str. 85) to nasza preintuicja. Na skutek jednostronnej edukacji matematycznej utożsamiamy go z teoriomnogościowym modelem standardowym. Dlatego trudno wyobrazić sobie inne, niestandardowe modele PA. Ale spróbujmy.

Dołóżmy do języka arytmetyki nową stałą „c”. i rozszerzmy też aksjomatykę Peano dodając do niej zbiór zdań $S = \{(succ^n(0) \leqslant c) \colon n \in N\}$. Standardowy model PA nie jest modelem tak

[20] Zdania dowodliwe w PA są prawdziwe w $\mathbf{N}$.
[21] Wynika to z twierdzenia Gödla-Henkina które mówi, że każda niesprzeczna teoria posiada model. O tym twierdzeniu powiemy więcej w jednym z następnych rozdziałów (str.172.

rozszerzonej teorii. To jasne, bo w **N** nie ma liczby większej od każdej liczby postaci $succ^n(0)$.
Łatwo wskazać model teorii $PA \cup S_0$ dla dowolnego *skończonego* podzbioru $S_0 \subset S$ - wystarczy w **N** interpretować stałą c jako odpowiednio dużą liczbę. Skoro tak, to każda skończona podteoria teorii $PA \cup S$ jest niesprzeczna. Zatem i cała teoria jest niesprzeczna[22]. To oznacza, że - na mocy wykorzystanego już raz twierdzenia Gödla-Henkina - ta teoria ma teoriomnogościowy model. Oznaczmy go przez $\mathbf{N}_1$. Ten model MUSI być różny od modelu standardowego bo zawiera element $\mathbf{c}_1$ większy od wszystkich liczb postaci $succ^n(0)$.
Idźmy dalej: $\mathbf{c}_1$ musi mieć następnik - $\mathbf{c}_1 + 1$ - i poprzednik (bo nie jest zerem) $\mathbf{c}_1 - 1$. Mówiąc obrazowo, istnieje obustronnie nieskończony łańcuch - „świta" liczby $\mathbf{c_1}$:

$$\ldots \mathbf{c}_1 - n, \ldots, \mathbf{c}_1 - 2, \mathbf{c}_1 - 1, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_1 + 1, \mathbf{c}_1 + 2, \ldots, \mathbf{c}_1 + n, \ldots$$

a wszystkie liczby z tej świty są większe od standardowych. Muszą też istnieć iloczyny: $2\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_1$, $3\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_1$ itd. Każdy element postaci $n\mathbf{c}_1$ otoczony jest własną świtą.
To nie wszystko: ponieważ zdanie *„każda liczba naturalna jest parzysta lub nieparzysta"* jest zdaniem arytmetycznym dowodliwym w PA, to w $\mathbf{N}_1$ musi istnieć liczba niestandardowa $\mathbf{c}_2 < \mathbf{c_1}$ taka, że $\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_1$ gdy $\mathbf{c}_1$ jest parzysta lub ... (dokończ). $\mathbf{c}_2$ też ma swoją świtę Oczywiście $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$ jest gdzieś pomiędzy $\mathbf{c}_1$ i $2 \cdot \mathbf{c}_1$. I tak dalej...

Zakończmy ten wywód baaardzo naukowo: model $\mathbf{N}_1$ ma typ porządkowy $\omega + (\omega^* + \omega)\eta$ ...[23]

> Ten powszechnie przywoływany przykład niestandarowego, teoriomnogościowego medelu arytmetyki Peano ma pewną wadę, której jakoś nikt nie chce zauważyć. Jaka to wada, dowiesz się w rozdziale „Pewna szczególna teoria - ZFC"

Twierdzenie Parisa-Harringtona

Czy znamy zdania arytmetyczne prawdziwe w **N** a niedowodliwe w PA? Pierwszy przykład wskazał Gödel i o nim będziemy wkrótce mówili. Ale jego złożony charakter[24] sprawił, że nie wszyscy byli nim zachwyceni. Oczekiwano bardziej „konkretnego" przykładu.
Dostarcza go (zmodyfikowane) *twierdzenia Ramsey'a*.

W wersji „fabularnej" to twierdzenie mówi, że: *„na to, by wśród uczestników przyjęcia można było z absolutną pewnością wskazać m-osobową grupę taką, że wszyscy jej członkowie się wzajemnie znają lub nikt nie zna nikogo z pozostałych członków grupy, nie trzeba specjalnie dobierać gości: wystarczy zaprosić odpowiednio dużą grupę osób"*.

A jego modyfikacja (wzmocnienie) to dodanie warunku: *„tę grupę można wybrać tak, że conajmniej jeden z jej członków pojawi się na przyjęciu wśród pierwszych m gości"*.

Powiedzmy to samo w języku grafów. *Dwukolorowy graf pełny* o zbiorze wierzchołków V to graf, w którym każda para wierzchołków jest połączona pojedynczą niezorientowaną krawędzią - powiedzmy, białą lub czerwoną. Pełny podgraf takiego grafu uzyskamy wskazując dowolny podzbiór $V_0 \subseteq V$ wraz ze wszystkimi krawędziami łączącymi wierzchołki tego podzbioru. Podgraf jest *jednokolorowy (monochromatyczny)*, gdy wszystkie jego krawędzie mają ten sam kolor.

„Grafowa" wersja twierdzenie Ramsey'a wygląda tak: *dla dowolnej liczby naturalnej m można wskazać taką liczbę $R(m)$ że* KAŻDY *dwukolorowy graf pełny o $R(m)$ wierzchołkach zawiera pełny jednokolorowy podgraf o m wierzchołkach.*

Zmodyfikowane twierdzenie Ramsey'a dodaje, że: *numer najmniejszego wierzchołka tego jednokolorowy podgrafu jest nie większy niż m - niezależnie od (wcześniejszej) numeracji wierzchołków.*

[22] W dowodzie dowolnego twierdzenia korzystamy tylko ze skończonego podzbioru $PA \cup S$. Stąd jeśli pewne zdanie fałszywe ma tu dowód (czyli teoria $PA \cup S$ jest sprzeczna), to skończona podteoria złożona z aksjomatów wykorzystanych w takim dowodzie też jest sprzeczna. Ale wszystkie skończone podteorie $PA \cup S$ są niesprzeczne.

[23] Zaintrygowanym i nieco skołowanym podpowiem: uporządkowanie niestandardowych liczby naturalnych w tym modelu jest takie samo, jak uporządkowanie iloczynu kartezjańskiego $Q \times Z$ przez relację $\preceq$ zdefiniowaną tak: $(q_1, z_1) \preceq (q_2, z_2)$ gdy $q_1 < q_2$ lub $q_1 = q_2$ oraz $z_1 \leqslant z_2$. W szczególności: ten zbiór nie ma elementu najmniejszego - nie ma najmniejszej niestandardowej liczby naturalnej.

[24] Oczywiście charakter zdania a nie Gödla.

Twierdzenie Parisa-Harringtona mówi, że:

ZMODYFIKOWANE TWIERDZENIA RAMSEY'A JEST PRAWDZIWE, ALE NIE DA SIĘ GO DOWIEŚĆ W RAMACH ARYTMETYKI PEANO

To zdanie można znaleźć w popularnych opracowaniach opowiadających o wyniku Gödla. Czytelnik, który dotarł do tego miejsca artykułu jest już wystarczajaco skołowany i zmęczony by przyjąć to zdanie „do wiadomości" uznając, że są w matematyce rzeczy niedostępne zwykłym śmiertelnikom[25]. To błąd. Powinien zadać przynajmniej dwa pytania:

- *jeśli tego twierdzenia nie umiemy dowieść, to skąd wiemy, że jest prawdziwe?*
- *co wspólnego ma twierdzenie o grafach z arytmetyką?*

Spróbujmy odpowiedzieć. Zmodyfikowane twierdzenie Ramsey'a sformułowane tu w języku grafów można też zapisać jako zdanie sformułowane w języku teorii mnogości. Uznajemy je za prawdziwe, bo jest teoriomnogościowym twierdzeniem - dowodliwą konsekwencją aksjomatów ZFC. To jest odpowiedź na pierwsze pytanie.

Odpowiedź na drugie wymaga przywołania twierdzenia, które omówimy później (str.184). Otóż istnieje pewna szczególna „translacja" języka teorii mnogości na język arytmetyki. To pozwala wiernie przetłumaczyć teoriomnogościowe zdanie - zapis zmodyfikowanego twierdzenia Ramsey'a - na zdanie arytmetyczne.

I to zdanie-tłumaczenie nie ma dowodu w arytmetyce Peano. To wszystko[26].

Teoriomnogościowy dowód twierdzenia Parisa-Harringtona jest zbyt złożony byśmy mogli o nim rozmawiać w sposób tu przyjęty. W zamian opowiemy o dowodzie twierdzenia Ramsey'a.

Podzielimy go na dwie części: teraz przedstawimy dowód *nieskończonego twierdzenia Ramsey'a:*

„każdy pełny dwukolorowy graf K_∞ którego wierzchołkami są wszystkie liczby naturalne zawiera jednokolorowy podgraf o nieskończonej liczbie wierzchołków".

Dowód „wersji skończonej" tego twierdzenia przedstawimy gdy będziemy lepiej przygotowani[27].

Zaczynamy: najpierw zauważmy, że dla dowolnej liczby m conajmniej jeden ze zbiorów

$$B_m = \{l > m : \text{ krawędź łącząca } m \text{ i } l \text{ w } K_\infty \text{ jest biała}\}$$

$$C_m = \{l > m : \text{ krawędź łącząca } m \text{ i } l \text{ w } K_\infty \text{ jest czerwona}\}$$

jest nieskończony.

Zdefiniujemy rekurencyjnie ciąg liczb naturalnych $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ wraz z ciągiem nieskończonych zbiorów $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ tak: przyjmujemy

$a_0 = 0$ i

$$A_0 = \begin{cases} B_0 & B_0 \textit{ jest nieskończony} \\ C_0 & \textit{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Gdy mamy już określoną parę (a_n, A_n) to przyjmujemy:

- $a_{n+1} = min\, A_n$

$$A_{n+1} = \begin{cases} B_{a_{n+1}} \cap A_n & B_{a_{n+1}} \cap A_n \textit{ jest nieskończony} \\ C_{a_{n+1}} \cap A_n & \textit{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Elementy ciągu $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ można podzielić na dwa podzbiory - B i C:

$$a_n \in C \;\; gdy \;\; A_{a_n} = C_{a_n} \quad i \quad a_n \in B \;\; gdy \;\; A_{a_n} = B_{a_n}.$$

Ten spośród zbiorów B, C który jest nieskończony, jest poszukiwanym zbiorem wierzchołków jednokolorowego podgrafu K_∞ . To kończy dowód nieskończonego twierdzenia Ramsey'a.

---

[25]To, niestety, cecha wielu artykułów popularyzujących matematykę. Nie tyle ją objaśniają, co budują jej mit.

[26]Zainteresowanych odsyłam do pracy J.Parisa i L.Harringtona *A mathematical incompleteness in Peano Arithmetics* dostępnej w internecie. Mniej zaawansowanym nie polecam.

[27]W rozdziale *„Pewna szczególna teoria - ZFC"*.

Rozdział 10

Obliczalność

Without a deeper understanding of the nature of calculation and underlying processes, neither the scope of undecidability and incompleteness results nor the significance of computational models in cognitive science can be explored in their proper generality. [72]
Calculemus! (Obliczmy to!) - G. Leibniz.

Dotąd, mówiąc o procedurach rozstrzygających i sprawdzających, polegaliśmy na naszej intuicji. Pogłębiona dyskusja o wynikach Gödla wymaga większej precyzji. Stąd pomysł, by najpierw przybliżyć pojęcie *obliczalności*, gdyż rozstrzygalność i częściowa rozstrzygalność to pojęcia wtórne w stosunku do obliczalności.

Są (conajmniej) trzy sposoby definiowania obliczalności. Jeśli uważamy teorię obliczalności za integralną część matematyki teoriomnogościowej, to zazwyczaj zaczynamy od przedstawienia definicji obliczalności w sensie Kleene'ego. Ponieważ się z tym nie zgadzam, zacznę inaczej: od definicji obliczalności Alana Turinga[1].

10.1 Maszyna Turinga

These machines are humans who calculate. - L. Wittgenstein[2].
The Turing machine is the result of distilling meanings and interpretations down to the essence of what effective computation is.

> Jak opisać interakcję między aktywnym *sprawcą* a biernym *otoczeniem*? Sprawca obserwuje pewien fragment otoczenia i na podstawie uzyskanej informacji może zmienić to miejsce i swój stan a potem przenieść uwagę na inny punkt otoczenia. I tak dalej... . Czyż nie tak działamy?

Maszyna Turinga to genialny w swej prostocie opis takiej interakcji. Turing założył - trochę w opozycji do matematycznego mainstreamu - że interakcja to proces dyskretny (a nie ciągły), deterministyczny i odbywa się wśród „bytów skończonych".
Język opisu wybrany przez Turinga jest skrajnie ockhamowski. W jego modelu otoczenie reprezentowane jest przez słowo nad *binarnym alfabetem* $\{0, 1\}$ zapisane na potencjalnie nieskończonej taśmie podzielonej na odrębne pola, zgodnie z zasadą „w jednym polu jeden znak". Sprawca - *maszyna* - ma w każdej chwili określony *stan* wybrany spośród skończonego i ustalonego *a priori* zbioru. Maszyna obserwuje w każdej chwili pracy jedno pole taśmy. Pojedynczy *krok pracy* maszyny to - określona *a priori* - deterministyczna reakcja na to, jaki znak jest w obserwowanym polu i w jakim jest ona stanie. Skutkiem pojedynczego kroku jest zmiana stanu maszyny, zmiana zapisu w obserwowanym polu i ruch - o jedno pole w prawo lub w lewo w stosunku do dotąd obserwowanego[3].

Zachowanie maszyny Turinga opisuje skończony *zbiór instrukcji* - zapisów postaci:

[1]Alan Mathison Turing (1912 - 1954) – angielski matematyk, jeden z twórców podstaw informatyki.
[2]*Philosophy and Psychology.*
[3]Może się zdarzyć, że maszyna nie zmieni zapisu i tylko przesunie się w prawo lub w lewo. Może też się nie ruszyć.

$$(s_i, \alpha) \to (s_j, \beta, move)$$

gdzie s_i, s_j to *stany* - elementy skończonego i ustalonego dla danej maszyny zbioru $St = \{s_1, \ldots, s_n\}$, $\alpha, \beta \in \{0, 1, \perp\}$[4] a $move \in \{Left,\ Right,\ NoMove\}$.
Instrukcję czytamy tak: *„jeśli maszyna w stanie s_i obserwuje pole w którym jest α, to przejdzie w stan s_j, zapisze β, i zacznie obserwować pole znajdujące się po lewej lub prawej stronie dotąd obserwowanego - zależnie od wartości parametru move”*[5].
Założenie, że działanie maszyny jest deterministyczne oznacza, że każda para $(s, \alpha) \in St \times \{0, 1, \perp\}$ pojawia się po lewej stronie w co najwyżej jednej instrukcji.

Maszyn Turinga jest wiele: tyle, ile jest możliwych skończonych zbiorów instrukcji. Ten zbiór to *program* sterujący pracą maszyny.

Maszyna Turinga T rozpoczyna pracę obserwując pierwszą literę pojedynczego słowa binarnego v zapisanego na taśmie. Jej praca to sekwencyjne wykonywanie instrukcji. Jeśli w pewnym momencie maszyna znajdzie się w stanie s i obserwować będzie pole ze znakiem α a w zbiorze jej instrukcji nie ma takowej o poprzedniku (s, α), to praca się kończy - maszyna T *zaakceptowała* słowo v. Słowo w zapisane w tym momencie na taśmie to *rezultat działania (lub: wynik obliczenia) maszyny T na słowie v* , co symbolizuje równość $T(v) = w$.

Oznaczmy przez $L(T)$ język złożony ze słów, które akceptuje maszyna T - *język akceptowany przez T*. Jeśli słowo $v \notin L(T)$, to proces poszukiwania rezultatu obliczenia jest nieskończony - maszyna T nie zatrzymuje się, pracuje wiecznie[6].

> W opisie maszyny Turinga nie padło słowo „funkcja”. Pojawi się teraz, ale jako pojęcie pomocnicze: *„funkcja częściowa*[7] *realizowana przez maszynę T to funkcja f_T działającą na słowach binarnych taka, że dla danego słowa v:*
>
> $$f_T(v) = \begin{cases} T(v) & \text{gdy } v \in L(T) \text{(maszyna } T \text{ się zatrzymuje).} \\ \text{jest nieokreślona} & \text{gdy } v \notin L(T) - \text{(maszyna } T \text{ pracuje wiecznie,} \\ & \text{„nie zatrzymuje się”).} \end{cases}$$
>
> W definicji Turinga istotą jest proces obliczenia. Funkcja f_T to tylko opis rezultatu tego procesu.

Możemy teraz sformułować podstawową definicję:

Funkcja częściowa $f \colon \{0, 1\}^* \to \{0, 1\}^*$ jest OBLICZALNA *jeżeli potrafimy skonstruować maszynę Turinga która ją realizuje.”*

Proponowany przez Turinga opis relacji między „sprawcą” a „otoczeniem” jest ascetyczny do bólu. Jak bardzo, przekonamy się próbując zbudować maszynę realizującą prostą akcję np. podwajanie słowa zapisanego na taśmie. Nieco poluzujmy. Przede wszystkim alfabet binarny „nad którym” pracuje taka maszyna, można zastąpić dowolnym skończonym alfabetem. To oznacza, że pojęcie obliczalności można odnieść do funkcji typu $f \colon A^* \to A^*$, gdzie A to dowolny skończony alfabet. Ostatecznie powiemy, że funkcja częściowa $\phi \colon A^* \to B^*$ jest obliczalna, jeśli istnieje maszyna Turinga T działająca „nad alfabetem $A \cup B$” taka, że $\phi = f_T$.

Maszyny Turinga „działają na tekstach i zwracają teksty”[8]. Opisane uogólnienia nie zmieniają istoty obliczalności: działanie maszyny T korzystającej ze skończonego alfabetu A można zawsze

[4] Znak „$\perp$” służy do oznaczenia tych pól taśmy, w których nic nie zapisano - nie ma w nich ani 0 ani 1.

[5] Gdy wartość tego parametru to $NoMove$, to nadal będzie obserwować to samo pole.

[6] Przykład. Jednostanowa maszyna z trzema instrukcjami $(q, \alpha) \to (q, \alpha, NoMove)$ gdzie $\alpha \in \{0, 1, \perp\}$ nigdy się nie zatrzyma - nie akceptuje żadnego słowa. A jednostanowa maszyna z jedną instrukcją $(q, 0) \to (q, 0, NoMove)$ zaakceptuje słowo „11” a nie zatrzyma się na słowie „00”.

[7] Funkcja częściowa ze zbioru A do zbioru B nie dla każdego argumentu - elementu zbioru A - zwraca wartość (element zbioru B). Odejmowanie liczb naturalnych jest funkcją częściową (z $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ do $\mathbf{N}$).

[8] Pisząc ten tekst mam na ekranie komputera okno edycyjne i podgląd wydruku. Stukając w odpowiedni klawisz uruchamiam maszynę Turinga (program), który zamienia tekst z okna edycyjnego na tekst-wydruk. By utożsamić pojęcia „słowo” i „tekst” wystarczy do alfabetu języka polskiego - dołożyć wszelkie znaki interpunkcyjne i spację . Wówczas dowolny tekst - np. „Pan Tadeusz” - stanie się pojedynczym słowem nad tak rozszerzonym alfabetem.

zrealizować za pomocą innej maszyny T_2 operującej nad alfabetem binarnym: istnieją funkcje obliczalne $kod_A \colon A^* \to \{0,1\}^*$ i $dkod_A \colon \{0,1\}^* \to A^*$ takie, że

$$f_T = dekod_A \cdot f_{T_2} \cdot kod_T$$

- *„aby obliczyć wartość f_T na słowie v najpierw je kodujemy, potem uruchamiamy maszynę T_2 na tym kodzie, a na koniec dekodujemy słowo binarne $T_2(kod(v))$[9].*

Teraz jesteśmy gotowi na przyjęcie formalnych definicji języka rozstrzygalnego i rozpoznawalnego: *język $L \subseteq A^*$ jest rozstrzygalny (rekurencyjny), jeżeli funkcja $\lambda_L \colon \ \to \{0,1\}^*$ taka, że dla dowolnego słowa $v \in A^*$:*

$$\lambda_L(v) = \begin{cases} 1 & gdy\ v \in L, \\ 0 & w\ przeciwnym\ wypadku \end{cases}$$

jest obliczalna.
Język $L \subseteq A^*$ jest rozpoznawalny (sprawdzalny, rekurencyjnie przeliczalny) jeżeli funkcja częściowa $\lambda^c_L : A^* \to \{0,1\}^*$ taka, że dla dowolnego $v \in A^*$:

$$\lambda^c_A(v) = \begin{cases} 1 & gdy\ v \in L, \\ nieokreślona & gdy\ v \notin L \end{cases}$$

jest obliczalna[10].

Można komplikować pojęcie maszyny Turinga, przyjmując, że ma ona nie jedną ale dwie taśmy - „wewnętrzną" i „zewnętrzną" - i w każdej chwili obserwuje po jednym polu na każdej z nich. Reagując na zawartość obu pól taka maszyna zmienia stan, zmienia zapisy w obu polach i wykonuje *niezależne* ruchy na obu taśmach - zgodnie z określonymi *a priori* instrukcjami. Taśma zewnętrzna - tak jak w maszynie jednotaśmowej - reprezentuje otoczenie: z niej odczytujemy dane i na niej umieszczamy wynik obliczenia. Taśmę wewnętrzną można traktować jako - potencjalnie nieskończoną! - pamięć, służącą do przechowywania informacji przydatnych w procesie obliczenia[11]. Wydaje się, że dwutaśmowe maszyny mogą więcej. Ale nie: każdą funkcję, która można zrealizować za pomocą maszyny dwutaśmowej, można zrealizować korzystając z maszyny jednotaśmowej [12] .

> Te uwagi są po to tylko, by łatwiej było nam przyjąć do wiadomości, że maszyna Turinga (nad alfabetem binarnym) to genialna w swej prostocie propozycja formalizacji pojęcia procedury.
> Model Turinga NIE JEST modelem technicznym „urządzenia służącego do obliczeń"[13]. To model ideowy, koncentrujący naszą uwagę na tym, co jest istotą procesu obliczenia.

Odtąd będziemy wymiennie posługiwali się pojęciami „procedura", „program" i „maszyna Turinga".

Nierozstrzygalność problemu stopu

Wiemy już dość, by zająć się fascynującym fenomenem - *„nierozstrzygalnością problemu stopu"*. Każdy z nas słyszał o „zapętleniu programu" - nasz komputer zwariował i bez końca realizuje pewien program. Czyż nie byłoby pięknie (wygodnie), gdyby komputer był wyposażony fabrycznie

[9]Procedurę kodowania można opisać tak: ustalmy najpierw binarne kodowanie liter alfabetu A dbając o to, by dla każdej pary różnych liter $a, b \in A$ słowo $kod_A(a)$ nie było podsłowem początkowym słowa $kod_A(b)$ (i vice versa). To jest możliwe. Wówczas dla dowolnego słowa $v = a_1 \dots a_n \in A^*$, $kod_A(v) = kod_A(a_1) \dots kod_A(a_n)$.

[10]Kłopot z wyborem adekwatnej i wywołującej oczekiwane skojarzenia nazwy dla takich zbiorów bierze się stąd, że jest to sytuacja obca naszemu doświadczeniu ukształowanemu w świecie obiektów skończonych (czyli rozstrzygalnych). Na marginesie: konia z rzędem temu kto wyjaśni, dlaczego angielski termin *„recursively enumerable"* przetłumaczylismy jako *rekurencyjnie przeliczalny* a nie *rekurencyjnie* POLICZALNY... .

[11]Funkcję podwajania słowa można za pomocą dwutaśmowej maszyny zrealizować tak: *1. przepisz słowo v z taśmy zewnętrznej na wewnętrzną. 2. Przejdź na koniec słowa v na taśmie zewnętrzenej. 3. Przepisz kopię słowa v z taśmy wewnętrznej na zewnętrzną.* Proste. A teraz spróbuj zrealizować tę procedurę korzystając z maszyny jednotaśmowej.

[12]To nie jest aż tak strasznie dziwne: informacje (słowa) zapisane na dwóch taśmach można łatwo zapisać na jednej taśmie rezerwując np. dla pierwszego słowa miejsca parzyste, a dla drugiego - nieparzyste.

[13]Bardziej na takie miano zasługuje *model von Neumanna* opisujący architekturę komputera.

w program PS, który - uruchomiony przed właściwym programem T - odpowiadałby na pytanie, czy po uruchomieniu T na wskazanym zestawie danych v, ten program się zatrzyma, czy też się zapętli? Dlaczego żaden geniusz z Doliny Krzemowej o tym nie pomyślał?

Do formalnego opisu problemu stopu wykorzystamy pojęcie *kodu maszyny*. Kod maszyny T to słowo binarne $kod(T)$, które otrzymamy w wyniku translacji tekstu - opisu zbioru instrukcji T - na słowo binarne[14].

Nasz problem sformułujemy teraz tak:

- *„czy istnieje maszyna Turinga PS taka, że dla dowolnej maszyny T i słowa binarnego v:*

$PS(< kod(T), v >) = 1$ gdy maszyna T zatrzyma się rozpoczynając pracę ze słowem v zapisanym na taśmie i $PS(< kod(T), v >) = 0$ - w przeciwnym przypadku?"[15]

Odpowiedź brzmi „NIE". To jest sens słynnego *„twierdzenia o nierozstrzygalności problemu stopu"*.

> Niech nas nie zwiedzie prostota sformułowania problemu. Jego rozwiązanie przez Turinga to jedno najpiękniejszych i najważniejszych osiągnieć ludzkiego intelektu w XX wieku (a może nie tylko...). Wyznacza, podobnie jak wyniki Gödla, granice naszego panowania nad tym, co tworzymy.
> Możemy projektować procesy obliczeniowe i realizować je za pomocą komputerów. Ale nie mamy żadnej szansy na pełną nad nimi kontrolę. Nie możemy rozstrzygać o wszystkim.

Dowód tego twierdzenia jest piękny, bo prosty. Przypuśćmy, że taka maszyna PS istnieje. Wykorzystamy ją do zbudowania nowej maszyny PS^∞ działającej tak:

$$PS^\infty(v) = \begin{cases} 1 & \textit{gdy } PS(< v, v >) = 0 \\ \textit{nie kończy pracy} & \textit{gdy } PS(< v, v >) = 1 \end{cases}$$

Jak zachowa się maszyna PS^∞ pracując na swym kodzie? Łatwo sprawdzić, że obliczenie $PS^\infty(kod(PS^\infty))$ jest procesem skończonym dokładnie wtedy, gdy jest procesem ... nieskończonym![16]

Nie ma procedury rozstrzygającej dla problemu stopu. Ale mamy banalnie prostą procedurę sprawdzającą - wystarczy uruchomić maszynę T ze słowem v zapisanym na taśmie i czekać...

W ten sposób spełniłem złożoną wcześniej obietnicę:

> *Język złożony ze słów postaci $< kod(T), v >$ i takich, że maszyna T zatrzyma się rozpoczynając pracę ze słowem v to przykład języka rozpoznawalnego (sprawdzalnego), który nie jest rozstrzygalny.*

Przyjrzyjmy się ważnej konsekwencji tego rozróżnienia. W matematyce teoriomnogościowej możemy - jeśli tylko zechcemy - zastąpić daną funkcję częściową $\phi\colon A \to B$ przez funkcję wszędzie określoną $\phi^t\colon A \to B \cup \{\infty\}$ zwracającą „komunikat o błędzie" gdy wartość $\phi(a)$ jest nieokreślona:

$$\phi^t(a) = \begin{cases} \phi(a) & \textit{gdy wartość } \phi(a) \textit{ jest określona,} \\ \infty & \textit{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Tak nie można postępować w świecie funkcji obliczalnych. Dlaczego? Przypuśćmy, że język $L \subset A^*$ jest rozpoznawalny, ale nie rozstrzygalny. Gdyby opisaną wcześniej obliczalną funkcję częściową $\lambda_L^c\colon A^* \to \{0,1\}^*$ można było zastąpić wszędzie określoną funkcją obliczalną (dodając komunikat o błędzie) $\lambda_L\colon A^* \to \{0,1\}^* \cup \{\infty\}$, to otrzymalibyśmy funkcję działającą tak:

$$\lambda_L(v) = \begin{cases} 1 & \textit{gdy } v \in L, \\ \infty & \textit{gdy } v \notin L \end{cases}$$

[14] Np. za pomocą opisanej wyżej funkcji $kod_{\{0,1\}}$. Nie muszę dodawać, że takie kodowanie zawsze istnieje.

[15] Symbol $< kod(T), v >$ oznacza tu słowo binarne - kod pary słów binarnych $(kod(T), v)$. Możemy np. przyjąć

$$< kod(T), v >= 00\ldots01kod(T)v$$

gdzie liczba zer na początku kodu jest równa długość słowa $kod(T)$.

[16] W tym dowodzie jest drobna luka. Ale wszystko jest OK. Jeśli ktoś zauważył tę lukę, to dobrze (o nim świadczy). A jeśli wie, jak ją wypełnić, to jeszcze lepiej.

A to - na mocy definicji - oznacza, że język L jest... rozstrzygalny. Sprzeczność (założyliśmy, że L jest tylko rozpoznawalny)!

> W świecie funkcji obliczalnych mamy dwa rodzaje nieokreśloności.
> Funkcja $f_T : A^* \to B^*$ ma nieokreśloność „jawną" gdy język $L(T)$ (akceptowany przez T) jest rozstrzygalny. Wtedy PRZED rozpoczęciem obliczenia można rozstrzygać, czy będzie ono skończone czy też będzie trwało wiecznie. I możemy uzupełnić funkcję f_T do totalnej funkcji obliczalnej dodając „komunikat o błędzie"[17].
> Jeśli język $L(T)$ jest tylko rozpoznawalny, to nieokreśloność funkcji obliczalnej f_T jest „niejawna".
> Ale nierozstrzygalność problemu stopu oznacza, że nie istnieje uniwersalna procedura rozstrzygająca, czy język $L(T)$ jest rozstrzygalny czy tylko rozpoznawalny... .

Dodatek: Twierdzenie Rice'a

Twierdzenie Rice'a mówi, że *żadna nietrywialna semantyczna własności maszyn Turinga nie jest rozstrzygalna.*
Własność maszyn Turinga jest *semantyczna*, gdy nie rozróżnia maszyn akceptujących ten sam język. Nietrywialna, gdy ma ją choćby jedna maszyna Turinga.
Wspominamy o tym twierdzeniu nie tylko dlatego, że jest ciekawe samo w sobie. Jego dowód ilustruje metodę orzekania o nierozstrzygalności pewnych problemów polegającą na wykazaniu, że rozstrzygalność rozważanego problemu prowadziłaby do rozstrzygalności „problemu stopu" - co jest niemożliwe.

Załóżmy dodatkowo, że rozpatrywana własność maszyn Turinga $\mathcal{P}$ nie przysługuje maszynie nie akceptującej żadnego słowa[18].

Wybierzmy jakąkolwiek maszynę $M_{\mathcal{P}}$ o własności $\mathcal{P}$. Wykorzystamy ją do przekształcenia dowolnej maszyny T w nową maszynę $\hat{T}$, której działanie na słowie v to kolejne wykonanie dwóch podprocedur:
1. uruchamiamy obliczenie $T(kod(T))$. Jeżeli ten proces się nie kończy, to i praca $\hat{T}$ na słowie v się nie kończy. W przeciwnym wypadku:
2. uruchamiamy maszynę $M_{\mathcal{P}}$ na słowie v.
Łatwo sprawdzić, że:

- jeśli maszyna T nie zatrzymuje się pracując na własnym kodzie, to $\hat{T}$ nigdy się nie zatrzymuje - nie ma własności $\mathcal{P}$,

- jeśli maszyna T zatrzymuje się pracując na własnym kodzie, to $\hat{T}$ akceptuje ten sam język co $M_{\mathcal{P}}$ czyli ma własność $\mathcal{P}$[19].

Tym samym rozstrzygnięcie, czy T zatrzymuje się na swoim kodzie jest równoważne rozstrzygnięciu, czy $\hat{T}$ MA własność $\mathcal{P}$. Zatem problem „posiadania przez (dowolnie wybraną) maszynę Turinga T własności P" nie może być rozstrzygalny.

> Wynik Rice'a jest smutny - pokazuje, że żadna nietrywialna własność zbiorów rekurencyjnie przeliczalnych nie jest rozstrzygalna. W szczególności, nie potrafimy rozstrzygać czy języki akceptowane przez dwie dowolnie wybrane maszyny Turinga są takie same, czy realizują tę samą funkcję obliczalną.

10.1.1 Klasyfikacja języków Chomsky'ego revisited

Klasyfikacja języków Chomsky'ego (str. 24) odwoływała się do kształtu opisujących je gramatyk. Teraz ją powtórzymy, ale odwołując się do *akceptorów* - mechanicznych urządzeń orzekających o przynależności słowa do języka. W roli akceptorów wystąpią... maszyny Turinga.

---

[17]Z „jawną" nieokreślonością mamy do czynienia np. w przypadku *ograniczonego odejmowania* liczb naturalnych: odejmowanie $n - m$ jest nieokreślone (niewykonalne) gdy $n < m$.

[18]To założenie nie zmienia sensu twierdzenia: gdy interesuje nas semantyczna własność, którą posiada taka maszyna, to wystarczy rozpatrywać zaprzeczenie tej własności (?).

[19]Tu wykorzystujemy z pozoru dziwne założenie o semantycznym charakterze własności $\mathcal{P}$.

Podstawowe twierdzenie wiążące maszyny Turinga z gramatykami wygląda tak:

Język L jest akceptowalny przez pewną maszynę Turinga T dokładnie wtedy, gdy można go opisać za pomocą pewnej gramatyki kombinatorycznej.

Procedurę sprawdzająca czy słowo w należy do języka $L(G)$ generowanego przez gramatykę G, jest prosta: produkujemy kolejno wszystkie możliwe wyprowadzenia, zaczynając od tych długości jeden, potem długości dwa, itd.. Jeśli $w \in L(G)$, to w pewnym momencie znajdziemy wyprowadzenie tego słowa i skończymy pracę. A jeśli $w \notin L(G)$, to poszukiwanie wyprowadzenia będzie trwało wiecznie.

Skoro znamy procedurę, a procedury to maszyny Turinga, to ... [20]

> Języki akceptowalne przez maszyny Turinga to języki rozpoznawalne (sprawdzalne). Jeżeli za paradygmat matematycznego konstruktywizmu uznamy sprawdzalność kreowanych kolekcji które czynimy przedmiotem naszych badań to musimy przyjąć, że uniwersalnym narzędziem ich tworzenia są specyficzne struktury rekurencyjne - gramatyki kombinatoryczne.

Zawężanie klasy języków zgodnie z hierarchią Chomsky'ego (języki kontekstowe, bezkontekstowe, regularne) oznacza, że akceptujące je urządzenia są coraz prostsze. Skoro jednak maszyna Turinga jest prosta jak czajnik, to na czym polega jej upraszczanie?

Mówiąc najprościej - na ograniczeniu możliwości jej działania. I tak *liniowo ograniczona* maszyna Turinga rozpoczynając pracę ze słowem w modyfikuje w czasie pracy tylko te pola, które są zajęte przez słowo w. Takie maszyny są powiązane z *gramatykami kontekstowymi*:

język L jest akceptowany przez liniowo ograniczoną maszynę Turinga dokładnie wtedy gdy jest generowany gramatykę kontekstową.

Gramatyki kontekstowe wyróżnia to, że w dowolnym wyprowadzeniu $S \rightsquigarrow v_1 \rightsquigarrow v_2 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow v_n$ długość słowa v_i jest mniejsza-równa długości słowa v_{i+1} [21]. Stąd liczba wyprowadzeń, w których ostatnie słowo ma długość n jest skończona, niezależnie od wyboru liczby n. To oznacza, że język $L(G)$ generowany przez gramatykę kontekstową jest rozstrzygalny, gdyż poszukiwanie wyprowadzenia słowa w można zakończyć po skończonej liczbie kroków, po wygenerowaniu skończonego zbioru wszystkich wyprowadzeń w których ostatnie słowo ma długość równą długości w [22].

Ta obserwacja to pierwszy krok do udowodnienia twierdzenia, uzasadniającego wyróżnienie tej podklasy gramatyk (maszyn Turinga):

Języki rozstrzygalne to te, które są akceptowane przez liniowo ograniczone maszyny Turinga (równoważnie: generowane przez gramatyki kontekstowe).

Zawężenie rozważań do klasy języków kontekstowych wprowadza nas do raju w którym językom towarzyszą procedury rozstrzygające o przynależności słowa do języka. Czego chcieć więcej? Po co komu gramatyki bezkontekstowe i regularne?

Nasz raj to pozór, ułuda: procedury rozstrzygające o przynależności słowa dla języków kontekstowych mogą być bardzo złożone, przez co bezużyteczne w praktyce. Gdy ograniczymy się do gramatyk bezkontekstowych, to złożoność tych procedur znacząco maleje - staje się *wielomianowa*[23] I dopiero te języki znajdują praktyczne zastosowanie w informatyce[24].

Języki bezkontekstowe są akceptowane przez *automaty ze stosem*. Maszyny Turinga akceptujące języki regularne to *automaty skończone*. Prostota weryfikacji przynależności słowa do języka

[20] Dowód odwrotnej implikacji - wskazanie gramatyki opisującej język akceptowalny przez maszynę T - polega na przekształceniu zbioru *instrukcji* maszyny T w odpowiedni zbiór *produkcji* gramatyki. Darujmy sobie szczegóły.

[21] To jest konsekwencja kształu produkcji w takiej gramatyce.

[22] Jeśli zrozumiałeś tę argumentację, to powinieneś zgodzić się też z takim stwierdzeniem: *„gdyby możliwe było określenie stałej proporcji między długością twierdzenia a maksymalną długością jego dowodu, to teorie matematyczne byłyby rozstrzygalne"*. (na „twierdzenie" i „dowód" patrzymy tu jak na słowa i tak rozumiemy ich długość)

[23] O złożoności procedur piszę więcej pod koniec tego (długiego) rozdziału (str. 142). Teraz krótko: zgodzimy się, że długość procesu weryfikującego przynależność słowa do języka zależy od długości słowa. Złożoność procedury jest wielomianowa jeśli tę zależność można opisać za pomocą funkcję wielomianowej.

[24] Niektórym to wciąż mało: wyróżnia się podklasy języków bezkontekstowych $LL(k)$ i $LR(k)$: dopiero dla takich języków mamy procedury o satysfakcjonującej efektywności.

regularnego polega na tym, że słowo jest przeglądane tylko jednokrotnie, z lewa na prawo. Liczba kroków procesu weryfikacji jest równa długości sprawdzanego słowa - złożoność tej procedury jest *liniowa*.

> Hierarchia języków Chomsky'ego nie ma algorytmicznego wsparcia: nie mamy procedur pozwalajacych rozstrzygąć, czy dowolny język rekurencyjnie przeliczalny jest regularny (bezkontekstowy, pusty)... . To jeszcze jedna konsekwencja twierdzenia Rice'a.

Klasyfikacja Chomsky'ego to nie tylko wewnętrzna sprawa lingwistyki matematycznej. To w istocie klasyfikacja problemów, które możemy rozsądzać proceduralnie. Oto przykład: graf skończony można *zakodować* jako słowo np. numerując jego wierzchołki, a krawędzie przedstawiając jako pary liczb - numery początku i końca krawędzi. Np. słowo (nad alfabetem złożonym z cyfr, przecinka i dwóch rodzajów nawiasów) $< 1, 2, 3, 4, (1, 2), (3, 4) >$ to kod grafu o czterech wierzchołkach i dwóch krawędziach. Co istotne, pewne własności grafu G można teraz przetłumaczyć na własności syntaktyczne jego kodu. Np. istnienie pętli przy każdym wierzchołku oznacza - w naszym systemie kodowania - że kod grafu G wraz z podsłowem „n" musi zawierać podsłowo „(n, n)". Każda taka własność grafu wyróżnia pewien podzbiór kodów, pewien język. Tym samym rozstrzygnięcie „czy graf ma daną własność" sprowadzamy do sprawdzenia, czy jego kod należy do języka wyznaczonego przez tę własność. Możliwość zaangażowania w to sprawdzanie komputera (maszyny Turinga) zależy od tego, czy język odpowiadający tej własności potrafimy opisać za pomocą gramatyki. A złożoność problemu zależy od kształtu tej gramatyki.

> Wystarczy rzeczy ponazywać, by zakwalifikować rozważany problem do pewnej „klasy trudności"...[25].

Na koniec mały test: czy wyobrażamy sobie, ile jest binarnych maszyn Turinga o danej liczbie stanów? To można oszacować:

$$\textit{liczba maszyn Turinga o } n \textit{ stanach} \qquad = \qquad (9n + 1)^{3n}$$

Np. mamy „tylko" 19^6 maszyn dwustanowych... A to ponad... 47 milionów. Maszyn o 10 stanach jest 91^{30}. Kosmos...[26]. Warto sobie to uświadomić zanim się powie, że to, co skończone, jest w gruncie rzeczy trywialne...

10.1.2 Maszyna uniwersalna

Opisując działanie maszyny Turinga przedstawiłem procedurę - „instrukcję użycia" dowolnej maszyny Turinga. Skoro maszyna Turinga to odpowiednik procedury, to musimy zapytać - czy i tej szczególnej procedurze odpowiada jakaś maszyna?
Tak. I to bardzo ważna: jest to *uniwersalna maszyna Turinga* U. Uniwersalna, czyli zdolna *symulować* pracę dowolnej maszyny Turinga. To możliwe, bo - jak już wiemy - każda maszyna T ma swój binarny kod - słowo $kod(T)$, a każdą parę słów $(kod(T), v)$ można zakodować jako pojedyncze słowo binarne - $< kod(T), v >= 00\dots01kod(T)v$ (str. 116):

Maszyna uniwersalna U symuluje pracę dowolnej maszyny T na danym słowie v: rozpoczynając pracę ze słowem $< kod(T), v >$ daje ten sam rezultat, co maszyna T rozpoczynająca pracę ze słowem v zapisanym na taśmie [27]:

$$U(< kod(T), v >) = T(v)$$

[25] *Ponad wszystkie wasze uroki –*
Ty! poezjo, i ty, wymowo –
Jeden wiecznie będzie wysoki:
* * * * * * * * * * * * * * * *
Odpowiednie dać rzeczy słowo!
C.K.Norwid, Za wstęp(ogólniki)

[26] Wprawdzie niektóre spośród tych maszyn „liczą to samo", ale nie o to chodzi.

[27] Szczegółowy opis kodowania maszyn i budowy uniwersalnej maszyny można znaleźć np. w [55].

> Częścią naszej codziennej aktywności jest realizacja pewnych procedur, „postępowanie zgodne z instrukcją”. Każdy z nas jest po części uniwersalną maszyną Turinga. Trzeba mieć nadzieję, że jesteśmy czymś więcej, niż taką maszyną.
> *„Jeśli oczekujemy od maszyny bezbłędnego działania, nie możemy żądać, by jednocześnie była inteligentna” - A. Turing, odczyt w dniu 20.02.1947 [42]*

Paradoks Berry'ego revisited

Sformułujmy wspomniany wcześniej *paradoks Berry'ego* (str. 74) nieco bardziej ogólnie:

„$berry(n)$ to najmniejsza liczba naturalna, której nie można opisać za pomocą mniej niż n słów”[28].

Sformułowanie tego paradoksu budzi wątpliwości. Wskażmy choćby jedną: przekonanie, że każdej własności liczb naturalnych sformułowanej w języku polskim odpowiada podzbiór liczb naturalnych (złożony z liczb posiadających daną własność), nie ma matematycznego uzasadnienia. Tego nie zapewnia ani arytmetyka ani teoria mnogości. Tymczasem poprawność określenia liczby $berry(n)$ opiera się na tym założeniu.
Analiza matematyczna tego paradoksu wymaga wcześniejszego ustalenia, jak jest nam dany matematyczny obiekt - *„what is a thing?”* -(w tym przypadku: „jak jest dana liczba naturalna?”). Musimy też ustalić *„czym jest opis własności”* - chociażby tylko w odniesieniu do własności liczb naturalnych.
Nie oddalimy się zbytnio od oryginalnego sformułowania paradoksu Berry'ego gdy przyjmiemy, że liczbą naturalną jest jej zapis binarny. A na pytanie, czym jest opis słowa binarnego (w szczególności: liczby naturalnej), odpowiemy przyjmując definicję Kołmogorova[29] .:

„opis binarnego słowa v to para (P, w) gdzie P to maszyna Turinga, w to słowo binarne („kod v”) oraz

$$P(w) = v.\text{”}$$

(równoważnie: $U(< kod(P), w >) = v$)

> Opis słowa musi zawierać w sobie informację, jak je odtworzyć (odczytać).
> Cóż po opisie, którego nikt nie rozumie? Wspomnij J. F. Champolliona[30]
> Słowo *„2+ 2”* jest częścią opisu liczby 4 (jest kodem liczby 4). Drugą częścią jest opis procedury dodawania, która wszyscy mamy w głowach...

Każde słowo binarne v conajmniej jeden opis - słowo $< kod(COPY), v >$, gdzie $COPY$ to maszyna Turinga realizująca funkcję identycznościową, $COPY(v) = v$.

Słowo binarne "0" można uczynić kodem dowolnej liczby n_0 (jej binarnego kodu). To sprawia, że paradoks Berry'ego w pierwotnym sformułowaniu traci sens[31]. Dlatego pytanie Berry'ego trzeba sformułować nieco inaczej: *czy istnieje pojedyncza procedura - nazwijmy ją $BERRY$ - pozwalająca uznać dowolną liczbę n za kod liczby $berry(n)$?*

$$U(< kod(BERRY), bin(n) >) = bin(berry(n))$$

gdzie $bin(n)$ to słowo binarne - binarny numerał liczby n. Warunek *„słowo-kod binarny liczby $berry(n)$ nie ma opisu krótszego niż n”*: dla dowolnego słowa binarnego w, jeżeli

$$(*) \qquad U(< kod(P), w >) = bin(berry(n)) \text{ to } n \leqslant |< kod(P), w >|$$

[28] Wkrótce wyjaśni się, dlaczego... .

[29] A. N. Kołmogorov, (1903 - 1987) – rosyjski matematyk, współtwórca teorii prawdopodobieństwa. *Złożoność Kołmogorova* słowa v to długość najkrótszego słowa w takiego, że $U(w) = v$. Tak określona złożoność nie jest obliczalna. To, o czym tu mówimy, jest w istocie pewną modyfikacją (a może interpretacją) tego twierdzenia.
Złożoność słowa v można też definiować jako minimalną liczbę stanów maszyny Turinga T zdolnej wygenerować v, tzn. takiej, że $U(< kod(T), \varepsilon >) = v$, gdzie ε to słowo puste. G. Chaitin pokazał, że ta liczba - wraz ze wzrostem długości słowa v zbliża się do wartości wyrażenia $\frac{|v|}{2log_2|v|}$ [15] ($|v|$ to długość słowa v).

[30] Jean F. Champollion przywrócił nam, po wiekach milczenia, informację zawartą w hieroglifach egipskich... .

[31] Nieprzekonanym przypomnę, że liczbę niewymierną wyznaczoną przez stosunek długości okręgu do jego średnicy kodujemy pojedynczą literą π... .

(symbol $|v|$ uznacza tu długość słowa v).

Taka maszyna nie istnieje. Łatwo to pokazać:
1. Z równości $(*)$ wynika, że dla dowolnej liczby n, $\quad n \leqslant |<kod(BERRY), bin(n)>|$.
2. $<kod(BERRY), bin(n)>$ to słowo $00\dots01kod(BERRY)bin(n)$, gdzie liczba początkowych zer jest ustalona (str. 116). Stąd, dla dowolnej liczby n, $|<kod(BERRY), bin(n)>| \leqslant |bin(n)| + c$ dla odpowiednio dobranej, ustalonej liczby c. Zatem

$$n \leqslant |<kod(BERRY), bin(n)>| \leqslant |bin(n)| + c$$

Ale nierówność $n \leqslant |bin(n)|+c$ nie może być prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n, gdyż różnica $n - |bin(n)|$ rośnie nieograniczenie![32]

Paradoks Berry'ego traci sens jeśli tylko zgodzimy się na zaproponowaną tu interpretację terminu „opis".

> Nie trzeba się zgadzać z przedstawioną tu analizą paradoksu Berry'ego. Można przedstawic własną ale zawsze trzeba zacząć od (matematycznego) doprecyzowania co rozumiemy przez „opis".

10.2 Funkcje obliczalne

Turing widział obliczenie jako proces przetwarzania słów. Nie tylko on. W pracy *„Relatives of Robinson Arithmetic"*[33] traktującej o teorii składania(?) A. Grzegorczyka[34] napisano tak: *„Grzegorczyk's motivation to study the theory of concatenation is philosophical.* WHEN REASONING OR WHEN PERFORMING A COMPUTATION, WE DEAL WITH TEXTS. *Our human capacity to perform these intellectual tasks depends on our ability to discern texts. Then it is natural to define notions like undecidability directly in terms of texts, without reference to natural numbers."*.

Oczywiście można mówić o funkcjach obliczalnych działających na liczbach naturalnych. Choćby dlatego, że - jak już ustaliliśmy - liczby naturalne to słowa:

funkcja częściowa $\phi : \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ *jest obliczalna gdy istnieje maszyna Turinga* T *nad alfabetem binarnym taka, że dla dowolnego* k*-elementowego ciągu liczb naturalnych* $(n_1, \dots n_k)$,

$$\phi(n_1, \dots n_k) = m \quad wtw \quad f_T(\underbrace{11\dots1}_{n_1}0\underbrace{11\dots1}_{n_2}0\dots0\underbrace{11\dots1}_{n_k}) = \underbrace{11\dots1}_{m}$$

10.2.1 Funkcje obliczalne według Kleene'ego

Obliczalność funkcji działających na liczbach naturalnych można zdefiniować bez odwołań do maszyn Turinga. Taką niezależną definicję zaproponował S.C.Kleene[35].

Funkcje, które *a priori* uznajemy za obliczalne, to:

- *rzutowania;* $\quad \Pi^n_k \colon \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}, \quad (\Pi^n_k(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = x_k)$,
- *funkcja następnika;* $\quad succ \colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$,
- *funkcja stała;* $\quad 0 \colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, *tzn.* $0(n) = 0$, *dla dowolnej liczby* n.

[32] Dla mniej zaawansowanych matematycznie: jeżeli liczbę 10 zwiększymy dziesięciokrotnie, to długość jej dziesiętnego zapisu wzrośnie tylko o jeden znak, gdy zwiększymy stukrotnie - zapis wydłuży się o dwa znaki. Łatwo się zgodzić, że w żaden sposób nie można ograniczyć różnicy między wielkością liczby a długością jej dziesiętnej reprezentacji. Wszystko to pozostaje prawdziwe, gdy zapis dziesiętny zastąpimy binarnym.

[33] V. Svejdar, The Logica Yearbook 2008, pp.253-263, College Publications, London, 2009.

[34] *„theory of concatenations"*

[35] Stephen Cole Kleene (1909-1994) - matematyk amerykański. W 1934 roku Gödel wygłosił w Princeton wykład, którego słuchaczem był młody Kleene. Gödel, szukając formalnej definicji obliczalności, zdefiniował klasę funkcji znanych dziś jako funkcje prymitywnie rekurencyjne. W czasie tego wykładu Gödel sformułował pewne propozycje rozszerzenia tej klasy. To rozszerzenie pokrywa się z klasą funkcji obliczalnych zdefiniowaną ostatecznie przez Kleene'ego [51].

Funkcje obliczalne to te, które można otrzymać z tych *bazowych funkcji obliczalnych* za pomocą wielokrotnego stosowania trzech konstruktorów:

1. składanie funkcji:

$$((g^i\colon \mathbf{N}^{n_i} \longrightarrow \mathbf{N}; i=1,\dots k),\ f\colon \mathbf{N}^k \longrightarrow \mathbf{N}) \implies f(g^1,\dots,g^k)\colon \mathbf{N}^{n_1+\dots+n_k} \longrightarrow \mathbf{N}$$

2. rekursji prostej[36]*: korzystając z danej funkcji* $g\colon \mathbf{N}\times\mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ *i liczby* $a \in \mathbf{N}$ *definiujemy nową funkcję* h *taką, że:*
- $h(0) = a$,
- $h(succ(n)) = g(h(n), n)$

W szczególności: dodawanie, mnożenie definiowane są w ten sposób, czyli są to funkcje obliczalne[37]*.* *W konsekwencji każda funkcja wielomianowa jest obliczalna.*

3. miminum efektywnego: dla danej funkcji obliczalnej $f\colon \mathbf{N}\times\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *i dowolnie wybranej liczby naturalnej* m *możemy rozpatrywać równanie:*

$$(*) \qquad f(m, y) = 0$$

Nową funkcję $g\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ *definiujemy przyjmując, że*

$$g(m) = c$$

gdzie c to najmniejsze rozwiązanie równania $(*)$ *i ponadto dowolnej liczby naturalnej* $a \leqslant y$ *wartość* $f(m, a)$ *jest określona. Stosujemy tu efektowny zapis:*

$$g(x) = \mu y(f(x, y) = 0)$$

Funkcje obliczalne budowane bez użycia operatora minimum efektywnego to funkcje *prymitywnie rekurencyjne.*

Prostota środków użytych do konstrukcji funkcji obliczalnych jest zwodnicza - funkcje obliczalne bywają niebanalne. Pięknym przykładem jest słynna *funkcja Ackermanna:*

$A(0, x) = x + 1$;
$A(n + 1, 0) = A(n, 1)$;
$A(n + 1, x + 1) = A(n, A(n + 1, x))$

Wygląda niewinnie, ale... spróbuj obliczyć wartość $A(4, 2)$[38].

Definicję operatora minimum efektywnego można odczytywać jako opis procedury obliczania wartości funkcji $\mu y(f(x, y) = 0)$: *„dla danego argumentu* $m \in \mathbf{N}$ *testujemy równość* $f(m, y) = 0$ *kolejno dla* $y = 0, 1, 2, \dots$*, aż do chwili, gdy wynik testu będzie pozytywny. Znaleziona tak liczba* y_{min} *jest wartością funkcji* $\mu y(f(x, y) = 0)$ *dla argumentu* m*”.*
Może się zdarzyć, że kolejne wyniki testów równości $f(m, y) = 0$ będą zawsze negatywne. Wówczas wartość funkcji $\mu y(f(x, y) = 0)$ na argumencie m nie jest określona (proces jej poszukiwania jest nieskończony). Wśród funkcji obliczalnych w sensie Kleene'ego są też *funkcje częściowe*[39].

---

[36]Ograniczam się do przedstawienia bardzo uproszczonej definicji schematu rekursji.

[37]Z zastrzeżeniem, które czasowo ukryjemy pod hasłem ”Twierdzenie Tennenbauma” a wyjaśnimy poźniej.

[38]$A(4, 2) = 2^{65536} - 3$. Ten niesamowicie szybki wzrost funkcji Ackermanna jest punktem wyjścia do udowodnienia, że nie jest ona prymitywnie rekurencyjna (choć, na pozór, „podwójna rekurencja” użyta w jej opisie nie jest tak odległa od zwykłej rekurencji).
Ackermann był uczniem Hilberta. Dodajmy, że właśnie Hilbert zainicjował poważne badania nad obliczalnością: dziesiąty punkt jego słynnego programu to pytanie o istnienie uniwersalnej procedury rozwiązywania równań diofantycznych.

[39]W języku Kleene'ego można też próbować mówić o „jawnej” i „niejawnej” nieokreśloności częściowej funkcji obliczalnej. Jednak teraz to rozróżnienie nie jest tak widoczne jak w języku maszyn Turinga.
Dziwny przykład: funkcję $\mu_y(succ(y) = 0)$ można interpretować jako ... „nieokreśloną liczbę naturalną” bo - proceduralnie - jest ona związana z nieskończonym poszukiwaniem rozwiązania równania $succ(y) = 0$ w $\mathbf{N}$.
To nie jest aż tak dziwne jak się zdaje. Badanie semantyk operacyjnych języków programowania w których obecny jest operator punktu stałego (odpowiedzialny za rekursję) zaczyna się od dodania do zbioru liczb naturalnych elementu $\perp$ reprezentującego *„undefined element”*. Zainteresowanych odsyłam np. do pracy *G.D. Plotkin, LCF as a programming language, Theoretical Comp. Sci. (1977), 223-255.*

W języku Kleene'ego możemy też zdefiniować pojęcia *rekurencyjnego* i *rekurencyjnie przeliczalnego* podzbioru liczb naturalnych (które, w sposób oczywisty, odpowiadają rozstrzygalnym i rozpoznawalnym językom):

Podzbiór $A \subseteq \mathbf{N}^k$ jest rekurencyjny („rozstrzygalny”), jeżeli jego funkcja charakterystyczna $\lambda_A \colon \mathbf{N^k} \to \mathbf{N}$ taka, że dla dowolnego ciągu $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbf{N}^k$:

$$\lambda_A(n_1, \ldots, n_k) = \begin{cases} 1 & (n_1, \ldots, n_k) \in A \\ 0 & \textit{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

jest obliczalna.

Podzbiór $A \subset \mathbf{N}^k$ jest rekurencyjnie przeliczalny („sprawdzalny”, „rozpoznawalny”) jeżeli jego częściowa funkcja charakterystyczna $\lambda_A^c \colon \mathbf{N^k} \to \mathbf{N}$ definiowana tak:

$$\lambda_A^c(n_1, \ldots, n_k) = \begin{cases} 1 & (n_1, \ldots, n_k) \in A \\ \textit{nieokreślona} & \textit{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

jest obliczalna.

W języku Kleene'ego twierdzenie o istnieniu uniwersalnej maszyny Turinga ma taką postać: *„istnieje numeracja funkcji obliczalnych jednej zmiennej $(\phi_n \colon n \in N)$ oraz funkcja obliczalna dwóch zmiennych ϕ_U taka, że $\phi_U(n, m) = \phi_n(m)$”.*

Ale w języku Kleenego można czasem precyzyjnie opisać „coś” co, choć intuicyjnie oczywiste, wymyka się językowi maszyn Turinga. Oto przykład: *dla dowolnej (częściowej) funkcji obliczalnej $p \colon \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ istnieje totalna funkcja obliczalna $s \colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ taka, że $p(m, n) = \phi_{s(m)}(n)$* [40] .

Liczby czy słowa, Turing czy Kleene?

Definicja Kleene'ego nie wyjaśnia, dlaczego właśnie tak zdefiniowane funkcje uznajemy za obliczalne. Nie mówi, czym jest obliczenie. Wprawdzie definicje konstruktorów funkcji obliczalnych kojarzą się z pewnymi konstrukcjami programistycznymi ale to niewiele tłumaczy[41].

Obie definicje - Turinga i Kleene'ego - opisują tę samą klasę funkcji: zastępując liczby słowami (numerałami) można dowolną funkcję obliczalną w sensie Kleene'ego zrealizować za pomocą pewnej maszyny Turinga. Odwrotnie: numerując binarne słowa opiszemy działanie dowolnej maszyny Turinga za pomocą odpowiedniej funkcji obliczalnej[42].

> To nie oznacza, że można lekceważyć definicję Kleene'ego, uznać za wtórną. Ta definicja to precyzyjny opis klasy funkcji obliczalnych w języku mainstreamowej matematyki.
> Dzięki Kleene'emu termin „obliczalność” mógł pojawić się w badaniach matematycznych głównego nurtu. A to okazało się ważne dla samej matematyki. Przekonamy się o tym gdy będziemy mówić o dowodzie twierdzenia Gödla.

Kleene i Turing opisali w istocie tę samą klasę funkcji. Ale różnica między ich językami i metodami opisu jest głębsza, wręcz fundamentalna.

> Maszyny Turinga opisują obliczenia jako dziejące się w czasie procesy realizowane przez fizyczne urządzenia. Funkcje obliczalne to - w tej teorii - jedynie opis rezultatu tych procesów.
> Formalizm Kleene'ego jest opisem rekurencyjnej struktury klasy funkcji obliczalnych. Pojęcie „procesu obliczenia” jest tu nieobecne, przywoływane jedynie nieformalnie.
> Te TEORIE są komplementarne. Ale czy bez maszyn Turinga komputery zawładnęły by światem?

[40] Opisz w języku procedur (intuicyjnie oczywisty) sens tego twierdzenia.

[41] Składanie funkcji to sekwencyjne wykonywanie programów, operator minimum efektywnego odpowiada pętli typu „while”. Schemat rekursji odpowiada pętli typu „for” jeżeli funkcję $h : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ wyznaczoną rekurencyjnie przez $a \in \mathbf{N}$ i $g : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ obliczamy iteracyjnie, czyli budując ciąg par liczb naturalnych generowany przez funkcję $\phi : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}^2$ taką, że $\phi(n, m) = (g(n, m), succ(m))$ i element $(a, 0)$. wówczas $h(n)$ to pierwsza współrzędna pary $\phi^n(a, 0)$. To nie tylko intuicja, to - w przybliżeniu - sens twierdzenia Bhöma-Jacopiniego.([8])

[42] W to nie trzeba wierzyć, to można dowieść. Ale taki dowód wymaga bardziej precyzyjnego języka niż ten, którym się tu posługujemy. Zainteresowanych odsyłam do dowolnej monografii poświęconej teorii obliczalności.

Fundamantalna różnica między definicjami obu panów polega na tym, że mówiąc o maszynach Turinga (procesach obliczeniowych) operujemy pojęciem (dyskretnego) czasu jako pojęciem pierwotnym, nie wymagającym zdefiniowania.

W teorii Kleene'ego tak rozumiany czas jest nieobecny. Odwołujemy się do niego tylko wtedy, gdy próbujemy zbudować intuicje związane z formalnymi pojęciami[43]. Dlatego np. w języku Kleene'ego trudno sformułować i rozważać fundamentalny dla teorii obliczalności problem stopu (spróbuj).

Jeszcze jeden przykład: dla dowolnej maszyny Turinga T można zbudować jej *n-tą aproksymację - maszynę* $T^{(n)}$ - która działa jak T, lecz kończy pracę po n krokach. To banał.[44]
Istnienie ciągu maszyn aproksymujących $(T^{(n)} : n \in N)$ pozwala na łatwe udowodnienie dwóch ważnych twierdzeń:

„Każdy język sprawdzalny jest sumą przeliczalnego łańcucha coraz to większych języków rozstrzygalnych". „Każda częściowa funkcja obliczalna f jest aproksymowalna przez ciąg (f_n) totalnych funkcji obliczalnych".

Te twierdzenia mają swoje odpowiedniki „w języku Kleene'ego". Ale dowody tych twierdzeń w tym języku nie są już tak banalnie proste.

Te przykłady zdają się sugerować, że język Turinga jest „lepszy" od języka Kleene'go. No to spróbujcie wyróżnić klasę funkcji pierwotnie rekurencyjnych w języku maszyn Turinga... .

> Nawet te skromne uwagi wystarczą by zrozumieć, co oznacza komplementarność obu teorii. A może nawet więcej: czy zgodne współistnienie obu teorii nie daje powodu by wątpić w sens poszukiwania „uniwersalngo języka" matematyki?

10.2.2 Efektywna numeracja

Słowa nad skończonym alfabetem A można *efektywnie ponumerować*. Wystarczy ponumerować (ustawić w ciąg) litery - $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ - a potem ustawić w kolejkę wszystkie słowa, korzystając z dwóch kryteriów: słowa krótsze są przez dłuższymi a słowa jednakowej długości kolejkujemy w porządku leksykograficznym wyznaczonym przez numerację alfabetu[45].
Ta numeracja jest *efektywna* gdyż przedstawiony opis numeracji słów jest w istocie opisem procedury pozwalającej wskazać słowo o dowolnie wybranym numerze. Uogólniając tę obserwację (i zapisując ją formalnie), *efektywną numeracją języka* $L \subseteq A^*$ nazwiemy totalną funkcję obliczalną $f\colon \mathbf{N} \to L$ taką, że dla dowolnego słowa $w \in L$, $w = f(n)$ dla pewnej liczby naturalnej n.
To, że język posiadający efektywną numerację jest sprawdzalny, jest oczywiste (?). Dowodząc, że

„Każdy język sprawdzalny ma efektywną numerację".

wymaga nieco więcej trudu. Spróbujmy.
Skoro język L jest sprawdzalny, to $L = L(T)$ dla pewnej maszyny Turinga. Procedurę numerowania słów języka L zbudujemy wykorzystując:

- opisaną numerację WSZYSTKICH słów nad alfabetem A,
- procedury rozstrzygające o przynależności słów do języków $(L(T^{(m)})\colon m = 0, 1, 2, \ldots)$

Ustalmy tężpewną kolejnością par liczb naturalnych:

$$(0,0) < (0,1) < (1,0) < (0,2) < (1,1) < (2,0) < (0,3) < (1,2) < (2,1) < \ldots$$ [46]

W „(n, m)-tym kroku" budowanej procedury sprawdzamy czy słowo o numerze n należy do języka $L(T^{(m)}$.
Zaczynamy od testu dla pary $(0, 0)$ - sprawdzamy, czy słowo puste jest w $L(T^{(0)})$. Jeśli tak, to

---

[43] Wyjaśniając sens operatora minimum efektywnego pisałem: „*„dla danego argumentu $m \in \mathbf{N}$ testujemy równość* $f(m, y) = 0$ KOLEJNO *dla* $y = 0, 1, 2, \ldots,$ AŻ DO CHWILI...".

[44] Wystarczy dodać do maszyny-procedury T „licznik kroków" i wykorzystać go do zatrzymania maszyny.

[45] Rezultat jest taki: ε*(słowo puste)*, $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_0a_0, a_0a_1, \ldots, a_na_n, a_0a_0a_0, \ldots$). To tylko początek...

[46] To jest „przekątniowe" kolejkowanie par liczb naturalnych. Zaznacz w układzie kartezjańskim na płaszczyźnie punkty, których współrzędne są liczbami naturalnymi - $(0,0), (0,1), (1,0), (0,2), (1,1), (2,0), (0,3), (1,2) < (2,1), \ldots$ - a zrozumiesz, skąd taka nazwa.

słowu pustemu nadajemy numer 0 . Ustalamy, że odtąd pierwszym „wolnym" numerem jest liczba 1 i rozpoczynamy kolejny test (dla pary $(0,1)$). W przeciwnym przypadku - gdy $\epsilon \notin L(T^{(0)})$- rozpoczynamy kolejny test pamiętając, że pierwszym „wolnym" numerem jest nadal zero.
Załóżmy, że po wykonaniu testów dla wszystkich par które w opisanej kolejce są przed parą (n_o, m_o), ponumerowaliśmy k słów języka L, tzn. pierwszym „wolnym" numerem jest teraz $k+1$. W kolejnym kroku sprawdzamy, czy słowo w o numerze n_o należy do języka $L(T^{(m_o)})$. Gdy test jest pozytywny, to ... . Jeśli rozumiesz w czym rzecz, to łatwo dokończysz opis procedury. Jeśli nie - przeczytaj ponownie opis numeracji[47].

Dobrym testem zrozumienia istoty efektywnej numeracji jest samodzielne uzasadnienie, że *„jeśli język $L \subset A^*$ jest rekurencyjnie przeliczalny ale nie rekurencyjny, to żadna jego efektywna numeracja nie może być zgodna z jakąkolwiek numeracją całego zbioru A^*"*[48]. Spróbuj!

Pojęcie efektywej numeracji po raz kolejny pozwala porównać matematykę konstruktywną i teoriomnogościową. W teorii mnogości można mówić o numeracji języka rezygnując z warunku obliczalności funkcji numerującej $f\colon \mathbf{N} \to A^*$. Jednak takie teoriomnogościowe pojęcie nie ma sensu, gdyż każdy język (nad alfabetem skończonym) ma taką „teoriomnogościową" numerację.

> Istnienie „teoriomnogościowej" numeracji języka oznacza, że każde jego słowo ma swój numer. Ale to nie znaczy, że zawsze - dla wskazanej dowolnie liczby n - potrafimy wskazać słowo o tym numerze. To możliwe tylko wtedy, gdy ta numeracja jest efektywna[49].
> Czy nieefektywna numeracja jest rzeczywiście numeracją?

Różnicę między numeracją a efektywną numeracją dobrze ilustruje taki przykład. Jednoargumentowych totalnych funkcji obliczalnych jest przeliczalnie wiele[50]. Można więc je ponumerować, „ustawić w ciag": $(f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)$. Ale żadna taka numeracja nie może być efektywna! Gdyby tak było, to mielibyśmy obliczalną funkcję $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ taką, że dla dowolnej liczby n, $\phi(n) = f_n(n) + 1$. A to oznacza, że $\phi \neq f_n$ dla każdej liczby n. Ta sprzeczność jest dowodem naszego twierdzenia[51].

> Umiemy rozstrzygać, czy słowo binarne jest kodem maszyny Turinga[52]. Zatem istnieje efektywna numeracja tych maszyn (i częściowych funkcji obliczalnych). Dlatego liczby naturalne można uważać za (ekstremalnie krótkie) ... „kody programów" - przynajmniej w informatyce teoretycznej.

10.3 Maszyny Turinga z wyrocznią

> W antycznej Grecji wielką sławą cieszyła się wyrocznia w Delfach, która ogłaszała swe przepowiednie ustami kapłanki Pytii. Pytania mogły dotyczyć wszystkiego. O co mógł pytać Pytię matematyk?

Wyobraźmy sobie, że Pytia potrafi obliczać wszelkie wartości pewnej - niekoniecznie obliczalnej - funkcji $d\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}$. Przyjmijmy, że maszyna Turinga T - *„maszyna z wyrocznią D"* - ma stan *„zapytaj wyrocznię"* i gdy się w nim znajdzie to pyta Pytię: *„jaka jest wartość funkcji d, na słowie binarnym, które w tej chwili jest na taśmie?"* Odpowiedź Pytii umieszcza w obserwowanym polu taśmy i kontynuje automatyczną pracę. W trakcie pojedynczego obliczenia, wyrocznia może być pytana o działanie funkcji d wielokrotnie[53] .

---

[47] Grozi zapętlenie!... Zauważ też, że słowo $v \in L$ może mieć - w tej numeracji - wiele numerów.

[48] Numeracja $f : \mathbf{N} \to L \subseteq A^*$ jest zgodna z numeracją $g : \mathbf{N} \to A^*$ jeżeli dla dowolnych liczb naturalnych n, m $g(n) \leqslant g(m) \to f(n) \leqslant f(m)$.

[49] Potrafimy też podać numer słowa w O ILE WIEMY, że $w \in L$.

[50] Te funkcje są realizowane przez maszyny Turinga których jest przeliczalnie wiele.

[51] ϕ jako funkcja obliczalna powinna wystąpić w ciągu $(f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)$, czyli $\phi = f_m$ dla pewnej liczby m. Wówczas $f_m(m) = \phi(m) = f_m(m) + 1$... . Wróć na chwilę do *paradoksu Richarda*.

[52] Dlatego można budowć *kompilatory* weryfikujące syntaktyczną poprawność programu przed jego uruchomieniem.

[53] Jeżeli komuś przychodzi do głowy chytry plan, by zadając Pytii kolejne pytania uzyskać pełną informację o funkcji d, to błądzi. Argumentów funkcji d - słów binarnych - jest nieskończenie wiele. Zadając dowolnie dużo, ale skończenie wiele pytań, zawsze będziemy w sytuacji, w której nieskończona część opisu tej funkcji będzie nieznana.

Funkcje realizowane przez maszyny Turinga z wyrocznią d to *funkcje d-obliczalne.*

Przykład: jeśli Pytia potrafi rozstrzygać problem stopu, to, korzystając z jej pomocy, można każdą (częściowa) funkcję obliczalnę dopełnić do totalnej funkcji obliczalnej dodając komunikat o błędzie (str. 116).

> Czasem słyszymy, że maszyny z wyrocznią to model interaktywnego procesu, w którym operator co pewien czas podejmuje decyzje wyznaczające kierunek dalszych, wykonywanych automatycznie, obliczeń. Wątpię. Tak by było, gdyby przy każdym powtórzeniu obliczenia operator podejmował identyczne decyzje. Ale czy to nie przeczy istocie interaktywności?
> *„Jeśli oczekujemy od maszyny bezbłędnego działania, nie żądajmy, by jednocześnie była inteligentna" - A. Turing.*

W języku Kleene'ego definicja *funkcji d-obliczalnych* jest banalnie prosta: wystarczy ową funkcję d dodać do zbioru bazowych funkcji obliczalnych... Zero mitologii.

Różne wybory funkcji-wyroczni d dają różne klasy funkcji d-obliczalnych. Nieobliczalność funkcji d_1 jest „głębsza" od nieobliczalności funkcji d, gdy każda funkcja d-obliczalna jest też d_1-obliczalna ale nie odwrotnie. Są różne stopnie nieobliczalności. Te stopnie tworzą uporządkowaną strukturę, tzw. *poset Turinga*, który jest nie tylko nieskończony, ale i nieprzeliczalny.

> Nieobliczalność funkcji nie wyklucza możliwości obliczenia jej wartości dla pewnych argumentów.
> *Im „głębsza" jest nieobliczalność funkcji, tym trudniejsze jest znajdowanie takich pojedynczych wartości funkcji.* To nie jest twierdzenie - wszak „trudność" to nie jest pojęcie matematyczne. Ale można - chociaż nie trzeba - przyjąć, że to zdanie definiuje „trudność". Bo wystarczy się trochę uprzeć by twierdzić, że cała działalność matematyków polega na obliczaniu wartości różnorodnych, nawet nieobliczalnych, funkcji.

Wesprzemy tę (zapewne kontrowersyjną) tezę wiążąc hierarchię funkcji nieobliczalnych ze znaną nam już „skalą trudności" formuł arytmetycznych (str. 83). Ponieważ każdą taką formułę można zastąpić równoważną jej formułą *w postaci normalnej* - z kwantyfikatorami zgromadzonymi „na początku" formuły[54] - to tę skalę (hierarchię) trudności formuł możemy opisać tak:

- najprostsze formuły arytmetyczne to formuły bezkwantyfikatorowe i te, w których mamy jedynie ograniczoną kwantyfikację[55] *Tę klasę formuł oznaczamy przez* Δ_0^0 $(=\Sigma_0^0=\Pi_0^0)$.

Kolejne klasy formuł Σ_n^0 *i* Π_n^0 *definiujemy rekurencyjnie:*

- $\phi \in \Sigma_{n+1}^0$ *gdy* $\phi \equiv \exists\exists\ldots\exists\,\psi$ *i* $\psi \in \Pi_n^0$,
- $\phi \in \Pi_{n+1}^0$ *gdy* $\phi \equiv \forall\forall\ldots\forall\,\psi$ *i* $\psi \in \Sigma_n^0$

Porównanie hierarchii „nieobliczalności funkcji" i „trudności formuł" umożliwia związanie z każdą formułą $\phi(x_1,\ldots,x_k)$ *częściowej funkcji* $\lambda_\phi^c\colon \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ *takiej, że*

$$\lambda_\phi^c(n_1,\ldots,n_k)=\begin{cases}1 & \textit{gdy formuła } \phi \textit{ jest spełniona przy wartościowaniu}\\ & [x_1:=n_1,\ldots,x_k:=n_k],\\ \textit{nieokreślona} & \textit{w pozostałych przypadkach.}\end{cases}$$

Ten zwiazek opisuje takie oto twierdzenie: *dla dowolnej formuły arytymetycznej* ϕ

1. $\phi\in\Delta_0^0$ *dokładnie wtedy, gdy funkcja* λ_ϕ^c *jest obliczalna,*

2. $\phi\in\Sigma_{n+1}^0$ *dokładnie wtedy, gdy istnieje formuła* $\psi\in\Pi_n^0$ *taka, że funkcja* λ_ϕ^c *jest obliczalna przez maszynę Turinga korzystającą z funkcji* λ_ψ^c *jako wyroczni.*

Podobnie można charakteryzować formuły z klasy Π_{n+1}^0 . W szczególności:

Każdy skończony fragment nieskończoności jest wobec niej niczym.

[54] str.79.

[55] To formuły postaci $\forall_y\,((y\leqslant t)\to\phi)$ i $\exists_y\,((y\leqslant t)\wedge\phi)$, gdzie ϕ to formuła bezkwantyfikatorowa a w termie t nie ma zmiennej y. Zazwyczaj zapisujemy je w „skróconej" postaci: $\forall_{y\leqslant t}\,\phi$ lub $\exists_{y\leqslant t}\,\phi$

- formuły arytmetyczne z klasy Σ_1^0 opisują podzbiory rekurencyjnie przeliczalne[56]

Irracjonalna niechęć studentów do kwantyfikatorów znalazła racjonalne usprawiedliwienie... .

> Nasza dyskusja o twierdzeniu Cantora (o nieprzeliczalności rodziny podzbiorów liczb naturalnych) sugerowała, że to nazbyt liberalna teoriomnogościowa definicja podzbioru pozbawia nas możliwości ich opisu. Mogło się zdawać, że ograniczenie tego pojęcia do zbiorów opisywalnych w języku arytmetyki to rozsądny i bezpieczny pomysł.
> A jednak ... . Język arytmetyki okazał się zbyt bogaty: własności opisywalne w języku arytmetyki są nie tylko nierozstrzygalne ale wypełniają nieskończoną skalę różnych rodzajów nierozstrzygalności.

Przekonanie E. Zermelo, że można pogodzić postulat rozstrzygalności własności formułowanych w języku matematyki z koncepcją Cantora i logiką fregejską okazało się naiwnością[58].

Dodatek: arytmetyki słabsze niż PA

Czy to znaczy, że język arytmetyki jest zbyt obszerny? Czy nie należy rozważyć słabszych arytmetyk - teorii, w których można dowieść mniej, niż w arytmetyce Peano? Takie próby czyniono ograniczając siłę najbardziej kontrowersyjnego aksjomatu - schematu indukcji.

> Schemat indukcji - z racji swego kształtu - nazywany jest często *schematem dowodzenia*. Osłabienie tego schematu oznacza zmniejszenie zbioru dowodliwych stwierdzeń, czyli „słabszą od PA teorię liczb naturalnych".

I tak jeśli schemat indukcji zastąpimy słabszym:

$$\forall_x \neg(x=0) \to (\exists_y\, x = succ(y))$$

to otrzymamy *arytmetykę Robinsona*. Nie można w niej dowieść np. przemienności dodawania, chociaż - uwaga! - można w niej dowieść, że $2+3=3+2$ [59].

Skoro arytmetyka Robinsona jest słabsza od PA to nie jest zupełna. Co ciekawe, nawet ona nie da się rozszerzyć do zupełnej aksjomatycznej teorii[60].

Inne arytmetyki słabsze od PA otrzymamy ograniczając schemat indukcji do jednej ze zdefiniowanych przed chwilą klas formuł:

arytmetyka $I\Sigma_n^0$ ($I\Pi_n^0$) to arytmetyka Robinsona + aksjomat indukcji ograniczony do formuł z klasy $I\Sigma_n^0$ ($I\Pi_n^0$).

Możemy też definiować inne słabe arytmetyki wykorzystując dwa inne *schematy dowodzenia*[61].

Pierwszy to *zasada minimum*:

„wśród liczb posiadających własność opisaną przez formułę $\phi(x)$ istnieje liczba najmniejsza (jeśli tylko choćby jedna liczba ma tę własność)":

$$\exists_x \phi(x) \;\to\; \exists_y (\phi(y) \wedge \neg(\exists_z\, z<y \wedge \phi(z))$$

Drugi to *„schemat podstawiania"* który jest też oczywisty, ale nie potrafię go zręcznie wysłowić:

---

[56] To samo inaczej: *„zbiór $A \subseteq \mathbf{N}^n$ jest rozpoznawalny dokładnie wtedy, gdy istnieje zbiór rozstrzygalny $B \subseteq \mathbf{N}^{n+k}$ i $(a_1,\ldots,a_n) \in A$ dokładnie wtedy, gdy $(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_k) \in B$ dla pewnych liczb $(b_1,\ldots,b_k)$ ",*
- formuły z klasy Π_1^0 opisują własności z częściowo rozstrzygalną negatywną weryfikacją[57].

[58] Logika fregejska = logika stworzona przez G.Frege.

[59] Gdy do zbioru $\mathbf{N}$ dołączymy dwa elementy a, b i przyjmiemy, że $succ(a) = a, succ(b) = b$ oraz zdefiniujemy dodawanie i mnożenie tak:

$+$	n	a	b
m	$m+n$	b	a
a	a	b	a
b	b	b	a

$\cdot$	0	$n(>0)$	a	b
0	0	a	b	
$m(>0)$	0	$m\cdot n$	a	b
a	0	b	b	b
b	0	a	a	a

to otrzymamy model arytmetyki Robinsona, w którym zdania $\forall_x \neg(x = succ(x))$, $\forall_{x,y}\, x+y = y+x$, $\forall_x\, 0+x = 0$, $\forall_x\, 0\cdot x = 0$ są fałszywe. To znaczy, że prawdziwości tych zdań nie można dowieść bez aksjomatu indukcji.

[60] Z uwagi na swą prostotę arytmetyka Robinsona traktowana jest jako „wzorzec" teorii, której nie można rozszerzyć do aksjomatycznej zupełnej teorii.

[61] Są to w istocie schematy twierdzeń dowodliwych w PA (w dowodach wykorzystujemy indukcję) a nazwanych *„schematami dowodzenia"* z uwagi na ich kształt.

$$\forall_{x<t} \exists_y \phi(x,y) \to \exists_z \forall_{x<t} \exists_{y<z} \phi(x,y)$$

Dla dowolnej klasy formuł $K \in \{\Sigma_n^0, \Pi_n^0 : n \in N\}$ oznaczmy przez LK i BK rozszerzenia teorii $I\Delta_0$ odpowiednio o zasadę minimum lub schemat podstawiania, ograniczone do formuł z klasy K. W [11] można znaleźć diagram opisujący zależności między tak definiowanymi słabymi arytmetykami:

$$\begin{array}{l} I\Sigma^0_{n+1} \\ \downarrow \\ B\Sigma^0_{n+1} \longleftrightarrow B\Pi^0_n \\ \downarrow \\ I\Sigma^0_n \longleftrightarrow I\Pi^0_n \longleftrightarrow L\Sigma^0_n \longleftrightarrow L\Pi^0_n \end{array}$$

($T \to S$) oznacza, że aksjomaty S są dowodliwe w T - teoria S jest słabsza niż T [62].

Od wyboru do koloru... . Możemy wybrać taką arytmetykę, która nam odpowiada. Skrajne wybory to arytmetyki Peano i Robinsona. A finityści wybiorą teorię w której wymienione schematy dowodzenia można stosować tylko do formuł z klasy Π_1^0 (trochę upraszczam).

W kontekście dyskusji o słabych arytmetykach warto też przytoczyć *hipotezę Friedmanna* (cytuję za wikipedią):

„Every theorem published in the Annals of Mathematics whose statement involves only finitary mathematical objects (i.e., what logicians call an arithmetical statement) can be proved in EFA[63]

EFA - *„Exponential (or elementary) Function Arithmetic”* - to arytmetyka Robinsona wzbogacona o rekurencyjną definicję potęgowania:

$x^0 = 1$,
$x^{succ(n)} = x^n \cdot x$

oraz o aksjomat indukcji ograniczony do formuł z klasy Δ_0^0.

Jest jeszcze teoria PRA - *Primitive Recursive Arithmetic - arytmetyka Skolema.* Jest to teoria bezkwantyfikatorowa co oznacza, że aksjomaty PA zapisujemy pomijając kwantyfikator uniwersalny, a schemat indukcji zapisujemy tak: dla dowolnej formuły bezkwantyfikatorowej $\phi(x)$:

$$(\phi(x)[x := 0] \wedge (\phi(x) \to \phi(x)[x := succ(x)])) \to \phi(y)$$ [64]

Ponadto dla każdej funkcji prymitywnie rekurencyjnej dodajemy - jako aksjomaty PRA - definiującą ją parę równań rekurencyjnych.

> Teoria PRA jest uznawana przez wielu (konstruktywistów) za formalny odpowiednik hilbertowskiej matematyki „real statements”.

Co wybrać, co robić?[65] Nic. Wystarczy być świadomym różnorodności matematyki.

10.3.1 Krok w bok: fraktale

Rekurencja czy iteracja? *Ciąg iteracyjny* elementów zbioru A wyznaczony przez element $a \in A$ i funkcję-generator $h\colon A \to A$ to funkcja $\phi_{(a,h)}\colon \mathbf{N} \to A$ taka, że $\phi_{(a,h)}(m) = h^m(a)$. Komentując definicję Kleene'ego pokazaliśmy, jak funkcję definiowaną rekurencyjnie obliczać iteracyjnie. Jest też jasne, że każdy ciąg iteracyjny można opisać rekurencyjnie[66].

[62] Zależności te zostały pokazane przez Parsonsa, Parisa i Kirby'ego [11]. Wydały mi się na tyle ciekawe, że postanowiłem je tu przedstawić.

[63] Harvey Friedmann (1948 -), logik amerykański, zapoczątkował tzw. matematykę odwrotną (matematykę na opak). Sens „odwrócenia” polega na tym, że zamiast pytać o konsekwencje ustalenego zbioru założeń (aksjomatów) pytamy, co jest niezbędne do udowodnienia takiego czy innego twierdzenia. Annals of Mathematics to jedno z najbardziej prestiżowych czasopism matematycznych.

[64] Więcej informacji o PRA można znaleźć w [61]

[65] W.I.Lenin.

[66] Jeśli tylko użyjemy schematu rekursji do opisu funkcji typu $\mathbf{N}^k \to \mathbf{A}$ a nie, jak u Kleene'ego, tylko do funkcji typu $\mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$. Spróbuj.

Iteracja(*„iteratio”*) to powtarzanie - wielokrotne użycie funkcji-generatora. Matematyków od czasów Zenona z Elei intrygowało, co się stanie, gdy dany krok iteracyjny powtarzać będziemy „nieskończenie wiele razy”. I choć współczesna analiza matematyczna dostarcza wielu narzędzi badania granic ciągów i sum szeregów, to jednak wciąż jest to pole, na którym możemy wykazać się matematyczną wyobraźnią[67].

Na przykład zbiór Cantora powstaje tak: domknięty odcinek $[0,1]$ *dzielimy na trzy części -* $[0,\frac{1}{3}],(\frac{1}{3},\frac{2}{3}),[\frac{1}{3},1]$ *- i wyrzucamy środkowy, otwarty odcinek. Powtarzamy tę procedurę w stosunku do dwóch pozostałych odcinków (wyrzucamy ich środkowe części). I tak dalej... .*
Czy potrafimy wyobrazić sobie ostateczny efekt nieskończonej realizacji tej procedury? [68]

Konstrukcje iteracyjne ilustruje się zazwyczaj przedstawiając jej kilka (kilkanaście) pierwszych kroków. Resztę, chcąc nie chcąc, pozostawia się owej matematycznej wyobraźni. To szczególny rodzaj wyobraźni, dumny (i nieco arogancki) wyróżnik klanu matematyków[69]. Najpierw rzecz (obiekt matematyczny) sobie wyobrażamy, a dopiero potem formalnie opisujemy. Niejawnie zakładamy, że iteracyjna powtarzalność kroków konstrukcyjnych objawia się jako pewna regularność budowanego w ten sposób obiektu. Wierzymy, że analiza kilku, kilkudziesięciu - „wystarczająco wielu” - pierwszych kroków ujawni wszelkie subtelności i pozwoli wyobrazić sobie graniczny rezultat tego procesu. Jeśli nie, to jest to nasza wina, bo zabrakło nam wyobraźni. Czyżby? Pojawienie się komputerów kazało zwątpić i w ten „psychologiczny paradygmat” matematycznego poznania.

W latach siedemdziesiątych XX wieku za sprawą Beniot Maldenbrota w matematyce pojawiły się *fraktale*[70]. Najprościej: to podzbiory płaszczyzny otrzymywane jako graniczne rezultaty nieskończonych procesów iteracyjnych.
Fraktal zwany dziś *zbiorem Maldenbrota* - opisujemy tak: dla dowolnej liczby zespolonej z tworzymy iteracyjny ciąg $M(z) = (z_0 = z, z_1 = z_0^2 + z, \ldots, z_{n+1} = z_n^2 + z, \ldots)$[71] Taki ciąg może zbiegać do pewnego punktu płaszczyzny lub uciekać w nieskończoność - może być *rozbieżny*. To zależy od wyboru początkowej liczby (punktu) z. Zbiór Maldenbrota tworzą te liczby, dla których opisany ciąg jest zbieżny.

Udowodniono, że ciąg $M(z)$ jest rozbieżny, gdy jakikolwiek punkt tego ciągu znajdzie się poza kołem o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 2.
Jakikolwiek... tylko który? Wiemy już tyle, by zgodzić się, że to kryterium jest podstawą dla stworzenia procedury sprawdzającej czy liczba-punkt NIE NALEŻY do zbioru Maldenbrota.
W tamtym czasie komputery były już na tyle sprawne, by można było zrealizować taki oto *eksperyment*. Dla wybieranych losowo liczb-punktów[72] z generujemy podciągi początkowe ciągów $M(z)$

---

[67]Jeden z najstarszych wyników dotyczących szeregów to osiągnięcie Nicole Oresme który pokazał, że sumując odpowiednio wiele początkowych wyrazów ciągu $(\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N})$ możemy otrzymać dowolnie wielką liczbę (naukowo: szereg harmoniczny $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ jest rozbieżny). Jego pomysł był genialnie prosty - Oresme pogrupował wyrazy tego ciągu tak:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots > 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots$$

Działo się to chwilę po bitwie pod Płowcami... .

[68]Czyli wielkość graniczną, do której przybliżają nas kolejne kroki iteracyjnej konstrukcji. Pomóc można sobie na dwa sposoby: punkty tego zbioru to liczby, które w rozwinięciu trójkowym nie mają jedynek. Inny sposób to odwołanie się do charakteryzacji topologicznej: ten zbiór to jedyna przestrzeń topologiczna, która jest zwarta, metryzowalna, zerowymiarowa i doskonała... Żartuję? Trochę.
Podobną konstrukcją jest *dywan Sierpińskiego*. Z tą różnicą, że rzecz dzieje się nie na prostej, ale na płaszczyźnie : Kwadrat $[0,1] \times [0,1]$ dzielmy na dziewięć (3x3) mniejszych i równych kwadratów i usuwamy środkowy (bez krawędzi). Potem powtarzamy tę procedurę w każdym z ośmiu mniejszych kwadratów. Itd. ... (http://pl.wikipedia.org/wiki/Dywan_Sierpińskiego).

[69]*„Zdaje mi się, że widzę... gdzie? Przed oczyma duszy mojej” - W. Szekspir, Hamlet.* Hilbert poinformowany, że jeden z jego studentów porzucił matematykę na rzecz poezji powiedział: *„To dobrze. Miał zbyt mało wyobraźni jak na matematyka.”.*

[70]B. Mandelbrot (1924 -2010) urodzony w Warszawie francuski i amerykański matematyk.

[71]Mówimy o liczbach zespolonych ale każda taka liczba wskazuje pewien punkt płaszczyzny. Użycie liczb zespolonych pozwala na prostszy opis tej w istocie „geometrycznej” konstrukcji.

[72]Z okręgu o środku w $(0,0)$ i promieniu 2.

o określonej długości. Jeżeli taki podciąg $M(z)$ wykroczy poza koło o promieniu 2, to oznacza, że punkt z nie jest w zbiorze Maldenbrota. Zaznaczając te punkty-liczby czarnym pikselem na białej płaszczyźnie uzyskujemy przybliżony obraz zbioru Maldenbrota. Sam zbiór Maldenbrota jest *wielkością graniczną* dla tak konstruowanych zbiorów[73].
SENS takiej aproksymacji ujawni się dopiero wtedy, gdy testowi zbieżności ciągów $M(z)$ poddamy wystarczająco liczny zbiór punktów, a testowane podciągi będą odpowiednio długie. Ręczne przeprowadzenie testów dla np. losowo wybranych 50 punktów i podciągów długości 50 (co za robota...) powie nam niewiele (nic) o wyglądzie zbioru Maldenbrota.
Ale od czego są komputery? One mogą cierpliwie i szybko realizować tę procedurę dla tysięcy punktów i podciągów niewspółmiernie dłuższych. W internecie można znaleźć liczne galerie fraktali (ich przybliżeń). Są to grafiki o niepokojącej urodzie[74]. To rodzaj twórczości plastycznej, którą w pełni odczyta jedynie matematyk. Bo matematyk skojarzy te grafiki z procesami rekurencyjnymi i zaduma się nad fenomenem tej granicznej konstrukcji...

Podobne eksperymenty znajdziemy w książce *„New Kind of Science” [93].* Najprostsze z nich dotyczą *automatów komórkowych*. Taki automat to - w najprostszej wersji - urządzenie, zdolne przekształcać informację zapisaną w postaci binarnego słowa na nieskończonej w obu kierunkach taśmie zgodnie z pewną rekurencyjną regułą[75]. W każdym kroku rekurencyjnym zmienia się zawartość wszystkich pól. Reguły opisujące zmianę zawartości pola są lokalne; nowa zawartość pola o adresie a zależy od aktualnej zawartości pól o adresach $(a-1, a, a+1)$. Taką regułę można więc opisać jako funkcję $f : \{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}$. Dlatego mamy tylko $2^8 = 256$ różnych automatów komórkowych. Zabawka... Ale Wolfram - być może inspirowany fraktalami - sprawdził - za pomocą komputera! - co otrzymamy, gdy rezultat pracy automatu komórkowego przedstawimy graficznie na płaszczyźnie zapisując kolejne „stany” taśmy jeden po drugim, jako wiersze tej płaszczyzny - wąskie pasemka podzielone na komórki o białym lub czarnym kolorze.
Łatwo się domyślić, że ciekawy obraz otrzymamy dopiero wtedy, gdy narysujemy nie 5 czy 10 pasemek a np. 1000 czy 10000. Komputer to potrafi. Tak powstało 256 obrazów wygenerowanych przez te automaty rozpoczynające pracę z taśmą wypełnioną zerami i jedną jedyną jedynką. Część z nich jest banalna, ale część naprawdę fascynująca. Np. obraz generowany przez automat komórkowy o numerze 30 to trójkąt (wypełniony czarnymi i białymi punktami) którego lewa strona jest w pewnym sensie regularna a prawa wydaje się być absolutnym chaosem... [76]. Dlaczego?

Wartość prac Wolframa nie tylko w prezentacji komputerowych eksperymentów. W rozdziale *„The need for a New Intuition”* Wolfram napisał: *„te obrazy (...) pokazują, że wystarczą proste zasady, by wygenerować wysoce złożone procesy. Na początku może wydawać się to prawie niemożliwe do uwierzenia. Jest to bowiem sprzeczne z niektórymi z naszych najbardziej podstawowych intuicji na temat tego, jak wszystko normalnie działa.”* [77]

Dark side of the moon

> *Żaden algorytm nie może być zły czy dobry sam w sobie - o tym decyduje sposób jego wykorzystania - H.Fry („Hello world”)*

Fraktale to wierzchołek góry lodowej jaką jest świat komputerów, algorytmów i sztucznej inteligencji. Ukazuje - na niewinnym przykładzie - przewagę komputera nad człowiekiem. Ale w podwodnej części tej lodowej góry kryją się demony.
Gdzieś w drugiej dekadzie XXI wieku technika komputerowa osiągnęła poziom, który zapoczą-

[73] Tak powie konstruktywista dla którego zbiór Maldenbrota to tylko idea, gaussowska wielkość graniczna. Ale np. Penrose w [55] nie ma żadnych wątpliwości: *zbiór Mandelbrota nie został wymyślony, lecz odkryty. Tak jak Mount Everest, zbiór Maldenbrota po prostu istnieje!”* Oj, chyba jednak nie tak „po prostu”... .

[74] Dodajmy, że łatwo wprowadzić do reprezentacji graficznej kolor.

[75] Można przyjąć, że pola tej taśmy mają przyporządkowane adresy - liczby całkowite

[76] http://mathworld.wolfram.com/CellularAutomaton.html

[77] Opisane tu automaty komórkowe to najprostsza wersja modelowania „scenariuszy rozwoju”. Jeśli komórkę będziemy reprezentować jako kwadracik na płaszczyźnie, to ma ona już nie dwóch ale ośmiu sąsiadów, którzy mogę wpływać na jej stan. Można też przyjąć że możliwych stanów komórki jest więcej niż dwa. Gra się komplikuje... .Zainteresowanym proponuję przeszukanie internetu pod hasłem ”*Conway's game of life*”.

kował zmianę relacji między człowiekiem a komputerem. Pojawiły się *samodoskonalące aplikacje (programy)*. *„Machine learning"* (termin nienajszczęśliwiej tłumaczony jako „uczenie maszynowe") to działanie polegające na tworzeniu aplikacji, które samodzielnie się doskonalą. Rola człowieka-programisty ogranicza się do inicjacji procesu samokształcenia. Możemy np. podać reguły gry w kółko i krzyżyk i wydać polecenie „naucz się grać" - czyli napisać program POSZUKUJĄCY strategii wygrywającej[78] . Podobnie można zlecić komputerowi nauczenie się gry w szachy czy też w grę go[79].

Rezygnując z kontroli nad przebiegiem samokształcenia aplikacji automatycznie tracimy kontrolę nad jej rezultatami. Możemy podziwiać tak stworzoną aplikację wygrywającą w grę go z arcymistrzem, ale nie wiemy, dlaczego komputer wykonał takie a nie inne ruchy. To sytuacja, którą wszyscy przeżyliśmy (lub przeżyjemy) ucząc dziecko jazdy na rowerze: w istocie NIE WIEMY, dlaczego w końcu udało się maluchowi zapanować nad rowerem. A nawet jeśli wiemy (bo jesteśmy np. fizykiem) to nie zaczniemy przecież nauki od opanowania teorii... .

Do kategorii aplikacji-samouków należą np. programy rozpoznawania obrazów: inicjujemy je dostarczając aplikacji testowych danych i współuczestnicząc do pewnego momentu w procesie ich analizy. Ufamy, że to wystarczy, by aplikacja mogła samodzielnie analizować dostarczane jej, nowe dane-obrazy. Ale czy mamy pewność?

> „Na początku" komputer był niewolnikiem - jego rola ograniczała się do wykonywania prostych poleceń człowieka. Programy samodoskonalące się sprawiają, że komputer staje się naszym partnerem - chcąc nie chcąc musimy mu zaufać.

Komputery wyposażone w takie aplikacje mają nad nami fundamentalną przewagę: są niezmordowane. Mogą uczyć się gry w szachy 24 godziny na dobę przez 7 dni w tygodniu. Mają do dyspozycji praktycznie nieograniczone możliwości obliczeniowe i zasoby pamięci. Czy czas się bać?

Bez wątpienia komputery będą coraz więcej umiały i będą nas wyręczały w wykonywaniu coraz bardziej skomplikowanych zadań. Będą je wykonywały lepiej niż człowiek. To rewolucja porównywalna (nieporównywalna) do rewolucji przemysłowej, gdy maszyny zastąpiły ludzi wykonujących prace fizyczne. Czy staniemy się zbędni? Nie chcę rozwijać tego tematu, ale ... czy można sobie wyobrazić, że „świetnie wykształcony" komputer obserwujący za pomocą tysięcy kamer i czujników spadające jabłko znajdzie w tym impuls do sformułowania prawa powszechnego ciążenia?[80]

> Komputery są zdolne nauczyć się wielu umiejętności w stopniu przekraczającym możliwości człowieka. Ale to nie znaczy, że stają się inteligentne.
> Wizja świata, w którym komputery są podobne do człowieka nie przeraża. Przeraża świat, w którym człowiek upodabnia się do komputera.

10.4 Obliczanie to przepisywanie

Ten podrozdział ma charakter pomocniczy: ma pomóc zrozumieć następny - o λ-rachunku.

Preludium: redukcyjne obliczenia arytmetyczne

Gdyby tożsamość uznać za stosunek między tym, co „a" i „b" oznaczają, to $(a = b)$ nie różniłoby się chyba od $(a = a)$ jeżeli tylko $(a = b)$ jest prawdą. Wyrażało by się w ten sposób pewien stosunek rzeczy do siebie samej,

[78] W 1983 roku powstał film „Gry wojenne" (WarGames) w którego fabule kluczową rolę odgrywało to, że w grze kółko i krzyżyk nie ma strategii wygrywającej: można wygrać tylko wtedy, gdy przeciwnik popełni błąd. A to się nie zdarzy, gdy przeciwko sobie grają komputery w USA i ZSRR odpowiedzialne za użycie broni jadrowej... .

[79] W 1953 komputer pokonał człowieka w grze „kółko i krzyżyk". W 1997 roku komputer Deep Blue pokonał szachowego mistrza Garry'ego Kasparova. W 2016 roku komputer wygrał z arcymistrzem gry go.

[80] *„Każdy obiekt we wszechświecie przyciąga każdy inny obiekt z siłą wprost proporcjonalną do iloczynu ich mas i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości między nimi" - I.Newton.*

taki, w jakim każda rzecz pozostaje sama do siebie (...)Przez $(a = b)$ chce się pewnie powiedzieć, że „a" i „b" oznaczają to samo, ale wtedy mówi się właśnie o znakach stwierdzając między nimi pewien stosunek.
„Sens i znaczenie" - G. Frege

> *„Liczby naturalne służą do zliczania i kolejkowania"*. Do stworzenia tego uniwersalnego systemu nazw wystarcza zero i operacja następnika. Ale człowiek chciał liczyć sprawniej, szybciej - zaczął dodawać i mnożyć. To oznaczało konieczność zapisywania *sum* i *iloczynów* liczb. Tak pojawiły się nowe nazwy - *wyrażenia (termy) arytmetyczne*.
> Język został rozszerzony. Jego jądro - numerały reprezentujące liczby naturalne - zostały otoczone przez wyrażenia arytmetyczne. Tej rozbudowie języka nie towarzyszyło jednak rozszerzenie zbioru znaczeń. Siłą rzeczy pewne nazwy muszą „znaczyć to samo". Dwa wyrażenia arytmetyczne zaczęliśmy nazywać *równoważnymi* gdy mają tę samą wartość. Np. wyrażenia $\underline{4} + \underline{12}$ oraz $\underline{2} \cdot (\underline{3} + \underline{5})$ są równoważne. A oba są synonimami nazwy-numerału $\underline{16}$.
> To wszystko już powiedzieliśmy[81]. Ale czy powiedzieliśmy wszystko?

Wyjaśnienie terminu „synonim" w polskiej wikipedii zaczyna się tak: jest to *„wyraz lub dłuższe określenie równoważne znaczeniowo innemu, lub na tyle zbliżone, że można nim zastąpić to drugie"*. Na przykład frazy-wyrażenia *„siedziba UMK"*, *„miejsce urodzin Kopernika"*, *„Toruń"* uznamy za równoważne, gdyż identyfikują to samo miasto.

Matematyk czytający to wyjaśnienie poprzestanie na pierwszym zdaniu i uzna, że matematycznym odpowiednikiem synonimu jest dobrze mu znane pojęcie *równoważności wyrażeń*. A może nawet wspomni o *logice równościowej* bo przecież istnieją formalne systemy pozwalające dowodzić równoważności wyrażeń arytmetycznych. $2 + 2 = 4$.

Ale to samozadowolenie skutecznie zepsuł Stanisław Lem pisząc: *„Czy pan zna dowód Peana i Russella na to, że dwa a dwa jest cztery? Zajmuje bitą stronę znaków algebraicznych. Wszyscy bawią się, i ja się bawię..."*[82]

Można oczywiście arbitralnie (i nieco arogancko) odmówić nie-matematykowi Lemowi prawa wypowiadania się o matematyce. Ale Lem ... ma rację. Spróbujemy to pokazać.

Jeśli przeczytamy do końca objaśnienie terminu „synonim" w wikipedii, to napotkamy takie zdanie: *„Synonim* NIE JEST *inną nazwą desygnatu, jest wyrazem bliskoznacznym"*.
Otóż to. Wśród trzech synonimicznych wyrażeń - *„siedziba UMK"*, *„miejsce urodzin Kopernika"*, *„Toruń"* - to ostatnie jest wyróżnione. Dwa pozostałe są równoważne, bo można je *zredukować* do wspólnej dla nich podstawowej (kanonicznej) nazwy[83].
Podobnie wyrażenia $\underline{2} \cdot (\underline{3} + \underline{1})$ i $\underline{2} \cdot \underline{2} + \underline{4}$ są równoważne, bo ich wspólną wartością jest numerał $\underline{8}$.

> RÓWNOWAŻNOŚĆ WYRAŻEŃ ARYTMETYCZNYCH JEST WTÓRNA W STOSUNKU DO ICH SPROWADZALNOŚCI (REDUKCJI) DO WSPÓLNEGO *podstawowego* WYRAŻENIA.
> *„Rzeczy, które są równe tej samej rzeczy, są wzajemnie równe" - Euklides*

Tak przygotowaliśmy się do lektury fragmentu wstępu do książki *„Proof and Types" Y. Girarda* [31]:

Istnieje standardowa procedura mnożenia, która dla „wejść" 27 *i* 37 *daje wynik* 999*. Co możemy o tym powiedzieć? Pierwszą próbą jest stwierdzenie, że mamy równość*

$$27 \times 37 = 999$$

Ta równość ma sens w głównym nurcie matematyki: mówi, że dwie strony oznaczają tę samą liczbę całkowitą (...). To jest aspekt DENOTACYJNY*, który jest poprawny, ale pomija istotny punkt:*
istnieje skończony proces obliczeniowy, który pokazuje, że oznaczenia są równe.

---

[81]W rozdziale *Nieskończoność kontrolowana*. Przypomnijmy, że $\underline{n} = succ^n(0)$.

[82]S. Lem (1921-2006) pisarz-futurolog, filozof. Cytat pochodzi z książki *„Śledztwo"*.

[83]Zróbmy test: poprośmy grupę ludzi o wskazanie synonimu wyrażenia *„siedziba UMK"* a drugą, równoliczną, o wskazanie zamiennika wyrażenia *"Toruń"*. Założę się, że liczba osób w pierwszej grupie, które wybiorą *„Toruń"* będzie nieporównywalnie większa od liczby osób z drugiej grupy, które wybiorą odpowiedź *„siedziba UMK"*. Tak będzie, bo *„Toruń"* jest podstawowym („normalnym", „kanonicznym") wyrażeniem w klasie równoważnych mu wyrażeń. Asymetryczny termin „redukcja" lepiej opisuje tę sytuację niż symetryczna „równoważność".

Nadużyciem jest powiedzieć (...) , że 27×37 *równa się* 999*, ponieważ gdyby dwie rzeczy, które mamy, były* TAKIE SAME*, to nigdy nie czulibyśmy potrzeby stwierdzenia ich równości. W istocie (...) zadajemy tu* PYTANIE, 27×37 *i otrzymujemy* ODPOWIEDŹ, 999*. Te dwa wyrażenia mają różne* „SENSY” *i musimy* ZROBIĆ *coś (...) aby pokazać, że te dwa sensy mają to samo znaczenie”*

„Sensem” wyrażenia 27×37 jest to, że wskazuje ono na konieczność dokonania obliczenia - znalezienia jego *wartości*[84]. Możemy nadal pisać $27 \times 37 = 999$ pamiętając jednak, że NIE JEST to zapis symetryczny. To może lepiej pisać $27 \times 37 \rightsquigarrow 999$?

> W Prologu - języku programowania logicznego - zadając pytanie „`4 is 2+2`” otrzymamy odpowiedź `true` a na pytanie „`2+2 is 4`” - `false`...

Redukcję wyrażeń arytmetycznych można opisać nadspodziewanie prosto: wystarczy potraktować aksjomaty Peano - równania rekurencyjne opisujące dodawanie i mnożenie (str. 27, 109) - jako *reguły redukcji*. Zapiszemy je dostosowując oznaczenia do ich nowej roli:

$$\begin{array}{ll} x + 0 \rightsquigarrow x & x \circ 0 \rightsquigarrow 0 \\ x + succ(y) \rightsquigarrow succ(x+y) & x \circ succ(y) \rightsquigarrow (x \circ y) + x \end{array}$$

Te reguły tworzą *system redukcji (przepisywania) termów (wyrażeń) arytmetycznych* [85].
Jak je odczytywać? Np. regułę „$x + succ(y) \rightsquigarrow succ(x+y)$” czytamy tak: *„wyrażenie kształtu* $x + succ(y)$ *można zredukować do wyrażenia* $succ(x+y)$*”* - bez względu na to, jakie wyrażenia arytmetyczne wstawimy za zmienne x i y. Np. $\underline{3} + succ(succ(\underline{2})) \rightsquigarrow succ(\underline{3} + succ(\underline{2}))$.
Podobnie interpretujemy pozostałe reguły. Reguły wolno użyć w dowolnym kontekście, stosując *mechanizm dopasowywania*[86]. Stąd np. $succ(\underline{3 + succ(2)}) \rightsquigarrow succ(succ(3+2))$, gdyż
- wyróżnione podkreśleniem podwyrażenie można „dopasować” do poprzednika reguły $x + succ(y) \rightsquigarrow succ(x+y)$ *przez podstawienie* $[x := 3, y := 2]$,
- zastępując to podwyrażenie zmodyfikowanym przez to samo podstawienie następnikiem reguły - wyrażeniem $succ(x+y)[x := 2, y := 3]$ *- otrzymamy wyrażenie* $succ(succ(2+3))$.

> I jest tak, jak chciał Lem: Nie trzeba „bitej strony”, wystarczy jedna linia:
> $2 + 2 = \underline{2 + succ(1)} \rightsquigarrow succ(2+1) = succ(\underline{2 + succ(0)}) \rightsquigarrow succ(succ(\underline{2+0})) \rightsquigarrow succ(succ(2)) = 4$

10.4.1 Systemy redukcji wyrażeń

Trzeba przyznać Lemowi rację: dowodzenie równoważności wyrażeń arytmetycznych jest wtórne w stosunku do obliczalnia ich wartości. Zapominanie o tym komplikuje życie.

Czy równoważność wyrażeń jest zawsze wtórna w stosunku do ich obliczalnej wartości? Wyrażenia to słowa. Czym jest „wartość” słowa? W zgodzie z poczynionymi sugestiami możemy zaproponować taką quasi definicję: *„wartość słowa* w *to jedyne słowo* v *do którego można zredukować (sprowadzić)* w *i które nie jest dalej redukowalne - o ile istnieje”*. Ta quasi-definicja czyni „wartość” pojęciem wtórnym w stosunku do „redukcji”. Zatem - jak rozumieć redukcję słów?

Parę terminów i kilka faktów [4]: dowolny rozstrzygalny zbiór par słów $\rho \subset A^* \times A^*$ można potraktować jako zbiór *reguł redukcji* pewnego *systemu redukcji słów*. Powiemy, że:

- słowo v *redukuje się jednokrokowo do słowa* w *-* $v \rightarrow w$ *- gdy dla pewnych słów* u, z , $v = uaz$, $w = ubz$ *oraz* $(a, b) \in \rho$,

- słowo v *redukuje się do* w *-* $v \rightarrow^* w$ *- gdy* $v = w$ *lub* $v = v_1 \rightarrow v_2 \ldots \rightarrow \ldots \rightarrow v_k = w$,

- słowo v *jest nieredukowalne (lub: jest w postaci normalnej)*, jeżeli nie można wskazać słowa w takiego, że $v \rightarrow w$.

[84] Wg Fregego, *„sensem wyrażenia jest sposób jego rozumienia tego a denotacją to, do czego się odnosi” - M. Omyła, Aksjomat Fregego (internet).*
[85] ang. *term rewriting system [41].* W Warszawie mówią: *system przepisujący termy*
[86] ang. *pattern matching.*

- *słowo w jest wartością słowa v* - $w = val_\rho(v)$ - jeżeli $v \to^* w$ i w jest w postaci normalnej[87],
- *obliczenie redukcyjne wartości słowa v* to budowa ścieżki redukcji $v \to^* val_\rho(v)$

Zbiór ρ można teżtraktować jako „bazę" *relacji równoważności słów* r_ρ - najmniejszej zwrotnej, symetrycznej, przechodniej relacji zawierającej ρ i spełniającej warunek kongruentności: *„dla dowolnych słów $w, v, z \in A^*$: jeżeli $w\, r_\rho\, v$ to również $wz\, r_\rho\, vz$"*.

Pytanie: *czy równoważność słów jest zawsze wtórna w stosunku do równości ich wartości?* - można teraz sformułować tak: czy dla dowolnych słów $v, w \in A^*$

$$v\ r_\rho\ w \qquad wtw \qquad val_\rho(v) = val_\rho(w) \qquad ???$$

Odpowiedź jest ... negatywna. Choćby dlatego, że nie w każdym systemie redukcji wszystkie słowa mają jednoznacznie wyznaczoną wartość[88].

Aby można było odpowiedzieć pozytywnie, wystarczy, by rozważany system miał dwie własności:

I. *Własność diamentu*: dla każdej trójki słów α, β, γ takiej, że $\alpha \to^* \beta$, $\alpha \to^* \gamma$ istnieje słowo δ takie, że $\beta \to^* \delta$, $\gamma \to^* \delta$:

$$\begin{tikzcd}
 & \alpha \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & \\
\beta \arrow[dr, dashed, "*"'] & & \gamma \arrow[dl, dashed, "*"] \\
 & \delta &
\end{tikzcd}$$

Własność diamentu gwarantuje, że dowolne słowo ma co najwyżej jedną wartość[89]

II. *Silna normalizowalność*: niemożliwe jest budowanie nieskończonych ścieżek redukcji $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n \to \cdots$. To gwarantuje, że każde słowo ma conajmniej jedną postać normalną.

Jeśli nasz system redukcji ma obie te własności, to każde słowo ma wyznaczoną jednoznacznie wartość (którą *obliczymy* budując ścieżkę redukcji maksymalnej długości) . I jest tak, jak oczekujemy: *„dwa słowa są równoważne dokladnie wtedy gdy mają tę samą wartość (postać normalną)"*.

Dowód tego twierdzenia jest prosty jeśli tylko przytomnie zauważymy, że $v\, r_\rho\, w$ dokładnie wtedy, gdy istnieje łączący te słowa skończony *„zygzak"*:

$$\begin{tikzcd}
v \arrow[dr, "*"] & & v_2 \arrow[dl, "*"] \arrow[dr, "*"] & & (\cdots) \arrow[dl, "*"] \arrow[dr, "*"] & & w \arrow[dl, "*"] \\
 & v_1 & & v_3 & & (\cdots) &
\end{tikzcd}$$

(liczba załamań zygzaka jest dowolna). Gdy nasz system ma własność diamentu, to każdy zygzak można (prawie) rozprostować:

$$\begin{tikzcd}
v \arrow[dr, "*"] & & v_2 \arrow[dl, "*"] \arrow[dr, "*"] & & v_i \arrow[dl, "*"] \arrow[dr, "*"] & & w \arrow[dl, "*"] \\
 & {} \arrow[dr, dashed, "*"] & & {} \arrow[dl, dashed, "*"] & & {} \arrow[ddll, dashed, "*"] & \\
 & & {} \arrow[dr, dashed, "*"] & & & & \\
 & & & {} & & &
\end{tikzcd}$$

Czyli $v\, r_\rho\, w$ gdy te słowa mają wspólny redukt. Dalej już z górki... .

Twierdzenie piękne, ale wniosek jeszcze piękniejszy:

„jeżeli system redukcji z rozstrzygalnym zbiorem reguł redukcji ρ ma obie opisane wyżej własności, to problem równoważności dla relacji r_ρ jest rozstrzygalny"!

- wystarczy uruchomić procedurę równoległej redukcji obu słów, która - wobec przyjętych założeń - musi zakończyć się wskazaniem ich wyznaczonych jednoznacznie wartości (postaci normalnych). Gdy są one równe, to wyrażenia są równoważne. Jeśli nie, to nie... . I to wszystko.

[87] Lub: *w jest postacią normalną v.*

[88] Wymyśl systemy redukcji, w których pewne słowa nie mają wartości lub mają ich wiele. To proste.

[89] Angielska nazwa - „diamond property" - wywołuje karciane skojarzenia - „diamond" to „karo". Skąd ta nazwa? - wystarczy spojrzeć na rysunek ilustrujący tę definicję.

Opisany system redukcji wyrażeń arytmetycznych ma własność diamentu i jest silnie normalizowalny. Wyrażenie arytmetyczne jest w postaci normalnej dokładnie wtedy, gdy jest postaci $succ^n(0)$. A *obliczenie redukcyjne* wartości wyrażenia w to budowa ścieżki redukcji rozpoczynającej się od w i o maksymalnej długości[90].
To oznacza, że:

problem równoważności wyrażeń arytmetycznych jest rozstrzygalny.

> Opisana wcześniej procedura dowodzenia równoważności jest tylko procedurą sprawdzającą... .
> Zastępując proste OBLICZANIE REDUKCYJNE wartości wyrażenia $2 + 2$ skomplikowanym DOWODZENIEM równoważności $2 + 2 = 4$ „strzelamy z armaty do wróbla - *„take a sledgehammer to crack a nut”*
> Czy kpiąc z *„dowodu Peana i Russella, że dwa a dwa to cztery”* Lem to wiedział, czy tylko przeczuwał?[91]

Bonus: nierozstrzygalność problemu równoważności słów

Własność diamentu i silna normalizowalność gwarantują rozstrzygalność problemu równoważności słów. Ale czy to jest potrzebne? Może istnieje uniwersalna procedura rozstrzygająca problem równoważności słów bez względu na to, jaki system redukcji rozważamy?
Takiej procedury nie ma. A to dlatego, że sprytnie modyfikując instrukcje definiujące maszyną Turinga T można zbudować system redukcji słów ρ_T nad alfabetem $\{0, 1, \perp, [,]\} \cup Q$ (gdzie Q to zbiór stanów maszyny T) „symulujący” obliczenie realizowane przez T:

„maszyna T zatrzyma się rozpoczynając pracę ze słowem v dokładnie wtedy, gdy w systemie ρ_T $[q_0v] \to^* q_k$ ” (gdzie q_0 to stan początkowy a q_k - stan końcowy)”.

Co więcej, *słowa $[q_0v]$ i q_k są równoważne (tzn. para $([q_0v], q_k)$ należy do najmniejszej równoważności zawierającej ρ_T) dokładnie wtedy, gdy $[q_0v] \to^* q_k$.*
Pomińmy szczegóły[92]. Wniosek z tego twierdzenia jest oczywisty: gdyby istniała uniwersalna procedura rozstrzygająca o równoważności słów, to problem stopu byłby też rozstrzygalny”.
A to, jak wiemy, jest niemożliwe... .

10.5 λ-rachunek

The λ-calculus is a type free theory about functions as rules, rather then as graphs [4]

λ-rachunek to uniwersalny system redukcji stworzony przez A. Churcha[93]. Tak jak maszyna Turinga jest ockhamowskim opisem dyskretnej interakcji z otoczeniem, tak λ-rachunek jest równie genialnym opisem obliczeniowej aktywności człowieka. Obserwowalnym efektem liczenia (obliczania pisemnego) jest przekształcanie napisów zgodnie z przyjętymi a priori *regułami przepisywania*. Wydaje się, że takich reguł jest ogromnie wiele i że zależą one od rodzaju obliczenia (czy mnożymy, dodajemy ...). Geniusz Churcha w tym, że skonstruował język i wskazał ... pojedynczą(!) regułę redukcji pozwalającą na na realizację dowolnych obliczeń[94].

Prezentację λ-rachunku poprzedzimy przypomnieniem trochę zapomnianej konwencji notacyjnej zwanej *λ-notacją* Przypuśćmy, że interesuje nas funkcja przyporządkowująca każdej liczbie

[90]Takich ścieżek może być wiele i o różnej długości. Dlatego jedni liczą szybciej a drudzy wolniej... .

[91]Krytyczna uwaga Lema jest z lekka chybiona. Arytmetyka to nie zbiór procedur rachunkowych. Arytmetyka to NAUKA O RACHUNKACH. Spektakularnym przykładem ukazującym korzyści jakie daje arytmetyka jest anegdota o młodym Gaussie, któremu nauczyciel (zapewne o skrywanych skłonnościach sadystycznych) kazał obliczyć sumę stu pierwszych liczb naturalnych. Zamiast liczyć, Gauss pomyślał i odkrył, że wyrażenie $1 + 2 + \ldots + n$ można zastąpić równoważnym i prostszym wyrażeniem $\frac{n(n+1)}{2}$. I zamiast tracić czas na ogłupiające rachunki mógł pograć w piłkę... . Nauczyciel Gaussa uczył RACHUNKÓW. Miał pecha (szczęście), że na jego lekcji pojawił się genialny MATEMATYK. Obliczanie wartości wyrażeń to rachunki. Wiedza o tym, które wyrażenia są równoważne to arytmetyka.

[92]Szukaj ich np. w skrypcie P.Urzyczyna *Wstęp do teorii obliczeń (str.41)(dostępny w internecie).*

[93]Alonzo Church (1903 - 1995) amerykański logik i matematyk. Wymieniając tylko Churcha krzywdzę wielu jego poprzedników i współpracowników (Frege, Russell, Curry, Schönfinkel, Kleene, Rosser). O historii powstania λ-rachunku można przeczytać w artykule J.P.Seldina [68], który jest (był) dostępny w internecie a także w [13].

[94]Szczegółową prezentację λ-rachunku można znaleźć np. w [4].

rzeczywistej jej kwadrat. Pracujący matematycy postąpią wtedy tak:
- *najpierw wiążą z badaną funkcją* **nazwę** $= f: \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$,
- *następnie z tą nazwą wiążą* **opis** *rozważanej funkcji* - $f(x) = x^2$.

λ-*notacja* to konwencja, pozwalająca łączyć wprowadzenie nazwy funkcji z jej opisem. I tak np. rozważaną funkcję oznaczamy w tej konwencji jako $\lambda_x\, x^2$.

Opis działania funkcji zawarty w takiej nazwie wykorzystujemy do obliczania jej wartości na zadanym argumencie w najprostszy sposób - poprzez odwołanie do prostego *przepisywania*:

$$(\lambda_x\, x^2)(3) \rightsquigarrow x^2[x := 3] \rightsquigarrow 3^2 \to 9$$

Church pokazał, że do budowy uniwersalnego języka obliczeń redukcyjnych wystarczą dwa konstruktory wyrażeń: *aplikacja* i właśnie λ-*abstrakcja*.

Język λ-termów ze zbiorem zmiennych X definiujemy (rekurencyjnie):

$$\frac{}{x \in \lambda\text{-terms}}\, x \in X \qquad \frac{M, N \in \lambda\text{-terms}}{MN \in \lambda\text{-terms}}\ \textit{(aplikacja)} \qquad \frac{x \in X, M \in \lambda\text{-terms}}{\lambda\, x.\, M \in \lambda\text{-terms}}\ \textit{(abstrakcja)}$$

Operator abstrakcji *wiąże zmienne* - zmienna x jest związana w termie $\lambda x.M$.

> W składni λ-rachunku nie ma żadnych mechanizmów kontroli stosowania konstruktora aplikacji. W szczególności - λ-term może być aplikowany sam do siebie.
> Wspomnij dyskusję o konsekwencjach samostosowalności maszyn Turinga... .

Jedyną regułą opisywanego systemu redukcji jest tzw. β-*redukcja*:

$$(\lambda x.M)N \ \to_\beta\ M[x := N] \qquad (\beta - rule)^{95}$$

Pojedynczy *krok obliczenia redukcyjnego* λ-termu to wykorzystanie tej reguły „w dowolnym kontekście", np:

$$x(\underline{\lambda x.(\lambda y.yx)(\lambda z.zz)}) \to_\beta x(\lambda y.(y\lambda z.zz))$$

(podkreślony podterm to redex - podterm, do którego zastosowaliśmy β-redukcję). Obliczenie redukcyjne to ciąg - skończony lub nie - takich kroków[96]. Na przykład:

$$\underline{(\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.\,(\lambda w.xz))y))a}b \to_\beta \underline{(\lambda y.(\lambda z\,(\lambda w.az))y)b} \to_\beta (\lambda z\,(\lambda w.az))b \to_\beta \lambda w.ab$$

Pięknie... Ale ktoś zniecierpliwiony tymi formalnymi sztuczkami zapyta: jakie jest *znaczenie* λ-termów? Co wyraża β-redukcja?

Odpowiedź jest brutalna: nic nie wyraża.

> λ-rachunek - w odróżnieniu od hilbertowskich teorii aksjomatycznych - nie był budowany jako opis zastanych „modeli zamierzonych".
> *„Użycie kombinatorów przez Curry'ego było bardzo ściśle związane z jego filozofią matematyki: dla niego system formalny nie był opisem jakichś wcześniej istniejących obiektów (...)" [13]*[97].
> Świadomość tej fundamentalnej odmienności jest niezbędna, jeżeli chcemy rozumieć tę matematykę...

λ-rachunek to uniwersalne środowisko, w którym można realizować dowolne procesy obliczeniowe. Tylko tyle i aż tyle. By to pojąć, popatrzmy jak w tym środowisku odtworzyć działania w dwuelementowej algebrze Boole'a wartości logicznych. Wartości logiczne - *prawdę* i *fałsz* - reprezentują teraz dwa (nieredukowalne) λ-termy:

$$\texttt{true} \equiv \lambda x.(\lambda y.x) \qquad \texttt{false} \equiv \lambda x.(\lambda y.y)$$

> Dlaczego tak? Jest to związane z rolą, jaką wartości logiczne odgrywają w procesie deklarowania funkcji. Wartości logiczne są wykorzystywane przy „deklarowaniu warunkowym" czyli w deklaracjach o schemacie`if ... then ... else....`

[95]Napis $M[x := N]$ to λ-term powstały z M przez zastąpienie każdego wolnego wystąpienia zmiennej x termem N

[96]W opisie obliczenia redukcyjnego pominęliśmy α-*konwersję* - operacje przemianowywania zmiennych związanych pozwalającą unikać tzw. „konfliktu zmiennych" [4].

[97]Haskell Curry (1900-1982) amerykański matematyk, współtwórca λ-rachunku.

Jeśli ten schemat „zrealizujemy” jako λ-term WMN:

$$\texttt{if } W \texttt{ then } M \texttt{ else } N \quad \equiv \quad WMN$$

to λ-termy przypisane napisom `true` i `false` wypełnią swoją rolę:

$$\begin{aligned} \texttt{if true then} M\, \texttt{else} N &\equiv \lambda x.(\lambda y.)xMN \rightarrow^*_\beta M \\ \texttt{if false then} M\, \texttt{else} N &\equiv \lambda x.(\lambda y.)yMN \rightarrow^*_\beta N \end{aligned}$$

„Nie pytaj o znaczenie. Pytaj o użycie” - L. Wittgenstein[98].

Operację negacji zaprogramujemy (zaimplementujemy) tak:

$$\texttt{not} \equiv \lambda t.(t\, \texttt{false true})$$

Sens negacji w tym, że zmienia ona wartości logiczne - `true` na `false` i odwrotnie, I tak jest: łatwo pokazać, że β-redukcja λ-termu ukrytego pod skrótem `not true` prowadzi do jego postaci normalnej, którą okazuje się λ-term ... `false`!

$$\texttt{not true} \rightarrow^*_\beta \texttt{false}$$

Podobnie `not false` $\rightarrow^*_\beta$ `true`[99].

Można utworzyć λ-termy reprezentujące operacje `and, or, implies` - tak, że np. `and true true` $\longrightarrow^*_\beta$ `true` oraz `or true false` $\longrightarrow^*_\beta$ `true`. W ten sposób implementujemy - w języku λ-termów i za pomocą β-redukcji - algebrę Boole'a wartości logicznych [4]. Czego chcieć więcej?

Podobnie wykorzystamy λ-rachunek do implementacji działań na liczbach naturalnych które są tu reprezentowane przez *numerały Churcha*: liczbie n przyporządkowujemy λ-term:

$$\underline{n} \equiv \lambda x.\lambda y.\, \underbrace{x(\ldots x(x}_{n}(y)\ldots))$$

Gdy teraz z operacją następnika *succ* zwiążemy λ-term $\lambda nfx.nf(fx)$ to - jak się domyślamy - proces β-redukcji termu-aplikacji *succ* $\underline{0}$ doprowadzi do numerału $\underline{1}$.
A gdy przyjmiemy $+ \equiv \lambda mnfx.mf(nfx)$ to - co stwierdzamy zapewne z ulgą - term $+\underline{2}\,\underline{2}$ jest redukowalny do numerału $\underline{4}$ ... .
Za mnożenie „odpowiada” λ-term $\lambda\, mnfx.m(fn)x$[100] .

Powtórzmy: nie ma sensu pytanie o „znaczenie” λ-termów. Liczy się to, że potrafimy za ich pomocą liczyć[101].
Przejdźmy do puenty. Najpierw definicja:

funkcja (częściowa) $f\colon \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ jest λ-definiowalna jeżeli można skonstruować (domknięty) λ-term F taki, że dla dowolnych liczb naturalnych $n_1, \ldots, n_k$:

$$F\underline{n}_1 \ldots \underline{n}_k \longrightarrow^*_\beta \underline{f(n_1, \ldots, n_k)}$$

o ile wartość $f(n_1, \ldots, n_k)$ jest określona. W przeciwnym wypadku proces redukcji λ-termu $F\underline{n}_1 \ldots \underline{n}_k$ jest nieskończony[102].

Fundamentalne twierdzenie, które pozwala traktować λ-rachunek jako kolejny równoważny opis obliczalności mówi, że:

Klasa funkcji λ-definiowalnych to dokładnie klasa wszystkich funkcji obliczalnych.

λ-term F odpowiadający funkcji obliczalnej f to jej *„program”* w języku λ-rachunku. Term $F\underline{n}_1 \ldots \underline{n}_k$ jest wszystkim, czego potrzebujemy by obliczyć wartość $f(n_1, \ldots, n_k)$ korzystając z β-redukcji.
λ-rachunek jest językiem programowania[103].

---

[98] Pomyśl o ... fortepianie. Czy sens ma pytanie o jego znaczenie, czy o użycie?

[99] Zgodnie z obietnicą, pomijam szczegółowe opisy tych rachunków.

[100] Inne przykłady: *succ* $\equiv \lambda nfx.f(nfx)$, *potęgowanie exp* $\equiv \lambda\, mnfx.mnfx$, *funkcja k-argumentowa stale równa zeru* $Z_k \equiv \lambda\, m_1 \ldots m_k.0$

[101] Zabawny szczegół: `true` $= \lambda x.(\lambda y.x) = \underline{1}$... . Czyżbyśmy mieli tu do czynienia z fundamentalnym odkryciem matematycznym?

[102] Nieco dokładniej: λ-term $F\underline{n}_1 \ldots \underline{n}_k$ nie ma tzw. *czołowej postaci normalnej - head normal form*[4] .

[103] Dokładniej: to *core language* większości (jeśli nie wszystkich) języków programowania funkcyjnego m.in. Haskella.

β-redukcja ma własność diamentu ale NIE JEST silnie normalizująca - mogą się tu zdarzać nieskończone obliczenia. Tak, jak w przypadku maszyn Turinga. I chyba nikogo już nie dziwi, że problem - *„czy λ-term ma postać normalną”* - jest nierozstrzygalny.

10.5.1 Maszyny Turinga a λ-rachunek

Rzecz jest tylko stanem procesu. Niczym więcej.
Widząc rzeczy z osobna nie widzimy niczego.

Obliczenie - zarówno w ujęciu Turinga jak i Churcha - to proces przetwarzania informacji. Co te dwie teorie mają ze sobą wspólnego a czym się różnią?

Maszyna Turinga to realizacja inżynieryjnego podejścia do obliczenia: dla konkretnego zadania budujemy od podstaw odpowiednią maszynę tzn. definiujemy zbiór instrukcji - „program”. Żaden krok obliczenia - zmiana konfiguracji - nie zostanie wykonany, jeśli w programie nie ma odpowiedniej instrukcji. *„For normally, we start from whatever behaviour we want to get then try to design a system will produce it”. [93]*

λ-rachunek to uniwersalny język z uniwersalną regułą redukcji, ŚRODOWISKO, w którym mogą dziać się wszelkie procesy obliczeniowe. Realizując obliczenie w λ-rachunku nie troszczymy się o ustanowienie reguł redukcji. Tu jest jedna jedyna i dana *a priori* reguła - β-redukcja. Nasza rola ogranicza się do *zadeklarowania* λ-termu - programu.

> Realizując obliczenie „w stylu Turinga” - budując maszynę - musimy zaprojektować każdy pojedynczy krok obliczenia i sterowanie sekwencją kolejnych kroków. To paradygmat programowania *imperatywnego*. Realizując obliczenie w λ-rachunku nie mamy bezpośredniego wpływu na przebieg obliczenia[104]. My je tylko inicjujemy wskazując λ-term, którego redukcja będzie jego realizacją. To paradygmat programowania *deklaratywnego*.

W praktyce nikt - poza działającymi pod przymusem studentami - nie rozwiązuje zadań obliczeniowych korzystając z maszyn Turinga czy λ-rachunku. Wystarczy spojrzeć na odrażający kształt λ-termów lub spróbować skonstruować maszynę Turinga realizującą mnożenie liczb naturalnych by wybić sobie z głowy takie pomysły. To nie są języki programowania.

Język maszyn Turinga i język λ-termów to *języki bazowe („ideowe”)* dla dwóch grup języków programowania - języków imperatywnych i funkcyjnych. Język bazowy to, w terminologii angielskiej, *core language*. *Core* to jądro, rdzeń a nawet... dusza.

Ockhamowska zwięzłość opisu składni języka jest pożądana, gdy prowadzimy badania nad jego strukturą i „siłą”. Przestaje być cnotą, gdy chcemy tego języka używać. Dlatego język bazowy, ta osnowa, musi być uzupełniony przez *shall language* - powłokę, ułatwiającą korzystanie z tego, co on oferuje. Język powłoki ma być przyjazny, *user friendly*[105].
W przypadku języków imperatywnych nowe wyrażenia to najczęściej nazwy makrooperacji: pod jednym poleceniem ukrywamy pewną sekwencję instrukcji realizowanych przez maszynę Turinga
W językach programowania funkcyjnego nieczytelne λ-termy zastępujemy przyjaznymi deklaracjami. Najprostsze deklaracje to nazwy-skróty jak np. opisane wcześniej słowa `true`, `not`, $\underline{n}$ czy też fraza „`if... then... else...` ”. Te nazwy-skróty należą do powłoki λ-rachunku.
Ale w składni języka powłoki może być coś więcej: można np. umożliwić deklaracje funkcji, których tłumaczenie na λ-termy jest czymś więcej niż prostym rozwinięciem skrótów. I tak np. w *Haskellu* można deklarować funkcje odwołując się wprost do schematu rekursji. Deklaracja mnożenia - funkcji `mult` wygląda tak:

```
mult (x,0) = 0
mult (x,succ(y)) = mult(x,y) + x
```

[104] Dokładniej: nie mamy możliwości ustalania strategii redukcji dla każdego obliczenia osobno. W praktyce o wyborze strategii decydujemy na etapie budowy kompilatora dla języka programowania opartego na λ-rachunku.

[105] Po angielsku mówimy piknie o „cukrze syntaktycznym”- *syntactic sugar*. To przypomina sytuację, którą nazwaliśmy budowaniem „trzeciego wymiaru” języka matematyki.

Ta deklaracja jest tłumaczona na takie oto wyrażenie:

$$\texttt{mult} \rightsquigarrow Y(\lambda mxy.\, \texttt{if}\, (y = 0)\, \texttt{then}\, 0\, \texttt{else}\, (m\, x\, (y - 1)) + x)$$

gdzie Y to *operator punktu stałego* - specjalny λ-term, taki, że $YF \rightarrow^*_\beta F(YF)$ dla dowolnego λ-termu F[106].

> Dodawanie do jądra języka powłoki nie zmienia jego siły, ale jest istotne z pragmatycznego punktu widzenia[107].

10.5.2 Glossa: skąd się wziął λ-rachunek?

> *„Rachunek lambda jest teorią (...) dotyczącą funkcji* JAKO REGUŁ, *a nie jako grafów. "Funkcja jako reguła" jest staroświeckim pojęciem funkcji i odnosi się do* PROCESU PRZECHODZENIA OD ARGUMENTÓW DO WARTOŚCI *(...). Pomysł zwykle przypisywany Dirichletowi, że funkcje można również utożsamiać z ich wykresami (...) był ważny dla matematyki. Niemniej jednak λ-rachunek* TRAKTUJE FUNKCJE PONOWNIE JAKO REGUŁY *w celu podkreślenia ich aspektów obliczeniowych." [4]*

Dominująca od początku XX wieku teoria mnogości jest nieco... schizofreniczna[108]. Wyróżnia pojedyncze pojęcie pierwotne - zbiór i jedną podstawową relację - przynależność (zbioru do zbioru). A przecież każdy matematyk powie, że głównie interesują go funkcje. Np. analiza matematyczna to badanie własności funkcji rzeczywistych. Godzimy się z faktem, że tych funkcji jest „więcej niż nieprzeliczalnie wiele" ale w istocie interesują nas tylko funkcje opisywalne a nawet więcej - stowarzyszone z pewną procedurą obliczania jej wartości.
λ-rachunek został sformułowany prze Churcha ok. 1928 roku jako część większej teorii która nie dość, że traktuje funkcje priorytetowo, to zupełnie nie przejmuje się ich teoriomnogościową definicją. *„The notion of function (...) in the λ-calculus is an intensional one."*[109]
Rdzeniem teorii Churcha jest *rachunek kombinatorów* - λ-rachunek ograniczony do operacji aplikacji[110]. Rozszerzenie do λ-rachunku to (upraszczając) konsekwencja wymogu *kombinatorycznej zupełności* nałożonego przez Churcha na rachunek kombinatorów: *dla dowolnego termu $M(x_1, \ldots, x_m)$ (zbudowanego ze stałych i zmiennych wyłącznie za pomocą aplikacji) istnieje term $\hat{M}$ w którym nie ma zmiennych wolnych taki, że* $M(x_1, \ldots, x_m) = \hat{M} x_1 \ldots x_m$. Wprowadzenie λ-abstrakcji pozwala przyjąć $\hat{M} = \lambda_{x_1 \ldots x_n} M(x_1, \ldots, x_k)$.

System budowany przez Churcha, aspirujący do roli ur-teorii, miał być też zupełny w innym sensie. Język λ-rachunku rozszerzono o symbol jednoargumentowego predykatu „$\vdash$" i związany z nim systemem dowodzenia wyrażeń postaci $\vdash M$, gdzie M to λ-term[111].

Aksjomaty i reguły wyprowadzania wyrażeń postaci $\vdash M$ wybrano tak, by można było „uwewnętrznić to, co niezbędne" (by budowana teoria była ur-teorią). Np. uwewnętrznienie równości

[106] Wyrażenie które przyporządkowaliśmy wyrażeniu `mult` nie jest ostatecznym rezultatem translacji haskellowej deklaracji na „czysty" λ-term. Powinniśmy jeszcze zastąpić symbol Y λ-termem $\lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$ i wyeliminować inne „nieczyste" części tego napisu. Powodzenia.

[107] *Pragmatyka to dział językoznawstwa, którego przedmiotem są społeczne i sytuacyjne warunki funkcjonowania języka oraz cele, jakie mówiący chce osiągnąć przez użycie określonych wyrazów i wyrażeń - Encyklopedia PWN.*

[108] Schizofrenia - zaburzenie psychiczne charakteryzujące się (...) nieadekwatnym postrzeganiem (...) i oceną rzeczywistości (wikipedia).

[109] http://plato.stanford.edu/ entries/lambda-calculus/. Wspomnij brouwerowskie *„by a function (...) we understand a law"*.

[110] W tym samym czasie rosyjski logik Moses Shönfinkel (1889-1942) budował system znany jako *logika kombinatoryczna* U Shönfinkela *kombinatory* to - w uproszczeniu- „operacje na działaniach" które pozwalają wyeliminować kwantyfikatory z opisu własności tych działań. Na przykład: przemienność działania + opisujemy zdaniem $\forall_x \forall_y\, x + y = y + x$. Wprowadzając „kombinator" P, taki, że dla dowolnej operacji dwuargumentowej q, $P(q)(x, y) = q(y, x)$ możemy opisać tę przemienność równością $P+ = +$. Schönfinkel wskazał dwuelementowy zbiór operatorów $\{K, S\}$ i pokazał, że za pomocą stosownego, pojedynczego operatora logicznego można generować wszystkie formuły logiki predykatów bez użycia zmiennych związanych [13].

[111] W [17] sugeruje się by napis „$\vdash M$" czytać *„M is asserted"* dodając wyjaśnienie: *„$\vdash$ plays the same role as Hilbert's "ist beweisbar" (jest do udowodnienia) or Church's "is provable"*.

termów polega na dodaniu do składni języka stałej Eq i związania z nią aksjomatów takich, że:

$$M = N \quad wtw \quad \vdash EqMN$$

co oznacza, że „zewnętrzne" uzasadnienie metawyrażenia $M = N$ można zastąpić „wewnętrznym" wyprowadzeniem wyrażenia $\vdash EqMN$.
Podobnie zewnętrzne uzasadnienie stwierdzenia *„term M jest numerałem Churcha"* zastępujemy wewnętrznym wyprowadzeniem wyrażenia $\vdash \mathcal{N}M$, gdzie $\mathcal{N}$ to kolejna stała dodana do składni. Tak samo uwewnętrznimy stwierdzenie *„term O aplikowany do numerału zwraca numerał"* - wprowadzamy term-stałą F wraz z aksjomatami pozwalającymi zewnętrzne uzasadnienie tego stwierdzenie zastąpić wyprowadzeniem wyrażenia $\vdash FO\mathcal{N}\mathcal{N}$.

Co zaskakujące, jeśli λ-rachunek rozszerzymy o term-stałą F (i związane z nim aksjomaty) to termy Eq i $\mathcal{N}$ można zdefiniować jako pojęcia wtórne. A gdy dołączymy do λ-rachunku term - stałą P^* - który umożliwia uwewnętrznienie stwierdzenia *„jeśli $\vdash U$ to $\vdash V$"* i dodamy „wewnętrzną" regułę *modus ponens*:

$$\textit{jeśli} \ \vdash P^*UV \quad \textit{oraz} \quad \vdash U \ \textit{to} \quad \vdash V$$

to stałą F możemy zdefiniować jako pojęcie wtórne.
Dołączenie stałej P^* jest relizacją wymogu *dedukcyjnej zupełności*. Pomińmy detale. Ważne jest to, że jednoczesny wymóg kombinatorycznej i dedukcyjnej zupełności prowadzi do ... wewnętrznej sprzeczności systemu: dowodliwe jest każde wyrażenie $\vdash M$. W szczególności dowodliwe są wszelkie wyrażenia postaci $\vdash EqMN$ - wszystkie termy są „wewnętrznie" równe. To jest treść paradoksu odkrytego przez Kleene'ego i Rossera[112].
Z pierwotnego zamysłu Churcha ocalał tylko fragment - λ-rachunek.

Dodatek: nieco więcej o λ-rachunku

Powiedzieliśmy, że aby zaimplementować w λ-rachunku działanie funkcji obliczalnej $f\colon \mathbf{N}^k \to \mathbf{N}$ należy wskazać λ-term F_f taki, że dla dowolnych liczb naturalnych $n_1, \ldots, n_k$ $F_f \underline{n}_1 \ldots \underline{n}_k \longrightarrow_\beta^* \underline{f(n_1, \ldots, n_k)}$ dokładnie wtedy, gdy wartość $f(n_1, \ldots, n_k)$ jest określona (str.137).

Jednak nic nie jest tu określone jednoznacznie:

- *β-redukcja nie jest procesem deterministycznym,*
- *numerały - λ-termy reprezentujące liczby naturalne - można definiować na różne sposoby*[113]
- *λ-term F_f - „program dla funkcji f" - można skonstruować na wiele sposobów.*

Jeśli można coś robić na wiele sposobów, to można to robić lepiej lub gorzej. Aby lepiej implementować funkcje obliczalne trzeba poznać możliwości λ-rachunku.

β-redukcja jest niedeterministyczna, bo może się zdarzyć (i zdarza się często), że w danym λ-termie można wskazać wiele *redeksów* - podtermów, do których można zastosować β-redukcję. Np. λ-term $\lambda x.((\lambda y.xy)z)w$ można jednokrokowo zredukować zarówno do $(\lambda x.\, xz)w$ jak i do $(\lambda y.\, wy)z$ bo są w nim dwa różne redeksy (wskaż je).
Przebieg obliczenia i jego rezultat zależy od *strategii wyboru redeksów*. Np. *strategia lewostronna* każe w każdym kroku redukcji wybierać redeks położony najbardziej na lewo (liczy się położenie pierwszego znaku redeksu). Ta strategia jest *normalizująca* - zapewnia zakończenie procesu β-redukcji λ-termu odnalezieniem jego postaci normalnej - o ile ona istnieje. Dlatego podstawowe twierdzenie o realizowalności obliczeń w λ-rachunku można uzupełnić zdaniem *„(...) gdzie redukcja $F_f \underline{n}_1 \ldots \underline{n}_k \longrightarrow_\beta^* \underline{f(n_1, \ldots, n_k)}$ realizowana jest zgodnie ze strategią lewostronną"*..

Aby przyspieszyć obliczenie można próbować zastosować redukcję równoległą. Np. w termie $((\lambda x.xt)N)(\lambda x.xs)M)$ są dwa rozłączne ,redeksy - $((\lambda x.xt)N)$ oraz $(\lambda x.xs)M)$ - i możemy je zredukować równocześnie (do termów Nt i Ms). To jest strategia *parallel outermost*.
Można też próbować skracać drogę redukcji wyrażenia do jego wartości-postaci normalnej. Wiado-

[112]Zwanego też *paradoksem Curry'ego*. Informacje o systemie Churcha czerpię z pracy [17] napisanej w 1937 roku w stylu, który wydaje się nieco archaiczny. Nie ukrywam, że nie jestem pewny iż właściwie ją zrozumiałem i czy mój (świadomie) uproszczony opis jest OK. Zainteresowanym polecam samodzielną lekturę [17] (sic!)
[113]Numerały Churcha to tylko jedna z tych możliwości.

mo, że proces lewostronnej β-redukcji dowolnego λ-termu dzieli się na dwie fazy:

- najpierw, tak długo jak to możliwe, wykorzystujemy tzw. *redeks czołowy (head redex)*,

- jeśli ta faza procesu jest skończona - otrzymamy term bez redeksu czołowego[114] - to w drugim etapie β-redukcji wykorzystujemy pozostałe redeksy.

Redeks czołowy w λ-termie - o ile istnieje - łatwo odnaleźć. Dlatego ta pierwsza faza β-redukcji jest „szybka". To stwarza pokusę, by inaczej zdefiniować wartość wyrażenia-λ-termu - uznać, że jest nią owa czołowa postać normalna[115].

Można też ograniczyć język modelowania redukcyjnych procesów obliczeniowych do tzw. $\lambda\mathbf{I}$-termów[116]. Mimo ograniczenia składni, podstawowe twierdzenie o λ-definiowalności funkcji obliczalnych pozostaje prawdziwe, choć oczywiście wymaga nowej definicji numerałów i odmiennej reprezentacji funkcji obliczalnych [5].

To z konieczności skrótowe (a z winy autora - chaotyczne) naszkicowanie problematyki badawczej związanej z λ-rachunkiem ma jedynie uświadomić, że istnieje matematyka poza teorią mnogości. I to nie jest matematyka peryferyjna. Wręcz przeciwnie, wraz z rozwojem technologii informatycznych taka matematyka nabiera coraz większego znaczenia.

10.6 Hipoteza Churcha i twierdzenie Tennenbauma

Obliczalność można definiować jeszcze inaczej, np. za pomocą *algrytmów Markowa*[117]. Ale skąd pewność, że tak różnie opisywana obliczalność wyróżnia funkcje, które „rzeczywiście są obliczalne"?

Nie można oczekiwać matematycznego rozstrzygnięcia tej kwestii. Wszak dopiero po przyjęciu jednej z proponowanych definicji, obliczalność staje się terminem matematycznym. Można tylko pokusić się o dowód, że te różne definicje obliczalności są *równoważne* - wskazują tę samą klasę funkcji. I to zrobiono.

Wielość i różnorodność równoważnych definicji obliczalności potwierdza, że nasze intuicje związane z obliczalnością ujmują istotę rzeczy. A skoro próby matematyzacji tego pojęcia dają zawsze ten sam rezultat, to możemy zaakceptować słynną *hipotezę Churcha*:

„każda definicja obliczalności respektująca podstawowe, „pozamatematyczne" ustalenia okaże się równoważna tym definicjom, które już znamy".

To piękne stwierdzenie wymaga jednak uzupełnienia. Otóż definicja Kleene'ego pozwala wyróżnić formalnie klasę funkcji obliczalnych w dowolnym modelu arytmetyki Peano. Wiemy, że takich, istotnie różnych, modeli jest wiele. Czy to oznacza, że jest też wiele różnych „obliczalności"?

Nic z tego. Mówi o tym niezwykłe *twierdzenie Tennenbauma* [40]:

„istnieje tylko jeden model arytmetyki Peano w którym dodawanie i mnożenie są obliczalne (w sensie Turinga)" .

Ten model to liczby naturalne rozumiane tak, jak chcą tego konstruktywiści - jako rekurencyjnie definiowany uniwersalny zbiór nazw.

> To bardzo ważne twierdzenie w kontekście dyskusji o podstawach matematyki. Mówi, że obliczalność nie jest pojęciem, które można jednoznacznie opisać w języku arytmetyki czy też w języku teorii mnogości.
>
> OBLICZALNOŚĆ JEST POJĘCIEM ABSOLUTNYM
>
> - w odróżnieniu od tych pojęć, które są definiowane w teorii mnogości i np. w geometrii.
>
> Matematyka tworzy języki opisujące nasze POSTRZEGANIE rzeczywistości. Czy to, że opisy stworzone w różnych językach są równoważne można uznać za dowód, że opisujemy rzeczywistość jaką ona JEST?

[114]Tzw. czołową postać normalną - *head normal form*.

[115]Nawiązuję tu do tzw. leniwej ewaluacji λ-termów [1].

[116]$\lambda\mathbf{I}$-termy tworzą podzbiór zbioru λ-termów, co jest skutkiem ograniczenia stosowania operatora abstrakcji $\lambda x.$ do termów zawierających wolną zmienną x.

[117]*https://www.encyclopediaofmath.org\index.php\ Normal_algorithm*

10.6.1 Obliczalność funkcji rzeczywistych

Jeśli rozumiemy obliczalność tak jak Turing, Kleene i Church, to zgodzimy się, że można mówić o obliczalności funkcji działających na liczbach całkowitych i wymiernych. Ale mówienie o obliczalności funkcji rzeczywistych, czyli typu $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, wydaje się pozbawione sensu - liczb rzeczywistych nie można ponumerować i kodować za pomocą słów[118]. A to jest warunek *sine qua non* obliczalności. Z drugiej strony nawet proste kalkulatory potrafią obliczać sinusy, cosinusy czy pierwiastki kwadratowe. Jak rozumieć taką „obliczalność”?

Funkcja ze zbioru A do B to - w teorii mnogości - podzbiór iloczynu kartezjańskiego $A \times B$ spełniający pewne warunki. Ta definicja jest, w kontekście rozważań o obliczalności, w sposób oczywisty nadmiarowa[119]. Ale to nam nie przeszkadza - my i tak interesujemy się tylko tymi funkcjami, którymi się interesujemy. Gdy mowa o funkcjach rzeczywistych, przedmiotem zainteresowania są głównie *funkcje ciągłe*.

Skorygujmy nieco nasze pytanie: jak rozumieć obliczalność funkcji ciągłych?
Już wiemy, że funkcja ciągła jest jednoznacznie wyznaczona przez swoje działanie na liczbach wymiernych. To podpowiada proste rozwiązanie:

„W analizie matematycznej, mając funkcję ciągłą f i liczbę rzeczywistą x, nie możemy bezpośrednio OBLICZYĆ $f(x)$. *Zamiast tego możemy przybliżyć $f(x)$, obliczając $f(x_0)$ dla jakiejś liczby wymiernej $f(x_0)$ wystarczająco bliskiej x. $f(x)$ można przyjąć jako rezultat nieskończonego ciągu obliczeń $(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_k), ...)$, gdzie odległość między x a x_k jest mniejsza niż $\frac{1}{k}$”* [120]. $f(x)$ to wielkość graniczna wyznaczona przez ten ciąg.
Jeśli tak, to możemy zaakceptować taką oto próbę definicji funkcji ciągłej obliczalnej:

funkcja ciągła $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ jest obliczalna, jeżeli istnieje funkcja obliczalna ϕ_f określona na liczbach wymiernych taka, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a i dowolnego ciągu wymiernego (a_n) aproksymującego a, ciąg $\phi_f(a_n)$ jest ciągiem przybliżeń $f(a)$.

Ale czy to zamyka problem?[121]

10.7 Złożoność obliczeniowa czyli o pragmatyce języka obliczeń

O złożoności obliczeń już wspominaliśmy. Pora nieco poukładać i ten temat.
Teoria obliczalności ujawniła fundamentalny podział zadań obliczeniowych na rozstrzygalne, sprawdzalne i nierozstrzygalne. Ale informacja, że dany problem jest rozstrzygalny to - z praktycznego punktu widzenia - trochę mało. Cóż nam po procedurze rozstrzygajacej, której realizacja jest niemiłosiernie długa?
Logika zdaniowa jest rozstrzygalna. Jednak aby wykazać, że zdanie zbudowane z n prostych zdań jest prawem logiki zdaniowej - jest prawdziwe przy każdym wartościowaniu zdań prostych w nim występujących - należy wykonać 2^n testów. Gdy w zdaniu są tylko trzy zdania proste wystarczy osiem testów, $8 = 2^3$. Gdy tych zdań jest dwadzieścia, to liczba testów wzrasta do 2^{20}, czyli trochę ponad milion. A liczba niezbędnych testów przy zdaniu złożonym ze stu zdań prostych - 2^{100} - jest

[118] Bo jest ich nieprzeliczalnie wiele.

[119] Twórcy teorii mnogości dbali, by definicje podstawowych pojęć - relacji, funkcji itp. - formułowane w języku tej teorii obejmowały wszystko, co w zastanej matematyce było postrzegane jako relacja czy funkcja: *„Althuogh a function is by definition a set of ordered pairs this is not usually a particular helpful way to think about functions. In set theory, it often is” [92].*

[120] *„A Logical Framework for Convergent Infinite Computations” (Wei Li, Shilong Ma, Yuefei Sui, and Ke Xu) - http://arxiv.org/abs/cs/0105020*

[121] Nasza propozycja grzeszy naiwnością. Odwołujemy się w niej do dowolnego ciągu liczb wymiernych aproksymującego argument - daną liczbę rzeczywistą a. Taki ciąg - funkcja z $\mathbf{N}$ do Q - może być obliczalna lub nie. Jeśli liczba a nie ma obliczalnej aproksymacji, to trudno mówić o obliczaniu wartości jakiejkolwiek funkcji w tym punkcie. Takie wątpliwości prowadzą do bardziej wyrafinowanych definicji obliczalności funkcji rzeczywistych. Np. takiej: *A partial function $f : Q \rightarrow \mathcal{R}$ is upper semicomputable (...) if there exists a computable function $\phi : Q \times \mathbb{N} \rightarrow Q$ (...) such that for all $x \in Q$: $\lim_{k\rightarrow\infty} \phi(x, k) = f(x)$ and $\forall k \in \mathbb{N} : \phi(x, k + 1) \leqslant \phi(x, k)$ [12].*

trudna do wyobrażenia...[122].

Efektywnością procesów obliczeniowych to domena *teorii złożoności*[123].
Jak mierzyć efektywność maszyn Turinga - procedur obliczeniowych? Intuicja podpowiada, że czas pracy maszyny Turinga - liczba pojedynczych kroków - jest zależna od wielkości danych - długości słowa zapisanego na taśmie w chwili rozpoczęcia pracy. Dlatego zgodzono się, by złożoność czasową maszyny T opisywać jako funkcję $time_T\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ taką, że $time_T(n)$ to maksymalna liczba kroków pracy jaką wykona maszyna T rozpoczynając pracę z zapisanym na taśmie jakimkolwiek słowem długości $\leqslant n$ [124].

Dla pragmatycznie usposobionych robotników informatyki pełna znajomość funkcji $time_T$ wcale nie jest najważniejsza. Oni chcą używać tych funkcji do PORÓWNAŃ efektywności różnych maszyn Turinga, różnych algorytmów.
Odpowiedzią na to zapotrzebowanie jest *skala złożności* obliczeń. Pomysł jest genialnie prosty: ustalmy pewien skończony zasób „wzorcowych" funkcji $s_m\colon \mathbf{N} \to \mathcal{R}\colon m = 1, 2, \ldots, k$. Powiemy, że

„maszyna T jest w klasie $O(s_m)$ gdy ciąg wartości $(time_T(n) : n \in N)$ wraz ze wzrostem n staje się coraz bliższy ciągowi liczb $(c \cdot s_m(n)\colon n = 1, 2, \ldots)$ gdzie c to pewna dodatnia stała"[125]

By taka skala złożoności była użyteczna, musi odwoływać się do powszechnie znanych funkcji. Dlatego osnową skali złożoności są nierówności które zna każdy absolwent szkoły podstawowej:

$$log_2 n < \ldots < n < \ldots < n^2 < n^3 < \ldots < 2^n < n! < n^n$$

które są prawdziwe dla prawie wszystkich liczb naturalnych.

Złożoność (czasowa) maszyny Turinga T jest logarytmiczna (odpowiednio: liniowa, wielomianowa, wykładnicza, ...) gdy T należy do klasy $O(log_2 n)$,(odpowiednio: $O(n)$, $O(n^m)$ dla pewnego $m \in N$, $O(2^n), \ldots$).[126]

Są tu ważne subtelności. Np. nawet tysiąckrotne (milionowe) zwielokrotnienie szybkości działania - zastąpienie maszyny T przez realizującą tę samą funkcję maszynę T_1 i taką, że $time_T(n) = 1000 \cdot time_{T_1}(n)$ - nie jest istotne dla oceny złożoności - te maszyny są w tej samej klasie złożoności. Podobnie nie jest istotne, czy czas pracy mierzymy liczbą pojdynczych kroków pracy maszyny czy w tysiącach takich kroków[127]. Dlatego tę definicję złożoności można stosować „w skali makro" - do dowolnych procedur: wystarczy ustalić, które operacje wykonywane w trakcie ich realizacji uznamy za elementarne i mierzyć czas ich liczbą. Np. oceniając złożoność algorytmów *sortowania list* przyjmujemy, że jest to porównanie sąsiednich elementów listy[128].

> Zastąpienie procedury inną, „liczącą to samo", lecz o mniejszej złożoności (w opisanej tu skali) jest zmianą jakościową - istotnie różną od zmiany wynikającej z zastąpienia komputera przez nowy, nawet tysiąckrotnie szybszy (i droższy) komputer. To jest istota zaproponowanej skali złożoności obliczeniowej.

Najbardziej efektywne są maszyny Turinga (procedury) o złożoności logarytmicznej czyli należące do klasy $O(log_2 n)$[129]. Procedury, których złożoność jest liniowa czy też wielomianowa są

---

[122]Gdyby w ciągu sekundy wykonywać milion testów, to realizacja tego algorytmu zajmie 40169423 miliardów lat! Przyznam - nie sprawdzałem tych rachunków. Napisałem to na podstawie danych zawartych w anonimowym opracowaniu dostępnym w internecie. Jeśli nawet pomyliłem się o 10 miliardów lat - who cares about?

[123]Odtąd, aż do końca podrozdziału rozważamy wyłącznie zawsze zatrzymujące się maszyny Turinga.

[124]Można też opisywać złożoność maszyny Turinga odwołując się do długości taśmy niezbędnej do wykonania obliczenia. To tzw. *złożoność pamięciowa*. Ale tu mówimy wyłącznie o *złożoności czasowej*.

[125]Inaczej mówiąc: maszyna T jest w klasie $O(s_m)$ gdy ciąg ułamków $(\frac{time_T(n)}{s_m(n)}\colon n = 1, 2, \ldots)$ ma skończoną i dodatnią granicę. Tak opisywaną złożoność nazywa się *złożonością asymptotyczną*.

[126]Wszystkie te definicje nie grzeszą precyzją, ale taką konwencję przyjęlismy w tym tekście... .

[127]*Twierdzenie o liniowym przyspieszaniu* mówi, że *„jeśli maszyna T o złożoności czasowej $time_T$ rozpoznaje język L, to ten sam język może być rozpoznany przez maszynę T_c o złożoności czasowej opisanej wzorem $time_{T_c}(n) = c \cdot time_T(n) + (1 + c)n$, gdzie $c > 0$".*

[128]Sortowanie listy to ustawienie jej elementów zgodnie z określonym *a priori* porządkiem liniowym, np. $[1, 3, 7, 2, 4] \rightsquigarrow [1, 2, 3, 4.7]$.

[129]Pomijam rzadko spotykane procedury, które bez względu na rozmiar danych wykonują tę samą liczbę operacji - np. procedura rozstrzygająca czy pierwszy element danej listy to 1.

„użyteczne w praktyce”[130]. Ale gdy złożoność maszyny jest wykładnicza to efektywność takiej maszyny (procedury) staje się mocno wątpliwa... .

Aby tę wątpliwość uzasadnić potrzebujemy dobrego przykładu.

„W świątyni Benares w Hanoi (...) jest płytka z brązu, na której umocowane są trzy diamentowe igły (...) . Na pierwszą z nich, w chwili stworzenia świata, Bóg nadział - 64 złote krążki z otworami (...), jeden na drugim, malejąco, od największego do najmniejszego. Odtąd bez przerwy, we dnie i w nocy, kapłani przenoszą krążki z pierwszej igły na trzecią przestrzegając niewzruszonych praw Brahma. Te prawa są proste: krążki przenosimy pojedynczo nigdy nie pozostawiając ich w innych miejscach niż nadziane na jedna z trzech igieł i nigdy, na żadnej z igieł, nie wolno położyć większego krążka na mniejszy. Kapłani skończą pracę, gdy przeniosą wszystkie krążki na trzecią igłę [131].

Przeniesienie $n+1$ krążków wymaga dwukrotnie więcej ruchów niż przeniesienie n krążków i jednego dodatkowego ruchu[132]. Stąd łatwo wyliczyć, że przeniesienie n krążków wymaga... $2^n - 1$ ruchów - złożoność tej procedury jest wykładnicza.
Kapłani mają przenieść 64 krążki, czyli muszą wykonać $2^{64} - 1$ pojedynczych przeniesień... - *„roughly 585 billion years to finish, which is about 42 times the current age of the Universe”*.

Umiemy też coś więcej niż tylko oceniać złożoność algorytmów. Potrafimy oszacować złożoność pewnych rozstrzygalnych problemów czyli wskazywać nieprzekraczalne „dolne ograniczenie” złożoności algorytmów je rozwiązujących[133] . Ciekawie robi się wtedy, gdy napotkamy na *lukę algorytmiczną* - gdy wyznaczone dolne ograniczenie złożoności problemu jest istotnie mniejsze od złożoności najlepszego aktualnie znanego algorytmu, który go rozwiązuje. Tak jest np. w przypadku *problemu minimalnego drzewa rozpinającego w grafie spójnym*[134]. Znamy tu algorytmy o złożoności wielomianowej i jednocześnie wiemy, że ograniczenie dolne jest nie większe niż liniowe. Jak dotąd nikt nie znalazł algorytmu o takiej złożoności. To jest wyzwanie: albo zrewidujemy znane dolne ograniczenie albo znajdziemy lepszy algorytm.

Innym wyzwaniem w teorii złożoności jest równość $P = NP$.
Czy w danym skończonym zbiorze liczb całkowitych $\{a_1, \ldots, a_n\}$ można wskazać taki podzbiór, że suma jego elementów jest równa zero? Ten problem jest oczywiście rozstrzygalny. Jednak „pesymistyczna złożoność” oczywistego algorytmu - *„sprawdź wszystkie możliwe podzbiory”* - ma złożoność wykładniczą (względem liczby elementów rozważanego zbioru). Czy istnieje algorytm rozwiązujący ten problem w czasie wielomianowym? Tego nie wiadomo.

Znalezienie rozwiązania wymaga zastosowania - zgodnie z dzisiejszą wiedzą - algorytmu wykładniczego. Natomiast *sprawdzenie*, czy rozwiązanie pozytywne dostarczone przez taki algorytm jest poprawne jest prostsze, bo wymaga zastosowania algorytmu o złożoności wielomianowej (a nawet liniowej). To oznacza, że nasz problem należy do klasy NP. Ale, jak powiedzieliśmy, nie wiemy, czy należy też do węższej klasy P problemów rozstrzygalnych w czasie wielomianowym.
Więcej: choć brzmi to nieprawdopodobnie, NIE WIADOMO czy istnieje jakikolwiek problem należący do klasy NP, który nie należy do klasy P - nie wiadomo czy prawdziwa jest równość $P = NP$!

Wskazanie problemu który pozwoli zanegować tę równość (lub udowodnienie, że takowego brak) to jeden z tzw. *problemów milenijnych* za którego rozwiązanie którego można otrzymać okrągły milion dolarów. Do pracy, junacy!

---

[130]Problem przynależności słowa do języka regularnego (str. 24, 117) ma *złożoność liniową* . A *algorytm Erley'a* dla języków bezkontekstowych ma *złożoność wielomianową*.

[131]http://www.math.edu.pl/wieza-hanoi. To legenda. Tak naprawdę tę opowiastkę wymyślił francuski matematyk F.Lucas (1883)

[132]Procedurę przenoszenia można opisać rekurencyjnie tak: aby przenieść $n+1$ krążków z I do III należy: 1. przenieść n krążków (leżących na największym, $(n+1)$-szym) z igły I do II korzystając z igły III, 2. przenieść największy krążek z I na III,3. przenieść n krążków z igły II do III korzystając z igły I .

[133]Algorytmy rozwiązujące dany problm mogą być różne - lepsze lub gorsze, czyli o różnej złożoności.

[134]Drzewo rozpinające grafu G, to podgraf spójny bez cykli, w którym są wszystkie wierzchołki grafu G. Gdy krawędziom grafu przypisano długości, to minimalne drzewo rozpinające to te, w którym suma długości krawędzi jest minimalna.

> Czy „digitalizacja" pozwalająca już dziś liczbowo kodować niemal wszystko i stworzać wirtualny świat to renesans pitagoreizmu?[135]Tak można myśleć, gdy pomija się problem złożoności obliczeń. Albo gdy się uzna, że „boskość" polega na przekraczaniu ograniczeń stąd wynikających.

10.7.1 Algorytmy kwantowe - krótko

Czy hipotezę Churcha można podważać? Czy udowodniona złożoność pewnych problemów to rzeczywiście nieprzekraczalne ograniczenie poszukiwań efektywnych procedur? Uzasadnieniem tych wątpliwości jest, dla wielu, pojawienie się *algorytmów i komputerów kwantowych.*
W 1985 roku David Deutsch rozważał teoretyczny model komputera kwantowego i sugerował, że może on efektywnie obliczać problemy, które nie są obliczalne przez tradycyjny komputer. Pojęciowo możliwe jest, że przynajmniej dla pewnych problemów, komputer kwantowy wykracza poza maszyny Turinga. Idea ta spotkała się z szerszym zainteresowaniem, gdy w 1994 r. P. Shor odkrył nowy kwantowy algorytm faktoryzacji dużych liczb, działający w czasie wielomianowym [86].

Przyjrzyjmy się bliżej temu algorytmowi. Jego działanie prowadzi do wskazania nietrywialnego dzielnika dowolnie wybranej liczby naturalnej n[136]. Opiszemy go tak:

1. Wybierz dowolną liczbę $a \leqslant n$ i znajdź $nwd(a,n)$ - największy wspólny dzielnik liczb n i a[137],

- jeśli $nwd(a,n) \neq 1$ to ta liczba jest szukanym nietrywialnym dzielnikiem n - algorytm kończy pracę,

- jeśli $nwd(a,n) = 1$ to przejdź do

2. Znajdź najmniejszą liczbę r taką, że $a^r - 1$ dzieli się przez n (taka liczba zawsze istnieje),

- jeśli liczba r jest parzysta - $r = 2k$ i n nie dzieli $a^k + 1$ to nietrywialnym dzielnikiem n jest $nwd(n, a^k - 1)$,

- w przeciwnym wypadku - gdy r jest liczba nieparzystą lub n dzieli $a^k + 1$ - zastąp a inną liczbą $a_1 \leqslant n$ i ponów poszukiwania - wróć do 1. [138]

Wygląda to zachęcająco, ale tak naprawdę to pasuje tu powiedzenie o zamianie siekierki na kijek: znalezienie liczby r wykorzystywanej w tym algorytmie jest równie skomplikowane jak zadanie pierwotne - znalezienie dzielnika liczby n. Istotą pomysłu Shora jest wykorzystanie do poszukiwania tej liczby komputera kwantowego.

Spróbujmy to wyjaśnić: najmniejsza „porcja informacji" w klasycznej teorii obliczalności to 0 lub 1 - *bit*[139]. Litery 0 i 1 - (rozróżnialnymi) stanami bitu. Realizacja algorytmu na „najniższym możliwym poziomie" to sekwencja operacji boolowskich - funkcji postaci $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ [140].

Jeśli zechcemy zmaterializować zamysł Turinga - zbudować komputer - musimy zadbać o to, by miał on w sobie medium zdolne reprezentować bit informacji - „coś", co może znajdować się w dwóch rozróżnialnych stanach. Może to być np. tranzystor (stanami są tu dwa, rozróżnialne technicznie, poziomy napięcia elektrycznego). Problem w tym, że każdy proces obliczeniowy angażuje ogromnie wiele bitów. Dlatego miniaturyzacja mediów reprezentujących bity jest jednym z najistotniejszych mierników postępu technologicznego.

W obliczeniach kwantowych odpowiednikiem bitu jest *kubit* - wektor jednostkowy w dwuwymiarowej zespolonej przestrzeni Hilberta. Realizacja algorytmu to sekwencja przekształceń unitarnych

[135] *„Przypatrz się pięknu kształtnego ciała - widzisz liczby w przestrzeni"* - św. Augustyn (o którym na jednej ze stron internetowych napisano, że „(w młodości) lubił zabawę, przepadał za rozrywkami, gustował także w kobietach pięknych"..., (https://zyciorysy.info/sw-augustyn/)

[136] O ile istnieje. Procedura znajdowania tego dzielnika to „bottleneck" (wąskie gardło) algorytmów rozkładu liczb naturalnej na iloczyn liczb pierwszych. Znane algorytmy faktoryzacji mają (czasową) złożoność wykładniczą i dlatego rozkład na liczby pierwsze jest powszechnie stosowanym zabezpieczeniem kryptograficznym (np. w systemie RSA).

[137] Można tu skorzystać z prostego *algorytmu Euklidesa.*

[138] Zainteresowani szczegółami znajdą opis algorytmu Shora w wikipedii.

[139] bit = BInary digiT (cyfra systemu dwójkowego).

[140] Termin „komputer" w tym kontekście to nie maszyna Turinga ale *model von Neumanna* (poszukaj w internecie hasła „architektura von Neumanna").

tej przestrzeni. Tyle matematyka[141]. Ale zaryzykuję i spróbuję powiedzieć coś o „fizycznej” realizacji komputera kwantowego.
Kubit w takim komputerze jest reprezentowany przez pewien obiekt świata kwantowego.Medium reprezentującym kubit może być np. *stan spinowy* elektronu. Takich stanów jest nieskończenie wiele ale tylko dwa spośród nich są tzw. *stanami własnymi*: inne stany są *superpozycjami* tych dwóch stanów własnych. Ta wielość stanów sprawia, że kubit może przechować znacznie większą porcję informacji niż bit.

Kwantowa implementacja algorytmu to manipulacja stanami wielu kubitów w „zaplanowany” sposób. Taka manipulacja jest czymś więcej niż pojedyncze działanie funkcji boolowskiej na bitach[142]. Te odmienności pozwalają uwierzyć, że komputer kwantowy może „liczyć szybciej” a korzystając z matematyki możemy tę wiarę zastąpić dowodem. Problem w tym, że rezultat pojedynczego obliczenia nie jest pewny. Po pierwsze, nie możemy zaobserwować stanu kubitu w momencie zakończenia obliczenia a jedynie jeden z jego dwóch stanów własnych. Obserwowalny wynik obliczenia („umieszczony” w wielu kubitach) jest ciągiem stanów własnych. Co gorsza, powtarzając obliczenie możemy w ten sposób „zobaczyć” zupełnie inny wynik. To są nieubłagane konsekwencje praw mechaniki kwantowej. Ale można przecież wielokrotnie powtórzyć obliczenie. Przy odpowiedniej liczbie powtórzeń, średnia wartość tych obliczeń jest - z dużą dokładnością - prawidłowym wynikiem. Obliczenia kwantowe są niewspółmiernie szybsze od klasycznych więc powtarzanie obliczeń nie jest tu istotną przeszkodą[143].

Istotą pomysłu Shora jest to, że - w odróżnieniu od procedury poszukiwania dzielnika liczby n - procedurę znajdowania liczby r można - w teorii! - „implementować kwantowo”. Tak implementowany algorytm Shora (podobnie jak inne algorytmy kwantowe) jest probabilistyczny: nie możemy być pewni, że wynik obliczenia jest prawidłowy. Twierdzenie, że jakoby następuje tu zanegowanie hipotezy Churcha jest bezpodstawne. Ale - być może - jest to przyczynek do rewizji wyobrażeń o obliczalności. Może normą są algorytmy probablistyczne a algorytmy deterministyczne są jedynie szczególnym (szczęśliwym) wyjątkiem? To, że nie otrzymujemy pewnej odpowiedzi nie oznacza, że taki algorytm jest bezużyteczny: można przecież sprawdzić, czy rozwiązanie wskazane przez komputer jest prawidłowe (co jest łatwiejsze niż znalezienie rozwiązania).

Dlaczego powszechnie nie używamy komputerów kwantowych? Zbudowanie „dużego” komputera kwantowego - z dużą liczbą kubitów - napotyka na wiele naprawdę poważnych trudności technicznych. Taka odpowiedź daje jednak nadzieję, że jeśli nie dziś, to jutro będzie to możliwe. Ale jest jeszcze inna fundamentalna trudność. Można zapytać: dlaczego w algorytmie Shora „kwantujemy” jedynie procedurę poszukiwania liczby r a nie cały algorytm? Odpowiedź jest prosta - bo nie umiemy. Tak naprawdę to nie wiemy (ja nie wiem) jakie zadanie obliczeniowe można „skwantować” zmniejszając przy tym złożoność obliczeń (co usprawiedliwi trud i koszt budowy odpowiedniego komputera kwantowego).

10.8 Liczba Ω Chaitina

Liczba Ω Chaitina to jedno z niewielu pojęć współczesnej matematyki, które może pochwalić się zainteresowaniem mediów jako „coś” niesłychanie tajemniczego i ważnego, bo wskazującego granice naszego poznania[144].
Spróbujmy opowiedzieć o liczbie Ω we właściwej kolejności. Czyli najpierw o faktach.
Nie potrafimy rozstrzygnąć, czy dla dowolnie (losowo) wybranego słowa binarnego w maszyna

[141]Przestrzenie Hilberta, przekształcenia unitarne i hermitowskie to podstawowe pojęcia matematyki mechaniki kwantowej.
[142]Przykładem przekształcenia unitarnego które wykorzystuje się w tych manipulacjach jest *przekształcenie Hadamarda* reprezentowane przez macierz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.
[143]Proszę tego barbarzyńsko krótkigo opisu nie traktować jako wyjaśnienia istoty obliczeń kwantowych. To zaledwie zarys problemu, wskazówka, czego trzeba się nauczyć, by podjąć próbę zrozumienia obliczeń kwantowych.
[144]Patrz np. *http://www.wykop.pl/ramka/489991/liczba-omega-metafizyka-matematyki-gregory-chaitina*

uniwersalna U zatrzyma się startując ze słowem w zapisanym na taśmie. To konsekwencja nierozstrzygalności problemu stopu. Ale możemy pytać o *prawdopodobieństwo* zatrzymania maszyny U dla losowo wybranego słowa w. To prawdopodobieństwo opisuje *liczba* Ω *Chaitina*.
Do zdefiniowania tej liczby posłużyło pewne twierdzenie związane z *językami bezprefiksowymi*: *język* $J \subseteq \{0,1\}^*$ *jest bezprefiksowy, gdy nie zdarza się, że wraz ze słowem* w*, język* J *zawiera jakiekolwiek słowo postaci* wv *, które jest od niego istotnie dłuższe.*
Twierdzenie, o którym mowa, brzmi tak:

„dla dowolnego języka bezprefiksowego L*:*

$$(*) \qquad \sum_{w \in L} 2^{-|w|} \leqslant 1$$

($|w|$ *to długość słowa* w*).* Dowód jest dość prosty. Rozważmy, na początek, skończony bezprefiksowy język $L_0 = \{w_1, \ldots, w_m\}$. Niech $n = max\{|w_i| : w_i \in L\}$. Zbudujmy pełne drzewo binarne wysokości n (str. 57). Gałąź tego drzewa (czyli ścieżka od korzenia do „liścia”) *reprezentuje słowo* w_i jeżeli w_i jest początkowym podsłowem słowa utworzonego z etykiet wierzchołków tej gałęzi. Bezprefiksowość języka L_0 sprawia, że każda gałąź reprezentuje co najwyżej jedno słowo tego języka. Każde słowo w_i ma dokładnie $2^{n-|w_i|}$ reprezentujących je gałęzi. Stąd:

$$\sum_{i=1}^{m} 2^{(n-|w_i|)} \leqslant 2^n$$

gdyż to drzewo ma 2^n gałęzi. Dzieląc obie strony nierówności przez 2^n, otrzymamy *nierówność Krafta*: *dla dowolnego skończonego zbioru słów* $w_1 \ldots, w_m$ *języka bezprefiksowego* L*:*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^{|w_i|}} \leqslant 1$$

Nierówność $(*)$ to konsekwencja tej obserwacji - wszak nieskończony język jest wielkością graniczną dla swoich coraz to większych, skończonych fragmentów.

> Dla skończonego języka L_0 liczba $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^{|w_i|}}$ opisuje stosunek liczby gałęzi reprezentujących słowa tego języka do liczby wszystkich gałęzi w pełnym binarnym drzewie o wysokości n. Ta liczba to prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrane słowo początkowe należy do języka L_0.
> To pozwala uwierzyć, że dla nieskończonego języka bezprefiksowego L liczba $\sum_{w \in L} 2^{-|w|}$ to prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrane słowo binarne w należy do L [145].

Rozważmy teraz szczególny rozstrzygalny język bezprefiksowy:

$$P = \{0^{|w|}1w : w \in \{0,1\}^*\} \qquad\qquad (0^n \text{ to słowo złożone z } n \text{ zer})$$

i maszynę Turinga T_p, taką, że $T_p(v) = w$ gdy $v = 0^{|w|}1w \in P$ i która nie kończy pracy w przeciwnym przypadku.
Niech UT_p będzie sekwencyjnym złożeniem uniwersalnej maszyny Turinga U i maszyny T_p [146].

Język L_p złożony ze słów akceptowanych przez maszynę UT_p jest bezprefiksowy (gdyż $L_p \subset P$). I to on służy do zdefiniowania *liczby Chaitina* Ω:

$$\Omega = \sum_{w \in L_p} 2^{-|w|}$$

[145] Więcej nauki, mniej wiary: zbiór nieskończonych ciągów binarnych można uczynić *przestrzenią mierzalną (probablistyczną)*, wyróżniając σ-algebrę zbiorów - *zdarzeń losowych*- wraz z *miarą* - funkcją przyporządkowującą tym zdarzeniom wartości z przedziału $[0,1]$ (ich prawdopodobieństwa). Ta miara musi spełnić pewne (oczywiste) warunki, (zwane *aksjomatami Kołmogorova)*.... Każde skończone słowo binarne w wyznacza w tej przestrzeni zdarzenie losowe - zbiór nieskończonych ciągów, które rozpoczynają się od w . Temu zdarzeniu przypisujemy miarę $2^{-|w|}$ [12].

[146] Ta maszyna działa tak: dla danego słowa v najpierw oblicza $T_p(v)$ a gdy to obliczenie jest skończone i daje jako wynik słowo w, to rozpoczyna się obliczenie $U(w)$).

Oczywiście $\Omega < 1$. Stąd
- *liczba* Ω *to prawdopodobieństwo przynależności losowo wybranego słowa do języka akceptowanego przez maszynę* UT_p.
Łatwo sprawdzić, że słowo v jest akceptowane przez maszynę UT_p dokładnie wtedy, gdy $v = 0^{|w|}1w$ i proces przekształcania słowa w przez maszynę uniwersalną U jest skończony. Zatem:

„liczba Ω *to prawdopodobieństwo zatrzymania maszyny uniwersalnej* U *dla losowo wybranego słowa binarnego".*

Pięknie. Ale to, co w liczbie Ω jest najbardziej fascynujące to fakt udowodniony przez Chaitina:

„liczba Ω *jest nieobliczalna (nie jest obliczalna)".*

> Liczba π jest rzeczywistą liczbą niewymierną, ale jest obliczalna: można wyznaczyć dowolnie długi odcinek początkowy jej rozwinięcia dziesiętnego (binarnego) korzystając choćby ze wzoru Leibniza:
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$
>
> Nieobliczalność liczby Ω oznacza, że nie ma procedury pozwalającej wyliczyć dowolnie długi odcinek początkowy jej binarnego rozwinięcia[147].

Skąd to wiemy? Jak zwykle w takich sytuacjach - gdy teza jest „negtywna" - poszukamy sprzeczności: pokażemy, że istnienie takiej procedury rozstrzygałoby problem stopu dla uniwersalnej maszyny Turinga (co jest niemożliwe).

Przyjmijmy, że znamy taką procedurę *Chat*. Wykorzystamy ją do budowy procedury rozstrzygającej czy maszyna UT_p akceptuje dane słowo v (co prowadzi do absurdalnej konkluzji - wskazania procedury rozstrzygającej problem stopu dla maszyny uniwersalnej U).
Załóżmy, że $|v| = n$. Korzystając z procedury *Chat* generujemy odcinek początkowy binarnego rozwinięcia liczby Ω długości $n:\ 0.\omega_1\omega_2\omega_3 \dots \omega_n$.
Przygotujmy też licznik Li i nadajmy mu początkową wartość 0.
Słowa binarne można ustawić w kolejkę: $0, 00, 01, 10, 11, 000, \dots$. Korzystając z tego uporządkowania ustawmy w kolejkę wszystkie pary (w, m), gdzie $w \in \{0,1\}^*, m \in \mathbf{N}$[148]. Potem po kolei - dla każdej pary (w, m) - rozstrzygamy, czy maszyna UT_p przekształcając słowo w, zatrzyma się po m krokach - „akceptuje w w m krokach". Jeżeli tak, to do licznika dodajemy wartość $2^{-|w|}$, a słowo w zapamiętujemy (w „schowku"). Jeśli nie, to testujemy kolejną parę.
Pracujemy tak długo, aż wartość licznika stanie się większa od $0.\omega_1\omega_2\omega_3 \dots \omega_n$[149]. Jeśli w tym momencie w schowku jest słowo v to znaczy, że maszyna UT_p je akceptuje. Jeśli nie, to mamy pewność, że... nigdy go nie zaakceptuje! Dlaczego? Bo akceptacja słowa długości n musiałaby zmienić jedną z pierwszych n liczb binarnego rozwinięcia liczby Ω. Sprzeczność!

Liczb nieobliczalnych jest nieprzeliczalnie wiele. Ale Ω jest jedną z nielicznych, które znamy[150].

> Jeśli Ω jest nieobliczalna, to czy jest sens pytać o obliczalność funkcji ciągłej f na takim argumencie? A może liczby rzeczywiste obliczalne to konstruktywna wersja ciała liczb rzeczywistych?[151]

Więcej o liczbie Ω

Skąd ta fascynacja liczbą Ω? Najchętniej odesłałbym do artykułu Chaitina *„The limits of Re-*

[147] To nie wyklucza możliwości obliczenia konkretnej ilości liczb początkowych tego rozwinięcia. *Liczba rzeczywista a jest obliczalna, jeżeli istnieje algorytm (maszyna Turinga) która dla dowolnej liczby naturalnej n obliczna n-tą cyfrę rozwinięcia dziesiętnego liczby a.* Rzeczywistych liczb obliczalnych jest „tylko" przeliczalnie wiele.

[148] Podobnie jak kolejkujemy pary liczb naturalnych - „przekątniowo".

[149] To się musi zdarzyć - wartość licznika rośnie w czasie testowania par (w, m) coraz lepiej aproksymując liczbę Ω.

[150] Taką liczbę powiązaną wprost z nierozstrzygalnością problemu stopu wskazał też Turing. Ale Ω jest „ładniejsza".

[151] Obliczalne liczby rzeczywiste tworzą ciało, które ma takie same własności pierwszorzędowe jak dedekindowskie ciało liczb rzeczywistych. Zainteresowanym podpowiem hasło *constructive analysis - (https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/ Constructive_analysis).*

ason"[152] co zapewne odebrano by jako przyznanie się do porażki. To nie jest odległe od prawdy - nie wiem, czy stać mnie na coś więcej niż powtórzenie tez tego artykułu. Ale spróbuję.

Chaitin włączył liczbę Ω do dyskusji o relacji między „faktem" a opisującym ten fakt „prawem naukowym" przywołując klasyczną tezę Leibniza: *„teoria musi być prostsza niż dane, które objaśnia, inaczej niczego nie wyjaśnia."*

Dla Chaitina miarą prostoty jest złożoność Kołmogorova (str. 120): *„Alghoritmic information (...) is defined by asking what size of computer program is necessary to generate the data"...* W [15] tłumaczy to tak[153]*: „obserwator co sekundę rejestruje jeden z dwóch faktów - np. „obiekt świeci" lub „obiekt nie świeci". Efekt tej obserwacji można zapisać w postaci ciągu binarnego (który (...) jest potencjalnie nieskończony). Naukowiec analizuje ten ciąg doszukując się prawidłowości w jego budowie. Ale co to znaczy? Można się zgodzić, że ciąg jest chaotyczny („patternless") jeżeli nie ma lepszego sposobu jego wyliczenia niż jego wypisanie.*

To nie jest satysfakcjonujące z „naukowego punktu widzenia". Jeśli jednak naukowiec jest w stanie wskazać metodę pozwalającą użyć programu do wygenerowania tego ciągu i ten program jest relatywnie krótszy od niego, to jesteśmy zgodni uznać, że ów ciąg nie jest „patternless".

Jest daleko idąca analogia między tym przykładem a tym, jak naukowcy myślą naprawdę. Np. teoria oparta o skromną liczbę faktów (aksjomatów) jest lepsza (łatwiej akceptowalna jako prawdziwa) niż ta, która ma ich ogromnie wiele.

Czytajmy dalej: *„An infinite number of bits of Ω constitute mathematical facts (...) that cannot be derived from any principles simpler than the string of bits itself".* Z dowodu Chaitina wynika, że znając n początkowych liczb rozwinięcia binarnego liczby Ω można zbudować procedurę rozstrzygającą problem stopu dla programów długości n. Ale taka procedura nie daje podstaw do skonstruowania procedury rozstrzygającej o zatrzymywaniu wszelkich programów! To, zdaniem Chaitina, upoważnia do stwierdzenia, że *„mając dowolny skończony zbiór aksjomatów, mamy nieskończoną liczbę prawd, których nie można udowodnić w tym systemie. Matematyka ma nieskończoną złożoność, podczas gdy każda pojedyncza teoria wszystkiego miałaby tylko skończoną złożoność i nie byłaby w stanie uchwycić całego bogactwa pełnego świata prawdy matematycznej."*

Liczba Ω przeczy istnieniu „teorii wszystkiego".

Można też szukać pozytywów: *„liczba Ω uosabia ogromną ilość mądrości (...) ponieważ pierwsze kilka tysięcy cyfr (jej rozwinięcia) które można zapisać na małym kawałku papieru, zawiera odpowiedzi na więcej matematycznych pytań niż można zapisać w całym wszechświecie"*[154].

Ale bez złudzeń: po pierwsze, jak dotąd znamy tylko kilkadziesiąt pierwszych liczb tego rozwiniecia. A po drugie *(...) even if we get, by some kind of miracle, the first 10,000 digits of Ω, the task of solving the problems whose answers are embodied in these bits is computable but unrealistically difficult: the time it takes to find all halting programs of length less than n from $0.\omega_1 \dots \omega_n$ grows faster than any computable function of n".*

> *„Sam niewiele z tego rozumiem – ale czasem, w chwilach intelektualnego wyżu, wszystko wydaje się jasne"* - przyznał Chaitin w jednym z wywiadów (dostępnym w internecie). Niech to szczere wyznanie będzie uprawiedliwieniem wszelkich niejasności naszej opowieści o liczbie Ω... .

[152]*Scientific American 294, No. 3 (March 2006), pp. 74-81, (http://www.cs.auckland. ac.nz/ chaitin/sciamer3.html)*
[153]W moim swobodnym tłumaczeniu
[154]Cytuję za: *C.S.Calude, M.J.Dinneen, Chi-Kou Shu, Computing a Glimpse of Randomness, Experimental Mathematics,Vol.11 (2002), No.3,*(internet).

10.8.1 Wielki Wybuch i Collapsing

Nad zrębem planety, pośród gwiezdnej nocy
szereg alefów w nieskończoność pełznie
i nieskończoność unieskończoniona
zawiera sama w sobie przez siebie zdradzona
kłęby, kłęby, kłęby tytanów
i rogate, i rogate widma (...)
lecz myśl ta czyja? samo się nie myśli
tak jak grzmi samo i samo się błyska [155]
punkt się sprężył w "n" wymiarów przestrzeń
i przestrzeń klapła jak przekłuty balon.

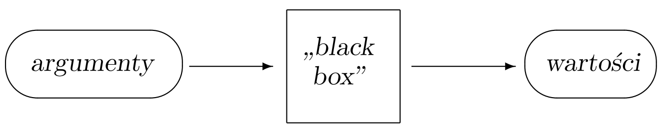
Świat matematyki obliczeń można opisać tak[156]:
- *jego obiektami są zbiory numerowane - pary* $(A, p_A \colon \mathbf{N} \to A)$, *gdzie* p_A *jest częściową funkcją „na" - elementy obiektów są ponumerowane, mają swoje nazwy.*
Morfizmy, czyli związki między takimi obiektami (A, p_A) i (B, p_B) to funkcje $f \colon A \to B$, które można *zrealizować* - można wskazać funkcję obliczalną $\phi \colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ taką, że $p_B \cdot \phi = f \cdot p_A$.

Elementy zbiorów numerowanych muszą być nazwane-ponumerowane. Funkcja między takimi zbiorami jest akceptowalna tylko wtedy, gdy towarzyszy jej procedura obliczania jej wartości (wykorzystająca tę numerację). Dlatego zbiory liczb całkowitych i wymiernych to nie tylko zbiory numerowane ale „struktury numerowane" gdyż za dodawaniem i mnożeniem tych liczb stoją znane wszystkim procedury obliczeniowe. Oczywiście zbiór liczb rzeczywistych $\mathcal{R}$ nie jest numerowany. Ale „strukturą numerowaną" jest też np. ciało $Q(\sqrt{2})$ którego elementami są liczby rzeczywiste postaci $a + b\sqrt{2}$ gdzie a i b to liczby wymierne[157]. „Matematyczny sens" tych napisów-liczb - ich niewymierność - nie jest tu żadną przeszkodą.

Zbiór liczb naturalnych i funkcje obliczalne to „jądro" tego świata. Kategoria zbiorów numerowanych to „powłoka".

Dzieło Hilberta i Cantora to matematyczny „Wielki Wybuch". Mówiąc obrazowo, obiekt matematyczny „urwał się z uwięzi" - z pary $(A, p_A \colon \mathbf{N} \to A)$ pozostał tylko zbiór A. Uwolnienie zbiorów od wymogu nazywania ich elementów i akceptacja „niekonstruktywnych konstruktorów" zbiorów wymusiło uznanie nieskończonej skali nieskończoności. Hilbertowska koncepcja istnienia zaludniła matematyczny świat abstrakcyjnymi obiektami - zbiorami nienazywalnych elementów. Ta matematyka, ten „raj Cantora", służy już nie tylko obliczeniom, ale *modelowaniu* rzeczywistości.

Różnicę między modelowaniem a obliczaniem widać wyraźnie, gdy popatrzymy jak traktuje się w obu matematykach funkcję. Teoria mnogości postrzega funkcję jako (specyficzną) relację między dwoma zbiorami. Proces przyporządkowywania argumentom ich wartości jest - dla matematyka teoriomnogościowego - niewidoczny, ukryty w czarnej skrzynce:



Jego uwagę zajmuje badanie zależności między argumentami i wartościami funkcji. Chcemy widzieć, czy funkcja rzeczywista jest, ciągła, różniczkowalna, rosnąca (malejąca), czy ma miejsca zerowe, czy jest bijekcją, itp., itd. Funkcje różniczkujemy, całkujemy, wskazujemy jej ekstrama. Te rachunki służą poznaniu *własności* funkcji a nie wnikają w proces obliczania jej wartości.

To jest matematyka modelowania.

Tymczasem u Turinga i Churcha przedmiotem badań jest PROCES obliczenia. Funkcja rozumiana teoriomnogościowo jest tu pojęciem pomocniczym, wykorzystywanym do opisu rezultatów procesu. Opis procesu to opis *zmienności* rzeczy. Rzecz to tylko chwilowy stan procesu. Ta sama rzecz może należeć do wielu procesów jednocześnie. To nie rzeczy, to procesy są wieczne. Wskazywanie początku czy końca procesu to zabieg sztuczny, związany li tylko z naszymi próbami ich badania.

[155] S.I. Witkiewicz (Witkacy)

[156] Wdrugiej części tych notatek zasmiast o „świecie" będziemy mówili o *kategorii* zbiorów numerowanych. Ale teraz jeszcze nie wiemy, co to kategoria. Użyte poniżej terminy „obiekt", „morfizm" należą o słownika tej teorii.

[157] Opisz system redukcji pozwalający na redukcyjne obliczanie sum i iloczynów w $Q(\sqrt{2})$.

Koncentracja uwagi matematyków XX wieku na modelowaniu była po części koniecznością, skutkiem uświadomienia sobie ograniczonych możliwości obliczeniowych jakimi wtedy dysponowano. Szaleńczy rozwój technologii komputerowych w ostatnim półwieczu zniósł te ograniczenia a rosnący zakres wspieranych techniką komputerową sprawił, że „efektywnosc obliczeń" przestała być tylko problemem teoretycznym. Funkcja ponownie stała się bardziej PROCESEM niż teoriomnogościową relacją „wejście-wyjście" między argumentem a wynikiem. Powszechne stało sie oczekiwanie, żematematycy przyjrzą się temu, co się dzieje w „czarnej skrzynce".
Zaryzykuję twierdzenie, że na przełomie XX i XXI wieku obserwujemy w matematyce narodziny trendu, który można określić jako „matematyczny collapsing"[158]. Objawia się to ciągle zwiększającym się zainteresowaniem międzynarodowej społeczności matematyków problemami związanymi z procesem obliczania[159].

To nie znaczy, że jest jakakolwiek opozycja między liczeniem a modelowaniem. Liczenie musi czemuś służyć. Jest warte trudu gdy „ma sens"[160].

> Człowiek potrzebuje komputera by sprawnie liczyć.
> Komputer potrzebuje kogoś, kto go sensownie użyje.

Zamiast puenty: nieco bardziej wyrafinowany Lem

Czy Pan wie, że matematycy do udowodnienia, iż każdy niepusty podzbiór liczb naturalnych ma element najmniejszy, potrzebują wyrafinowanej formy matematycznej indukcji? Pan się bawi i ja się bawię...". Lem tego nie powiedział, a mógłby. Bo przecież normalny człowiek zaakceptuje (lub sam wymyśli) prostą procedurę odnajdywania najmniejszego elementu w niepustym zbiorze $A \subseteq \mathbf{N}$:

1. Przyjmijmy $k = 0$,
2. Rozstrzygnijmy, czy $k \in A$. Jeśli tak, to k jest poszukiwaną najmniejszą liczbą w A. Jeśli nie, przejdź do 3,
3. Przyjmijmy $k := k + 1$ i wróćmy do 2.

Ale ta procedura ma sens tylko dla konstruktywnie rozumianych liczb naturalnych i przy założeniu, że A to podzbiór rozstrzygalny! Chcąc udowodnić to twierdzenie dla dowolnego podzbioru liczb naturalnych - definiowanych teoriomnogościowo - musimy sięgnąć po inne środki. Tylko ... czy to interesuje kogokolwiek poza matematykami? Cóż nam po informacji, że zbiór A ma element najmniejszy, skoro nie potrafimy rozstrzygać, czy dana liczba naturalna do niego należy?

---

[158]Słowo „collapsing" ma wiele znaczeń w większości o pejoratywnym zabarwieniu (krach, upadek, załamanie, OKLAPNIĘCIE). Nie o to tu chodzi. Używam tego terminu w znaczeniu jakie nadali mu autorzy hipotez dotyczących przyszłości - collapsing to odwrócenie procesu Wielkiego Wybuchu - wszechświat zapada się do stanu o skrajnie wysokiej gęstości.

[159]Towarzyszy temu polityka wielu państw i międzynarodowych korporacji, polegająca na finansowym wspieraniu takich badań.

[160]„Przedgrecka" matematyka Egiptu i Babilonu była matematyką obliczeń. O współistnieniu dwóch matematycznych strumieni - cytując P.Henrici'ego i nazywając te strumienie *algorytmicznym* i *dialektycznym* - napisano w [22] tak: *„Matematyka dialektyczna jest nauką ściśle logiczną, gdzie zdania są prawdziwe lub fałszywe a obiekty o zadanych własnościach istnieją albo nie. Matematyka algorytmiczna jest narzędziem rozwiązywania zagadnień (...). Matematyka dialektyczna skłania do kontemplacji, algorytmiczna do działania. Ta pierwsza rodzi zrozumienie, ta druga - wyniki.*

Rozdział 11

Twierdzenia Gödla

Czy rozwiązywalność każdego problemu jest szczególną cechą samej myśli matematycznej, czy też może jest to ogólne prawo nieodłącznie związane z naturą umysłu, że na wszystkie pytania, które zadaje, musi dać się odpowiedzieć? - *D.Hilbert*[1]

Kurt Gödel (1906-1978) – genialny austriacki logik i matematyk. W 1931 roku w artykule *„Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. I"* sformułował twierdzenie „o niezupełności arytmetyki".
Gödel konsekwentnie przyznawał się do realizmu matematycznego: *„Obiekty i fakty matematyczne, lub* PRZYNAJMNIEJ COŚ Z NICH, *istnieją obiektywnie i niezależnie od naszych aktów mentalnych i decyzji (...) przedmioty i twierdzenia matematyki są tak samo obiektywne i niezależne od naszych wolnych wyborów i twórczych działań, jak to ma miejsce w świecie fizycznym."*[2]

Mniej znany jest fakt, że Gödel zajmował się też teorią względności, a jego bliskim przyjacielem w Princeton był Albert Einstein. Jak podaje Wikipedia, Gödel po emigracji do USA starał się o obywatelstwo amerykańskie. A to zależało m.in. od wyniku egzaminu ze znajomości konstytucji. Gödel, przygotowując się rzetelnie, odkrył, że jest ona wewnętrznie sprzeczna i miał zamiar to udowodnić przed komisją egzaminacyjną. Na szczęście jego przyjaciele na to nie pozwolili.

11.0.1 Niezupełność PA - pierwsze twierdzenie Gödla

Nasz wcześniejszy dowód twierdzenia Gödla przeprowadziliśmy przy założeniu, że formuły arytmetyczne mogą opisywać zbiory nierozstrzygalne. Teraz pokażemy, że to założenie było słuszne. Udowodnimy twierdzenie:

„Każda funkcja obliczalna $f\colon \mathbf{N}^k \longrightarrow \mathbf{N}$ jest arytmetyczna"
- można wskazać formułę arytmetyczną $\phi_f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})$ taką, że dla dowolnych liczb naturalnych $m_1, \ldots, m_k, n$:
formuła ϕ_f jest spełniona przy wartościowaniu $[x_1 := m_1, \ldots x_k := m_k, x_{k+1} := n]$ dokładnie wtedy, gdy $f(m_1, \ldots, m_k) = n$.

Dla dowolnego procesu obliczeniowego związana z nim relacja „wejście-wyjście" wiążąca dane i wynik jest opisywalna w języku arytmetyki.

To ważny wynik, bo z niego łatwo wynika to, co nas interesuje:

„każdy zbiór rekurencyjnie przeliczalny $A \subseteq \mathbf{N}^k$ jest arytmetyczny"
- można wskazać formułę arytmetyczną $\phi_A(x_1, \ldots, x_k)$ taką, że $(n_1, \ldots, n_k) \in A$ dokładnie wtedy, gdy formuła $\phi_A(x_1, \ldots, x_k)$ jest spełniona przy wartościowaniu $[x_1 := n_1, \ldots, x_k := n_k]$.

[1] Zdanie z wygłoszonego w 1900 roku paryskiego wykładu Hilberta w trakcie którego sformułował on 23 najważniejsze, jego zdaniem, wyzwania stojące przed matematyką XX wieku. ‘

[2] Cytuję za J. Golińską *„Matematyka według Gödla"* - artykuł odnaleziony w internecie.

Dowód tego twierdzenia jest żmudny i nudny. Ale jego fragment naprawdę warto przeanalizować - zobaczmy, jak sobie poradzono ze schematem rekursji.
Niech zatem $h\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ będzie funkcją taką, że:

- $h(0) = a$
- $h(succ(n)) = g(h(n), n)$

gdzie g jest funkcją arytmetyczną. A to oznacza mniej więcej tyle:

(*) $h(s) = w$ *wtw, gdy istnieją liczby naturalne* $k_0 = a, k_1, \ldots, k_s = w$ *takie, że* $k_{j+1} = g(j, k_j)$ *dla* $0 \leqslant j < s$.

Aby uzyskać oczekiwany rezultat, wystarczy tę równoważność zapisać jako formułę arytmetyczną. Zacznijmy naiwnie:

$$(h(s) = w) \Leftrightarrow \exists_{k_0} \exists_{k_1}, \ldots \exists_{k_s}\ k_0 = a \wedge (\forall_{j<s}\ k_{j+1} = g(k_j, j)) \wedge k_s = w)$$

Pozornie wszystko jest OK. Ale to nie jest formuła arytmetyczna - *zmienna* s nie może określać liczby kwantyfikatorów egzystencjalnych (po prawej stronie równoważności).
To można poprawić[3]. Z pomocą przychodzi tu słynna gödlowska „beta-funkcja" (która jest arytmetyczna):

$$\beta(m, n, j) = (m\ \mathbf{mod}\, (n(j+1) + 1))$$

Ta funkcja koduje skończone ciągi *dowolnej długości* za pomocą par liczb pozwalając jednocześnie odtworzyć pierwotny ciąg[4]. Równość $h(s) = w$ można teraz opisać tak:

$$(h(s) = w) \Leftrightarrow \exists_{n,k}\, (\, \beta(n, k, 0) = a \wedge (\forall_{0 \leqslant j < s}\, \beta(n, k, succ(j)) = g(\beta(n, k, j), j) \wedge \beta(n, k, s) = w))$$

Obecność zmiennej s „pod kwantyfikatorem" jest odtąd tylko skrótem redakcyjnym. Można go rozwinąć uzyskując formułę arytmetyczną w (prawie) krystalicznie czystej postaci... .

„Prawie", bo w formule po prawej stronie równoważności mamy pozaarytmetyczne symbole funkcyjne g i β. Ale można je zastąpić formułami arytmetycznymi - założyliśmy to o g i jest to oczywiste dla β. Teraz wystarczy przywołać tradycje benedyktyńskie i cierpliwie przepisać powyższą charakteryzację równości $h(s) = w$ w „czystym" języku arytmetyki:

$$\begin{aligned} h(s) = w \ \Leftrightarrow \quad & \exists_{n,k}\, (\phi_\beta(n, k, 0, a) \wedge \phi_\beta(n, k, s, w) \ \wedge \\ & \wedge\ \forall_{0 \leqslant j < s}\, \exists_{u,v}\, (\phi_\beta(n, k, succ(j), v) \wedge \phi_\beta(n, k, j, u) \wedge \phi_g(u, j, v)\ )). \end{aligned}$$

(gdzie formuły $(\phi_g(x, y, z)$ *i* $\phi_\beta(x, y, z, t)$ *opisują odpowiednio funkcję* g *i funkcję* β.*)*

A to oznacza, że funkcja h jest arytmetyczna!

Tyle o rekursji. I to jest krytyczny punkt dowodu. Reszta jest rutyną.

> Rzeczywiście, nudnawe... Dodajmy tylko małą uwagę: definicja funkcji β, przywołanej w krytycznym momencie dowodu, korzysta z obu działań - dodawania i mnożenia. Gdyby rozpatrywać słabsze arytmetyki - np. *arytmetykę Presburgera* w której nie ma mnożenia, to otrzymamy teorię rozstrzygalną - każdy zbiór opisywalny w tak zubożonej arytmetyce jest rozstrzygalny.
> A niektórzy sądzą, że mnożenie to tylko „skrócony zapis dodawania"...[5]

A teraz najważniejsze: jeśli formuła ϕ opisuje zbiór rekurencyjnie przeliczalny który nie jest rekurencyjny, to jego dopełnienie jest zbiorem, który nie jest rekurencyjnie przeliczalny. Ale jest arytmetyczny, bo opisany przez formułę $\neg\phi$! To chcieliśmy wiedzieć: istnieją formuły arytmetyczne opisujące zbiory, które nie są rekurencyjnie przeliczalne[6]. Konsekwentnie:

---

[3] I to jest krytyczny punkt dowodu...

[4] *Dla każdego skończonego ciągu* $k_0, \ldots, k_s$ *można wskazać parę* (n, m) *taką, że* $\beta(n, m, j) = k_j$ *dla* $j = 0, 1, 2 \ldots, s$" [76]. Np. dla ciągu $(2, 0, 1, 2)$ wystarczy przyjąć $m = 3$ i $n = 10$. Wzorca dla tego kodowania można doszukać się w słynnym „chińskim twierdzeniu o resztach".

[5] Formuły arytmetycznej $mn = k$ nie można zastąpić równoważną, w której użyto tylko dodawania.

[6] Zbiory arytmetyczne można też scharakteryzować jako te, które da się zbudować ze zbiorów rozstrzygalnych za pomocą operacji uzupełnienia zbioru i rzutowania.

Są takie formuły arytmetyczne, dla których nie ma procedury sprawdzającej ich spełnialność

Ponieważ już wiemy, że:

- *formuła* $\phi(x_1, \ldots, x_m)$ *jest spełniona w* $\mathbf{N}$ *przy wartościowaniu* $[x_1 := n_1, \ldots, x_m := n_m]$ *dokładnie wtedy, gdy zdanie* $\phi(succ^{n_1}(0), \ldots, succ^{n_m}(0))$ *jest prawdziwe w tym modelu,*
- *istnieje procedura sprawdzająca, czy zdanie posiada dowód w systemie* PA,

to po raz drugi - ale już bardziej świadomie - każdy może poczuć się (na chwilę) jak Gödel i sformułować olśniewający wniosek:

Istnieją zdania arytmetyczne prawdziwe w modelu standardowym, które nie posiadają dowodu w systemie PA.

11.0.2 Powrót do źródeł

(...) pomimo mojego wielkiego podziwu dla tego matematyka pierwszej wielkości, jakim był Hilbert, nigdy nie mogłem zrozumieć w jaki sposób uwierzył on, że maszyna mogłaby udzielić automatycznie odpowiedzi na wszystkie problemy diofantyny. Dlatego jestem bardzo zadowolony, że Matijasiewicz wykazał, iż było to niemożliwe...

J. Dieudonne [24]

Jak wspominałem, to Hilbert zainicjował badania nad obliczalnością, umieszczając w swoim programie tak sformułowany dziesiąty postulat:

„mając na uwadze dowolne równanie diofantyczne z dowolną liczbą niewiadomych i całkowitymi współczynnikami: opracować proces, zgodnie z którym można określić w skończonej liczbie operacji, czy równanie ma rozwiązanie całkowitoliczbowe [7]. Jeśli się w to wczytać to widać, że Hilbert był przekonany o rozstrzygalność problemu istnienia całkowitoliczbowych rozwiązań równań diofantycznych i oczekuje wskazania odpowiedniej procedury.

W 1972 roku (czterdzieści lat po wynikach Gödla) J. Matijasiewicz przedstawił negatywne rozwiązanie tego problemu. Uczynił to tak, że otworzył drogę do nowych, zaskakujących wyników.

Zacznijmy prościutko: z wielomianem $P(x, y) = 2x^2 - 3xy - 2y^2$ możemy związać zbiór $\{n \in \mathbf{N} : \mathbf{N} \models \exists_y\, 2n^2 - 3ny - 2y^2 = 0\}$. Wiemy już dość by się zgodzić, że jest to zbiór rekurencyjnie przeliczalny.
To z kolei pozwala wyobrazić sobie, jak można dowieść twierdzenia, że *„każdy zbiór diofantyczny - zbiór rozwiązań równania diofantycznego - jest rekurencyjnie przeliczalny”*.

Matyjasiewicz pokazał, że i odwrotna implikacja jest prawdziwa:

„każdy zbiór rekurencyjnie przeliczalny jest zbiorem diofantycznym”

- dla dowolnego zbioru rekurencynie przeliczalnego S *istnieje wielomian* $P_S(x, y_1, \ldots, y_k)$ *taki, że liczba naturalna* n *jest w zbiorze* S *dokładnie wtedy, gdy* $P_S(n, m_1, \ldots, m_k) = 0$ *dla pewnych liczb całkowitych* $m_1, \ldots, m_k$.

Skoro są zbiory rekurencyjnie przeliczalne które nie są rekurencyjne, to oczekiwanie Hilberta jest niemożliwe do spełnienia.

Jedną z najbardziej intrygujących konsekwencji wyniku Matijasiewicza można opisać tak: wiedząc tyle, ile wiemy, łatwo się zgodzimy, że wszystkie zbiory rekurencyjnie przeliczalne można efektywnie ponumerować. Trochę trudniej - nie widząc dowodu - przyjąć do wiadomości, że można tę numerację wybrać tak, że relacja *„n należy do rekurencyjnie przeliczalnego zbioru o numerze m”* jest rekurencyjnie przeliczalna. Ale tak jest.
Stąd - dzięki twierdzeniu Matijasiewicza - wynika, że istnieje .... *uniwersalne równanie diofantyczne* $U(x, y, z_1, \ldots, z_k) = 0$ - dowolną procedurę sprawdzającą można zastąpić pytaniem o istnienie rozwiązanie tego równania! Dokładniej:

[7] Równanie diofantyczne ma postać $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ gdzie f jest pewnym wielomianem ze współczynnikami całkowitymi. Diofantos z Aleksandrii, żył w III wieku naszej ery.

„liczba n należy do zbioru rekurencyjnie przeliczalnego o numerze m dokładnie wtedy, gdy istnieją liczby naturalne $m_1, \ldots, m_k$ takie, że:

$$U(n, m, m_1, \ldots, m_n) = 0$$

> Czy to kamień filozoficzny matematyki?[8] Bez szaleństw - to tylko odpowiednik uniwersalnej maszyny Turinga w języku równań diofantycznych.
> Z drugiej strony, skoro zbiór konsekwencji dowolnej pierwszorzędowej teorii jest rekurencyjnie przeliczalny, to z każdą taką teorią można związać pewne równania diofantyczne a dowodzenie twierdzeń zastąpić rozwiązywaniem takich równań. Czy to np. oznacza, że „stopień komplikacji" teorii można mierzyć za pomocą stopnia (liczby zmiennych) stowarzyszonego równania?
> Te są ważne pytania. Uświadamiają, co się kryje pod tak łatwo definiowanymi terminami jak „uniwersalne równanie diofantyczne" czy „uniwersalna maszyna Turinga".

Jak wygląda to uniwersalne równanie? Ile ma zmiennych, jaki stopień? Odsyłam do [37].

11.1 Zdanie gödlowskie G

Już dwukrotnie „udowodniliśmy" twierdzenie o istnieniu arytmetycznych zdań prawdziwych (w $\mathbf{N}$) ale niedowodliwych (w PA). Ale, pomijając dość enigmatyczne twierdzenie Parisa-Harringtona, nie wskazaliśmy żadnego takiego zdania. Spróbujmy wypełnić tę lukę.

> *Paradoks kłamcy* przyprawiał o ból głowy już antycznych Greków. Modyfikując nieco oryginalną wersję sformułujemy go tak: spróbujmy ocenić wartość logiczną zdania: `,,Zdanie, które teraz wypowiadam, jest fałszywe"`. Nie trzeba być przesadnie wnikliwym, by dostrzec, że jest ono prawdziwe dokładnie wtedy, gdy ... jest fałszywe.
> Przyczyna kłopotu w tym, że to zdanie orzeka samo o sobie. A jak głosi mądrość ludowa - „nie można być sędzią we własnej sprawie"[9].

Paradoks kłamcy każe unikać zdań orzekających o sobie samych. Wydaje się, że to proste[10]. Jednak tego założenia nie można utrzymać już w wypadku arytmetyki! A to dlatego, że FORMUŁY ARYTMETYCZNE MOŻNA EFEKTYWNIE PONUMEROWAĆ[11].
Ustalmy taką numerację i popatrzmy na (straszne) tego skutki. Przyjmijmy oznaczenia:

- *przez $\phi_n(x)$ oznaczamy formułę arytmetyczną (z jedną wolną zmienną) o numerze n,*
- *symbolem $num(\psi(x))$ oznaczamy numer formuły $\psi(x)$* [12]

> Z każdą formułą $\phi_n(x)$ można związać szczególne zdanie - $\phi_n(\underline{n})$. I to jest właśnie „zastosowanie formuły do samej siebie" w sformalizowanej postaci.

Dla dowolnej formuły $\psi(x)$ możemy teraz utworzyć nową formułę $\widehat{\psi}(y)$ która jest spełniona przy wartościowaniu $[y := n]$ gdy liczba n jest numerem pewnej formuły z jedną zmienną wolną, a zdanie $\psi(num(\phi_n(n))$ jest prawdziwe w modelu standardowym[13].
Formuła $\widehat{\psi}(y)$ ma swój numer: możemy więc skonstruować zdanie

$$G(\psi) \qquad \equiv \qquad \widehat{\psi}(num(\widehat{\psi}(y)))$$

i udowodnić kluczowy LEMAT O DIAGONALIZACJI:

[8] Kamień filozoficzny to substancja poszukiwana przez alchemików, pozwalająca na zamianę metali w złoto.

[9] To nie tylko mądrość ludowa. Tak uważali m.in. Poincare i Russell.

[10] L. Wittgenstein o paradoksie kłamcy pisał tak: *„Jest to jałowa sztuka! - jest to gra językowa (...). Podobne sprzeczności stają się interesujące tylko dlatego, że przysparzały ludziom udręki." (Uwagi o podstawach matematyki).*

[11] Bo jest to język rekurencyjny.

[12] Niestety, nie da się tu uniknąć zupełnie formalnych zapisów....Odtąd, w całym rozdziale, będę też pomijać „podkreślenia", pozostawiając domyślności czytelnika rozstrzygnięcie, czy n to liczba czy reprezentujący ją numerał.

[13] $\hat{\psi}(y) \equiv \exists_x\,(s(x,y) \wedge \psi(x))$ gdzie z kolei $s(x,y)$ to formułą arytmetyczna opisującą (częściowo rozstrzygalny) zbiór par (n,m) takich, że n to numerem formuły arytmetycznej o jednej zmiennej wolnej, a m jest numerem zdania $\phi_n(n)$.

„zdanie $G(\psi)$ jest prawdziwe w modelu standardowym dokładnie wtedy, gdy jego numer ma własność opisaną przez formułę $\psi(x)$: :

$$(*) \qquad \mathbf{N} \models G(\psi) \qquad \text{wtw} \qquad \mathbf{N} \models \psi(x)[[x := num(G(\psi))]$$

Zdanie $G(\psi)$ mówi samo o sobie... (widzisz to?).

Popatrzmy co z tego wyniknie, gdy umiejętnie dobierzemy formułę $\psi(x)$:

Przykład I. Przypuśćmy, że *„prawda jest definiowalna w arytmetyce”* - istnieje formuła arytmetyczna $true(x)$ taka, że: *zdanie ϕ jest prawdziwe (w modelu standardowym) dokładnie wtedy, gdy zdanie $true(num(\phi))$ jest prawdziwe:*

$$(**) \qquad \mathbf{N} \models \phi \qquad \text{wtw} \qquad \mathbf{N} \models true(num(\phi))$$

Wstawmy zaprzeczenie - formułę $\neg true(x)$ - do równoważności $(*)$ w miejsce formuły ψ:

$$\mathbf{N} \models G(\neg true(x)) \qquad \text{wtw} \qquad \mathbf{N} \models \neg true(num(G(\neg true(x))))$$

i wykorzystajmy równoważność $(**)$ dla zdania $G(\neg true(x))$:

$$\mathbf{N} \models G(\neg true(x)) \qquad \text{wtw} \qquad \mathbf{N} \models true(num(G(\neg true(x)))$$

Lewe strony obu równoważności są równe, więc prawe są równoważne! A to znaczy, że:

zdanie $G(\neg true(x))$ jest prawdziwe w modelu standardowym
wtedy i tylko wtedy gdy
... zdanie $G(\neg true(x))$ nie jest prawdziwe w tym modelu!

Sprzeczność! Skoro tak, to formuła $true(x)$ nie istnieje. Zbiór $Th(\mathbf{N})$ numerów zdań prawdziwych w modelu standardowym nie jest arytmetyczny[14]. A to oznacza, że nie jest sprawdzalny!

> To jest nowy dowód niezupełności arytmetyki Peano.
> Jeśli ktoś się łudził, że „dowodliwość w systemie aksjomatycznym” nie wyczerpuje możliwości poznania prawdy (ograniczonego choćby do sprawdzania) to właśnie się ich pozbył. Przynajmniej w przypadku arytmetyki.

Przykład II. Zrealizujemy (wreszcie) obietnicę: wskażemy prawdziwe, ale niedowodliwe zdanie arytmetyczne.

Zbiór numerów zdań dowodliwych PA jest rekurencyjnie przeliczalny, więc istnieje formuła arytmetyczna $dow(x)$ opisująca ten zbiór: *$dow(n)$ jest zdaniem prawdziwym w $\mathbf{N}$ gdy n jest numerem zdania dowodliwego w PA.*

Piszemy $\Box(\phi)$ zamiast $dow(num(\phi))$ dla dowolnego zdania ϕ. Tak więc dla dowolnego zdania ϕ:

$$(***) \qquad \mathbf{N} \models \Box(\phi) \qquad \text{wtw} \qquad PA \vdash \phi$$

Popatrzmy, co wynika z równoważności $(*)$ i $(***)$ dla zdania $G \equiv G(\neg dow(x))$. Stosując równoważność $(***)$ otrzymamy:

$$\mathbf{N} \models \Box(G) \qquad \text{wtw} \qquad PA \vdash G$$

Równoważne są też zaprzeczenia obu zdań:

$$\mathbf{N} \models \neg\Box(G) \qquad \text{wtw} \qquad \textit{nieprawda, że } PA \vdash G$$

Stosując równoważność $(*)$ do formuły $\neg dow(x)$, otrzymamy

$$\mathbf{N} \models G \qquad \text{wtw} \qquad \mathbf{N} \models \neg\Box(G)$$

Połączmy dwie ostatnie równoważności w jedną:

$$(****) \qquad \mathbf{N} \models G \qquad \text{wtw} \qquad \textit{nieprawda, że } PA \vdash G$$

„zdanie G jest prawdziwe w modelu standardowym dokładnie wtedy, gdy nie ma dowodu w PA.”

Jednocześnie zdanie G nie może mieć dowodu w PA, bo „istnienie *dowodu (G w PA) pociąga za sobą prawdziwość (G w $\mathbf{N}$)”*, A to - na mocy $(****)$ - oznacza, że nie istnieje dowód G w PA !

[14] To twierdzenie w literaturze znane jest jako „twierdzenie Tarskiego”.

ZDANIE G JEST PRAWDZIWE W $\mathbf{N}$ I NIE MA DOWODU W SYSTMIE PA[15].

Zdanie G przeszło do historii pod nazwą *zdania gödlowskiego*. Obietnica została spełniona... .

> Aby nam się nie wydawało, że wszystko jest tak banalnie proste, proponuję spojrzeć na stronę:
>
> *http : //tachyos.org/godel/Godel_statement.html*
>
> by sprawdzić, jak wygląda zdanie G zapisane w czystej postaci. To pomoże zrozumieć, jak istotny jest przywoływany tu wielokrotnie „trzeci wymiar” języka matematyki pozwalający na wprowadzanie skrótów i nazw eksponujących to, co ważne...

11.1.1 O praprzyczynie pewnych niemożności

Cyrulik z Sewilli goli wyłącznie tych mężczyzn, którzy nie golą się sami. Czy goli swą własną brodę?

Matematycy często-gęsto mówią o *metodzie przekątniowej*, której autorstwo przypisuje się Cantorowi. Jej zastosowanie prowadzi do zaskakujących, wręcz paradoksalnych rezultatów. Spróbujemy opisać istotę tej metody najprościej jak można.

Dla dowolnej relacji $r \subseteq A \times A$ podzbiór $C \subseteq A$ nazwiemy *r-definiowalnym*, jeżeli można wskazać element $c \in A$ taki, że:

$$C = \{a \in A\colon (c, a) \in r\}$$

Mówimy wówczas, że *c opisuje zbiór C*. Okazuje się, że bez względu na to, jak wybierzemy relację $r \subseteq A^2$, można wskazać podzbiór $P \subseteq A$, który NIE JEST r-definiowalny. To zbiór

$$P_r = \{a \in A\colon \neg((a, a) \in r)\}$$

Rzeczywiście, jakakolwiek próba wskazania elementu $b \in A$ opisującego P_r prowadzi nieuchronnie do „niemożliwej” równoważności: „*$(b, b) \in r$ wtw gdy nieprawda, że $(b, b) \in r$*”.
Zbiór P_r nazwiemy tu *zbiorem r-paradoksalnym* dla relacji r[16].

Proste? Bardzo. Zaskakuje dopiero to, jak wiele słynnych dowodów to w istocie wykorzystanie tego, że „zbiór paradoksalny nie jest r-definiowalny” dla odpowiednio dobranej relacji r. Przekonajmy się.

?? I. *Paradoks Russella (str. **??**).* Zakładając istnienie zbioru wszystkich zbiorów $\mathcal{U}$, możemy potraktować relację przynależności „$\in$” jako relację na tym zbiorze. Wówczas russellowskie stwierdzenie (które prowadzi do sprzeczności): *„kolekcja $\{a \in \mathcal{U}\colon a \notin a\}$ jest zbiorem”* to jedynie inaczej wysłowione stwierdzenie: *„zbiór $\in$-paradoksalny jest $\in$-definiowalny”*.

II. *Twierdzenie Cantora o nieprzeliczalności zbioru wszystkich podzbiorów liczb naturalnych (str. **??**).* Dla dowolnej funkcji $f\colon \mathbf{N} \longrightarrow 2^{\mathbf{N}}$ określmy relację $r_f \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ tak:

$$(m, n) \in r_f \quad \text{wtw} \quad n \in f(m)$$

Zbiory r_f-definiowalne to podzbiory $\mathbf{N}$ postaci $f(m)$, gdzie m to dowolna liczba naturalna.
Gdyby funkcja f była „na” (co jest warunkiem przeliczalności zbioru $2^{\mathbf{N}}$), to każdy podzbiór liczb naturalnych byłby definiowalny. Zbiór r_f-paradoksalny też. I to wykorzystał Cantor.

III. *Twierdzenie Tarskiego o niedefiniowalności prawdy arytmetycznej (str. 156).*
Przyjmijmy, że ustalona jest pewna efektywna numeracja formuł arytmetycznych (jednej zmiennej) $\psi \rightsquigarrow num(\psi)$. Zdefiniujmy relację na zbiorze formuł jednej zmiennej:

$$\phi\ r_t\ \psi \qquad \textit{dokładnie wtedy, gdy} \qquad \mathbf{N} \models \phi(num(\psi))$$

[15]To wnioskowanie jest poprawne przy założeniu, że teoria PA jest niesprzeczna. Zatem *albo teoria PA jest niezupełna albo jest sprzeczna.* Przy okazji: zdanie $\neg G$ też nie ma dowodu w PA. Wiesz dlaczego?

[16]To twierdzenie funkcjonuje w literaturze jako *lemat przekątniowy*. Istnienie zbiorów paradoksalnych nie umknęło uwadze Russella *(http://plato.stanford.edu/entries/paradoxes-contemporary-logic)*. A w [?] to twierdzenie nazwano twierdzeniem Cantora.

Zbiór r_t-paradoksalny składa się z takich formuł ϕ dla których zdanie $\phi(num(\phi))$ jest fałszywe w $\mathbf{N}$. Gdyby istniała formuła Tarskiego $true(x)$, to formuła $\widehat{\neg true}(x)$ (str. 155) opisywała by zbiór r_t-paradoksalny[17].

IV. *Arytmetyka Peano nie jest rozstrzygalna* - nie istnieje procedura rozstrzygająca, czy zdanie arytmetyczne ma dowód w PA. Gdyby tak było, to relacja

$r_p = \{(n,m) \in \mathbf{N}^2 \colon$ *n to numer formuły jednej zmiennej i zdanie* $\phi_n(m)$ *jest prawdziwe*$\}$

byłaby zbiorem rozstrzygalnym. Tym samym zbiór r_p-paradoksalny jest też rozstrzygalny, czyli arytmetyczny. Jest więc opisany przez pewną formułę $\psi(x)$. Potrafisz dokończyć? Powinieneś... .

V. *Nierozstrzygalność problemu stopu (str. 115)* . Rozważmy relację r_m między maszynami:

$T\, r_m\, T_1$ *jeżeli maszyna T zatrzymuje się rozpoczynając pracę ze słowem* $kod(T_1)$ *zapisanym na taśmie.*

Zbiór r_m-paradoksalny tworzą te maszyny Turinga, które nie zatrzymują się pracując na własnym kodzie. Nasza wcześniejsza próba skonstruowania maszyny PS^∞ to w istocie próba skonstruowania maszyny opisującej zbiór r_m-paradoksalny.

To tylko przykłady - lemat przekątniowy ma wiele innych zastosowań.
„Relacja”, „negacja”, „zbiór definiowalny i paradoksalny” - te nazwy sugerują wysoce wyrafinowany logiczny kontekst twierdzenia o istnieniu zbioru paradoksalnego. Ale to jest w istocie banalne twierdzenie, które można sformułować korzystając z najprostszej, naiwnej teorii mnogości:

Załóżmy, że $\phi\colon A \to Set(A,B)$ *jest odwzorowaniem ze zbioru A do zbioru funkcji z A do zbioru B. Jeśli B ma conajmniej dwa elementy, to można wskazać funkcję* $d_\phi \in Set(A,B)$ *taką, że* $d \neq \phi(a)$ *dla dowolnego* $a \in A$ *(tzn.* ϕ *nie jest funkcją „na”).*
Rzeczywiście, skoro B nie jest jednoelementowy, to istnieje funkcja $f\colon B \to B$ taka, że $f(b) \neq b$ dla dowolnego $b \in B$. Przyjmijmy $d_\phi(a) = f(\phi(a)(a))$. Gdyby $d_\phi = \phi(a)$ dla pewnego $a \in A$, to $\phi(a)(a) = d_\phi(a) = f(\phi(a)(a)) \neq \phi(a)(a)$.
Lemat przekątniowy otrzymamy przyjmując $B = \{0,1\}$ i $f = \neg$.

Zero metafizyki... . [18]

„Cantor, Russell, Turing, Tarski a nawet Gödel w jednym stali domu”... Zadziwiające, jak różnie interpretowano skutki tej prostej obserwacji.
Paradoks Russella zmusił do rewizji poglądów na temat relacji między „własnością” a „zbiorem”.
Ale gdy Cantor korzystając z metody przekątniowej odkrył konieczność uznania nieskończonej skali nieskończoności, nie zmieniło to poglądów w kwestii akceptacji nieskończoności aktualnej. Przeciwnie - dla wielu wynik Cantora to esencja teorii mnogości.
Wykorzystanie tej samej metody w teorii obliczalności nikogo nie zbulwersowało: przyjęto, że te wyniki wyznaczają „granice obliczalności”. I nikt nie wpadł w ekstazę i nikt nie histeryzował...
Jakkolwiek to nie zabrzmi, śmiem twierdzić, że twierdzenia Turinga i Gödla są z wyższej niż twierdzenie Cantora, półki. Wynik Cantora jest wewnętrznym twierdzeniem teorii mnogości - wystarczy odrzucić aksjomat istnienia *zbioru złożonego ze wszystkich podzbiorów dowolnego ustalonego zbioru*, by pozbawić to twierdzenie znaczenia.
Tymczasem wynik Turinga odnosi się do elementarnie opisywanego procesu dyskretnej interakcji. To, podobnie jak wynik Gödla, *twierdzenie limitacyjne*, wskazujące nieprzekraczalne granice poznania.

11.2 Niesprzeczność arytmetyki Peano - drugie twierdzenie Gödla

Wskazując zdanie arytmetyczne, które nie ma dowodu w arytmetyce Peano wykazaliśmy jej niesprzeczność[19]. Innym dowodem niesprzeczności PA jest istnienie jej teoriomnogościowego modelu.

[17] Przelicz to.
[18] A co z cyrulikiem z Sewilli? Rozwiązaniem jest stwierdzenie, że cyrulik byla kobietą... . Cyrulica sewillska???
[19] Teoria jest niesprzeczna, gdy nie można w niej udowodnić wszystkiego. Równoważnie: nie można w niej dowieść jednocześnie pewnego zdania i jego zaprzeczenia (gdyż z fałszu - koniunkcji $p \wedge \neg p$ - wynika wszystko).

Jednak w obu dowodach korzystamy z teorii mnogości. Dlatego te dowody mówią tylko, że *„arytmetyka Peano jest niesprzeczna,* O ILE *teoria mnogości jest niesprzeczna".*
To są WARUNKOWE dowody niesprzeczności PA.

> Czy można udowodnić niesprzeczność arytmetyki Peano „wewnętrznie", korzystając tylko z tej teorii?

> Gdyby tak było, to bylibyśmy „mniej relatywistyczni" w swoim myśleniu o istnieniu matematycznym.

Uściślijmy: z chwilą, gdy wprowadziliśmy do rozważań numerację formuł, formułę $dow(x)$ i operator $\Box$:

$$\Box(\phi) \equiv dow(num(\phi))$$

możemy dla dowolnego zdania arytmetycznego ψ stawiać dwa (różne) pytania:

- czy $\neg(PA \vdash \psi)$ *- „czy nie istnieje dowód zdania* ψ*?"*
- czy $PA \vdash \neg\Box(\psi)$ *- „czy mamy dowód w* PA*, że zdanie* ψ *nie ma dowodu?"*

> To nie zabawa w słowa. W obu wypadkach oczekujemy odpowiedzi uzasadnionych przez dowody, ale w różnych systemach dowodzenia:
> W pierwszym wypadku, dopuszczamy dowód w pewnym „zewnętrznym" systemie dowodzenia,
> W drugim przypadku chodzi o dowód „wewnętrzny", korzystający tylko z tego, co oferuje PA.

Zdanie arytmetyczne ψ możemy wybrać dowolnie. Wybierzmy (fałszywą) równość $(0 = succ(0))$.
Wewnątrzny dowód niesprzeczności teorii PA to odpowiedź na pytanie: czy $PA \vdash \neg\Box(0 = 1)$?
Gödel pokazał, że odpowiedź na to pytanie jest negatywna:
nie można (w (PA) *dowieść, że nieprawdziwe zdanie „*$0 = 1$*" nie ma dowodu.*

> SUBTELNOŚĆ: istnienie „wewnętrznego" dowodu zdania $\neg\Box(0 = 1)$ NIE GWARANTUJE niesprzeczności PA! To oczywiste: jeśli PA jest sprzeczna to można dowieść w niej wszystko.
> Co zatem udowodnił Gödel? Pokazał, że niesprzeczność PA nie może być „wewnętrznie potwierdzona".

Drugie twierdzenie Gödla - szkic dowodu

Przedstawienie w sposób poglądowy drugiego twierdzenia Gödla jest zdecydowanie trudniejsze (dla mnie) niż podobnie uproszczony opis pierwszego twierdzenia. Ale spróbuję[20].
Zastosujemy wybieg: zamiast atakować problem wprost pokażemy, że

$$PA \vdash (\neg\Box(0 = 1) \to G)$$

To wystarczy: gdyby $PA \vdash \neg\Box(0 = 1)$ to - korzystając z reguły odrywania - moglibyśmy twierdzić, że $PA \vdash G$. A to, jak wiemy, jest niemożliwe.
W dowodzie korzysta się z własności operatora $\Box$, określanych jako *derivability conditions Hilberta-Bernaysa*:

1. jeżeli $PA \vdash \phi$ *, to* $PA \vdash \Box(\phi)$, *(g dy zdanie* ϕ *jest dowodliwe w* PA *to i zdanie „zdanie o numerze* $num(\phi)$ *ma dowód" jest dowodliwe w* PA

2. $PA \vdash (\Box(\phi) \to \Box\Box(\phi))$,

3. $PA \vdash (\Box(\phi) \wedge \Box(\phi \to \psi) \to \Box(\psi))$ *(równoważnie:* $PA \vdash \Box(\phi \to \psi) \to (\Box(\phi) \to \Box(\psi))$ *)*

Skorzystamy też ze szczególnej właściwości zdania gödlowskiego G:

$$PA \vdash (\neg G \leftrightarrow \Box(G)) \qquad (+)^{21}$$

Zaczynamy: z (+) - na mocy (1) - wnioskujemy, że:

$$PA \vdash \Box(\Box(G) \to \neg G) \qquad (a)$$

a korzystając z warunku (2) dla zdania G otrzymamy

[20] Niestety, dowód jest bardzo sformalizowany. Mniej zaawansowani powinni go sobie darować.
[21] Równoważnie: $PA \vdash (G \leftrightarrow \neg\Box(G))$. Tego nie udowodniliśmy: w dowodzie pierwszego twierdzenia Gödla była mowa tylko o nieco słabszej równoważności. Ale proszę uwierzyć (sprawdzić), że ta równoważność jest też dowodliwa.

$$PA \vdash (\Box(G) \to \Box(\Box(G)) \qquad (b)$$

korzystajac z prawa odrywaniai (3) z (a) otrzymamy

$$PA \vdash \Box(\Box(G)) \to \Box(\neg G) \qquad (c)$$

Ostatecznie, łącząc (b) i (c) otrzymamy:

$$PA \vdash \Box(G) \to \Box(\neg G) \qquad (d)$$

Ponieważ w sposób oczywisty $PA \vdash G \to (\neg G \to (0 = 1))$[22] to - na mocy (1)- otrzymamy

$$PA \vdash \Box(G \to (\neg G \to (0 = 1)))$$

stąd, dzięki (3), otrzymujemy

$$PA \vdash \Box(G) \to (\Box(\neg G) \to \Box(0 = 1))$$

lub, równoważnie

$$PA \vdash \Box(\neg G) \to (\Box(G) \to \Box(0 = 1)) \qquad (f)$$

Korzystając z tautologii $(p \to (q \to r) \leftrightarrow ((q \to p) \to (q \to r)$ otrzymamy z (f):

$$PA \vdash (\Box(G) \to \Box(\neg G))) \to (\Box(G) \to \Box(0 = 1)) \qquad (g)$$

i - już widać koniec ! - z (d), (g) korzystajac z reguły odrywania otrzymamy

$$PA \vdash \Box(G) \to \Box(0 = 1)$$

czyli

$$PA \vdash \neg\Box(0 = 1) \to \neg\Box(G)$$

teraz, korzystając z (+), otrzymamy

$$PA \vdash \neg\Box(0 = 1) \to G$$

Koniec.

11.2.1 Limitacyjny charakter twierdzeń Gödla

Either mathematics is too big for the human mind or the human mind is more then a machine K. Gödel[23]

Twierdzenia Gödla nie są twierdzeniami o słabościach arytmetyki. One wskazują nieprzekraczalne ograniczenia języków pierwszego rzędu. Spróbujemy to wyjaśnić.

Argumenty użyte w dowodzie twierdzenia Gödla o niezupełności arytmetyki - odwołanie do sprawdzalności zbioru dowodliwych zdań i istnienia nierozstrzygalnych zbiorów arytmetycznych - są tego rodzaju, że jakkolwiek nie wzbogacimy język arytmetyki (dodając nowe stałe, symbole operacyjne i relacyjne które będziemy dowolnie interpretować w **N**), to każda próba aksjomatyzacji zbioru zdań sformułowanych w tym języku i prawdziwych w **N** skazana jest porażkę - zawsze znajdą się zdania prawdziwe w **N**, a nie dowodliwe. Taka teoria nie jest pełna.
Nic się też nie zmieni, gdy za „teorię bogatszą od PA” będziemy uważali każdą teorię (pierwszego rzędu) w której można interpretować język arytmetyki - wskazać interpretację zera i operacji następnika, dodawania i mnożenia - w ten sposób, że wszystkie aksjomaty PA będą twierdzeniami tej teorii. Klasycznym przykładem „teorii bogatszej od PA” jest teoria mnogości ZFC (str. **??**).

> Żadna teoria bogatsza od PA nie jest zupełna. ZFC nie jest zupełna.
> Włączenie PA do uprawianej matematyki to przekroczenie matematycznego Rubikonu: jeśli uprawiamy matematykę w której wykorzystujemy liczby naturalne, to tej matematyki nie można zaksjomatyzować w języku pierwszego rzędu - zastąpić „prawdziwości” przez „dowodliwość”.

Drugie twierdzenie Gödla ma podobne konsekwencje: żadna teoria pierwszego rzędu bogatsza od PA nie może dowieść własnej niesprzeczności.

Nie przedstawimy tu dowodu tego twierdzenia. Powiedzmy tylko, że - tak jak w przypadku niezupełności - jest to modyfikacja dowodu Gödla: należy zastąpić formuły arytmetyczne użyte w

[22] $p \to (\neg p \to false)$ to tautologia.
[23] http://math2033.uark.edu/wiki/index.php/Kurt_Godel

przedstawionym wyżej dowodzie odpowiednimi formułami języka bogatszej teorii T. Na przykład: zbiór zdań dowodliwych w takiej teorii T jest sprawdzalny, więc można punumerować zdania tej teorii i zbudować formułę $dow_T(x)$ która jest spełniona przy podstawieniu $[x := n]$ gdy n to numer zdania dowodliwego w T. (ponieważ T jest bogatsza niż PA i liczby naturalne są interpretowalne w T, to jest to „wewnętrzna" konstrukcja). Podobnie należy skonstruować zdanie G_T, które zastąpi zdanie gödlowskie G. A potem spróbować powtórzyć dowód Gödla - dla teorii T.[24]

> ZFC jest teorią bogatszą od PA. ZFC nie jest w stanie dowieść własnej niesprzeczności.

11.2.2 Próba bilansu

Teorię mnogości budowano w czasie gdy upadł już mit o logicznej konieczności wszelkich teorii matematycznych (str. 62). Można jednak podejrzewać, że o ile dopuszczano (niechętnie) istnienie niekompatybilnych teorii szczegółowych (np. geometrii różniących się doborem aksjomatów) to wciąż oczekiwano, że matematyczna ur-teoria powinna być źródłem uniwersalnych prawd i jednocześnie powinna być zupełna.
To, jak się zdaje, było marzenie Hilberta.

> Koncepcja Hilberta była w chwili powstania niezwykle atrakcyjna. Kreowała naukę uniwersalną. Uosabiała wiarę, że to możliwe. Była obietnicą globalnego ładu, ostatecznego rozwiązania odwiecznych dylematów.
> Działo się to na przełomie XIX i XX wieku, w jednej z tych nielicznych chwil w historii, kiedy człowiek wierzył w swe nieograniczone możliwości. Oszołomieni sukcesami ludzie nauki byli przekonani, że mogą wszystko. *„Co jest rozumne, jest rzeczywiste, a co jest rzeczywiste, jest rozumne" (Hegel).* Tylko pozazdrościć...
> Hekatomba wojen światowych, holocaust, gułag, Hiroszima i inne dzieła ludzkiej pomysłowości (nie mylić z umysłowością) - wszystko to było wtedy niewyobrażalne. Niemożliwe[25].

Ale się nie udało. Twierdzenia Gödla rozbiły w proch i pył paradygmaty matematyki hilbertowskiej:

- *przekonanie o możliwości zupełnego, aksjomatycznego opisu każdego obiektu matematycznego,*
- *przekonanie, że matematyka jest w stanie udowodnić własną niesprzeczność.*
- *implikacja „dowodliwości → prawdziwość" jest niepewna, bo zależna od niesprzeczności ZFC.*

Jeśli tak, jeśli teoria mnogości nie spełniła pokładanych w niej nadziei, to jak wytłumaczyć, że jest od ponad stu lat podstawą matematyki?
Dlatego, że ... jest gorzej niż się zdaje na pierwszy rzut oka: wyniki Gödla pokazały, że nie da się zbudować matematycznej ur-teorii obejmującej arytmetykę i pozbawionej wad ZFC - pełnej i potrafiącej dowieść własnej niesprzeczności. Wybór ZFC jako ur-teorii nie jest błędem lecz tylko jednym ze złych wyborów.

Zapewne dlatego R. Penrose uznał te wyniki Gödla za *„śmiertelny cios zadany formalizmowi" [55]*, za porażkę *programu Hilberta.*

Co robić?[26]. Można próbować zlekceważyć problem. Np. R. Symullyan pisał dość beztrosko: *„Nie jest tak, że nie potrafimy dowieść niesprzeczności arytmetyki: to arytmetyka nie potrafi dowieść swej niesprzeczności." [75].*

Nie podzielam tych ocen[27]. Hilbert nie chciał rewolucji. Chciał uporządkować zastaną matematykę. Formalizacja zgodna z euklidesowym paradygmatem nie była celem. Miała być NARZĘDZIEM:

[24] To nawet nie szkic dowodu tylko sugestia. Ale niech nam to wystarczy.
[25] O szczególnej arogancji nauki u schyłku XIX wieku świadczy taka wypowiedź fizyka Kelvina w 1894 roku: *„Nic nowego nie ma już w fizyce do odkrycia. Pozostały tylko coraz bardziej precyzyjne pomiary."* Matematycy też grzeszą: *„There is almost nothing left to discover in geometry"*- Kartezjusz, rok 1619.
[26] W.I. Lenin
[27] Kusi, by złośliwie napisać: *‚Nie jest tak, że nie potrafimy dowieść niesprzeczności matematyki: to matematyka nie potrafi dowieść swej niesprzeczności".*

„wszystkie zdania składające się na matematykę zamieniane są na formuły, tak że właściwa matematyka staje się inwentarzem formuł (...). Aksjomaty i twierdzenia dające się udowodnić (...) są kopiami myśli tworzących zwyczajową matematykę, taką jaką dotychczas rozwijano" [61]

Centrum tej matematyki miała pozostać arytmetyka: *„Stoję na stanowisku, że przedmiotami teorii liczb są (...) same znaki, których kształt możemy ogólnie i na pewno rozpoznać – niezależnie od przestrzeni i czasu (...) Solidna postawa filozoficzna, która, jak sądzę, jest niezbędna dla ugruntowania czystej matematyki (...) jest taka:*

NA POCZĄTKU BYŁ ZNAK" *[94]*

Ten cel udało się zrealizować budując ZFC.

> Twierdzenia Gödla to tylko koniec fundamentalistycznych złudzeń które, jeśli się dobrze zastanowić, były bardziej irracjonalnym marzeniem niż naukową hipotezą. Cywilizacyjnym dziedzictwem zastanym przez matematyków u schyłku XIX wieku.

Wystarczy porzucić tę fundamentalistyczną perspektywę i spojrzeć na matematykę pragmatycznie, by zrozumieć, że ten zły wybór jest jednak... dobry.

Nasze rozumienie świata nie przejawia się w zdolności do zunifikowanego OPISU rzeczywistości odkrycia jego matematycznej istoty, lecz w zdolności do PRZEWIDYWANIA przebiegu zjawisk i prognozowania ich rezultatów. Zjawisk, których nie kontrolujemy i tych, które sami wywołujemy. Temu służy matematyczne modelowanie rzeczywistości.

Już w początku XVIII wieku George Berkeley (1685 - 1753) sformułował słynne równanie:

esse = percipi
to, co istnieje = to, co jest postrzegane[28]

Postrzeganie matematyczne to dowodliwość. Prawdziwość jest wtórna: żaden matematyk nie ośmieli się powiedzieć, że twierdzenie jest prawdziwe, jeśli nie zna jego dowodu. „Zgodność twierdzeń z rzeczywistością" to kwestia pozamatematyczna.

> Teorie matematyczne to nasze postrzeganie rzeczywistości a nie rzeczywistość.
> Kilkadziesiąt lat po wynikach Gödla S.Hawking i L.Mlodinow napisali: *„Nie istnieje koncepcja rzeczywistości niezależna od teorii."*[29].

Nie szukajmy jedynego uniwersalnego modelu i języka modelowania. Wielość języków i modeli nie jest wadą. Nic w tym dziwnego, że użycie różnych języków daje różne rezultaty[30]. *„Mój język wyznacza granice mego poznania" - L. Wittgenstein.* Rzeczywistości (raczej) nie kreujemy ale nasze jej postrzeganie - tak.

Skoro tak, skoro porzucamy fundmentalistyczna perspektywę to relacja między dowodliwością a enigmatyczną prawdziwością traci swoje fundamentalne znaczenie. Podobnie zupełność teorii. A co z niesprzecznością?

To pytanie jest też typowe dla myślenia w kategoriach matematycznego fundamentalizmu. Uświadamiał to sobie Wittgenstein, mówiąc o *„zabobonnym lęku i czci matematyków w obliczu*

---

[28]Brouwer: *esse = construere.*

[29][33] str.52). W tejże książce Hawking i Mlodinow wprowadzili pojęcie *„model-dependend realism"* o którym w wikipedii napisano tak: *„Model-dependent realism to podejście do badań naukowych, które koncentruje się na roli naukowych modeli zjawisk. Twierdzi, że rzeczywistość powinna być interpretowana w oparciu o te modele, a tam, gdzie kilka modeli pokrywa się (...), istnieje wiele równie ważnych rzeczywistości. Nie ma też sensu mówić o „prawdziwej rzeczywistości" modelu, ponieważ nigdy niczego nie możemy być absolutnie pewni.* JEDYNĄ ZNACZĄCĄ RZECZĄ JEST UŻYTECZNOŚĆ MODELU". Rzecz tyczy wprawdzie modeli kosmologicznych ale bez ryzyka nadużycia można te uwagi odnieść do matematyki. Z kolei D.C. Dennet w *„Od bakterii do Bacha - o ewolucji umysłów"* rozróżnia *obraz manifestujący się* świata (wyrażany w języku naturalnym) i jego *obraz naukowy.* A Wittgenstein pisał: *„W życiu samo twierdzenie matematyczne nie jest nam nigdy potrzebne; używamy go tylko po to, by ze zdań, które nie należą do matematyki, wnosić o innych, które też do niej nie należą" Tractatus 6.2111.*

[30]Co w języku suahili można powiedzieć o różnych rodzajach śniegu tak precyzyjnie rozróżnianych przez Eskimosów?

sprzeczności". Używał określenia „ukryta sprzeczność" w stosunku do tych potencjalnych sprzeczności, które ewentualnie tkwią gdzieś głęboko w teorii a które w żaden sposób nie wpływają na praktykę matematyczną, np. na analizę matematyczną. Pisał: *„Można powiedzieć: „Ze sprzeczności wynika wszystko". Odpowiedź brzmi: No cóż, nie wyciągaj żadnych wniosków ze sprzeczności - niech to będzie regułą. Można to ująć tak: zawsze jest czas, aby poradzić sobie ze sprzecznością, kiedy do niej dojdziemy. Kiedy już do tego dojdziemy, czy nie powinniśmy po prostu powiedzieć: „To nie ma sensu – i nie wyciągać z tego żadnych wniosków"?* [31]

Zamiast fundamentalizmu - pragmatyzm. Herezja? Nie sądzę. Taką pragmatyczną postawę, choć nie zawsze w pełni świadomie, przyjmuje większość pracujących matematyków.
J. H. Friedman na swej stronie internetowej napisał o teorii zbiorów tak: *„This (...) serves as our best scientific model of mathematical practice"* i dalej: *„The fact that ZFC is incomplete is totally irrelevant to whether it is a model of mathematical practice"*.
„Większość matematyków, z wyjątkiem tych zajmujących się samą teorią mnogości, prawdopodobnie nie myśli w kategoriach poszczególnych teorii aksjomatycznych; intuicyjnie stosują koncepcje teorii mnogości. Byłoby zgodne z podejściem Brouwera do matematyki intuicjonistycznej (...) po prostu intuicyjne podawanie twierdzeń, a nie poleganie na aksjomatyzacji." - to z kolei S.Kripke[32]

Bardziej niż słowa wybitnych matematyków, takie pragmatyczne podejście do matematyki usprawiedliwia jej wkład w rozwój naszej cywilizacji. Bez modeli matematycznych nie ma astronomii i kosmologii[33]. Bez matematyki nie istnieje mechanika kwantowa. Dziś ten język wykorzystujemy nie tylko w naukach ścisłych ale coraz częściej w naukach społecznych i np. w medycynie. Matematyka wyznacza normy RACJONALNEGO działania w ciągle powiększanym obszarze ludzkiej aktywności.

Rozwój cywilizacyjny w XX wieku dowiódł, że matematyka teoriomnogościwa nieźle spełnia te oczekiwania.

> To nieco prostackie porównanie, ale... teoria mnogości przypomina „zupę z gwoździa": najpierw miał to być niepodważalny, niewzruszony fundament matematycznego poznania świata a został tylko „naukowy model praktyki matematycznej". Gwóźdź zniknął, została (smakowita) zupa.

Pracujący matematycy są w ogromnej większości zadowoleni z takiego stanu rzeczy. Bardzo zadowoleni. J. Dieudonne, wybitny matematyk francuski, pisał tak: *„System, który przyjmowany jest obecnie przez co najmniej 95% matematyków, to powszechnie znana teoria Zermelo–Fraenkla, (...) . System ten odpowiada dokładnie potrzebom wszystkich matematyków z wyjątkiem oczywiście logików oraz tych, których postawa filozoficzna uniemożliwia przyjęcie przesłanek wymaganego stylu, to znaczy tzw. matematyków intuicjonistów i konstruktywistów. (...) Filozofowie i logicy (...) wierzą, że matematycy interesują się tym, co oni robią. Należałoby wyprowadzić ich z błędu, nie jest to bowiem prawdą i 90% matematyków śmieje się z tego, co robią wszyscy logicy i filozofowie razem wzięci."* Trochę przewrotnie: nadzieja w tym, że jednak 5% matematyków dopuszcza myśl o istnieniu matematyki poza teorią mnogości... .

Ale ta powszechna akceptacja jest też niebezpieczna: *w ostatnim stuleciu cantorowska teoria mnogości zajęła w matematyce na tyle ważne miejsce, że (...) prawo do istnienia zyskuje sobie tylko to, co (...) dopuszcza zbudowanie modelu w teorii Cantora. W ten sposób cantorowska teoria stała się uniwersalnym światem matematyki. - P. Vopenka [49]* .
Otóż to: można się zgodzić na zamknięcie w kręgu matematyki teoriomnogościowej na sto, czy może nawet dwieście lat eksplorując w tym czasie to, co mz do zaoferowania. Ale nie ma przecież żadnych przesłanek by twierdzić, że nie ma i nigdy nie będzie matematyki poza teorią mnogości.

[31]Cytat pochodzi z pracy P. Pivingstona *„Wittgenstein, Turing and the "finitude" of language"* dostępnej w internecie. Nie wiem, czy Wittgenstein napisał to znając czy nie znając wyniki Gödla.
[32]*S.A. Kripke, Indagationes Mathematicae 30 (2019) 492–499.*
[33]Jednym z pierwszych osiągnieć matematyków była umiejętność obliczenia daty i godziny zaćmienia Słońca co niecnie wykorzystywała podła władza (B. Prus, Faraon).

Herakles walczący z Hydrą

Porównując arytmetykę i teorię mnogości napisałem: *„ZFC jest mocniejsza, dowodliwych prawd teoriomnogościowych o liczbach naturalnych jest więcej niż dowodliwych prawd arytmetycznych.”* Słowo się rzekło, kobyłka u płota - prosimy o przykład. Oto on.

„Drugie zadanie Heraklesa polegało na tym, by pokonać wielogłową Hydrę odcinając jej kolejno wszystkie głowy. Ale ucięcie jednej głowy powodowało prawie zawsze odrastanie kilku nowych głów - zgodnie z regułami, które zaraz opiszemy.
Czy Herakles może pokonać Hydrę bez względu na to, ile ma ona głów na początku walki?”

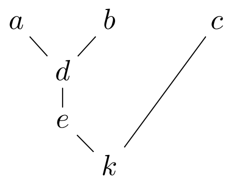
Niech $H(1), H(2), \ldots, H(n), \ldots$ będzie ciągiem opisującym liczbę głów Hydry: $H(n) =$ *liczba głów „po n-tym cięciu Heraklesa”*. Hydra zginie, gdy $H(n_0) = 0$ dla pewnej liczby n_0.

Łatwo się zgodzić, że konstrukcja ciągu liczb naturalnych $W(n)$ takiego, że:

(*) *dla dowolnego $m \in N$ istnieje $m_1 > m$ takie, że $W(m) > W(m_1)$*

musi kończyć się osiągnięciem zera[34]. Stąd pomysł, by rozwiązać problem Heraklesa wskazując ciąg $W(n)$ który spełnia warunek (*) i *majoryzuje* ciąg $H(n)$[35].
Pomysł dobry, ale ... niewykonalny. Stanie się to jasne, gdy poznamy „reguły odrastania głów”. Opiszemy je wyobrażając sobie („modelując”) Hydrę jako graf-drzewo. Głowy Hydry to liście drzewa (wierzchołki bez potomków) wieńczące *szyje* - gałęzie drzewa. Nazwijmy *ojcem* wierzchołka w ten wierzchołek, który go bezpośrednio poprzedza. A *ojciec ojca w* - o ile istnieje - to *„dziadek w”*.

Pomóżmy sobie przykładem - oto graf reprezentujący pewną trójgłową Hydrę.

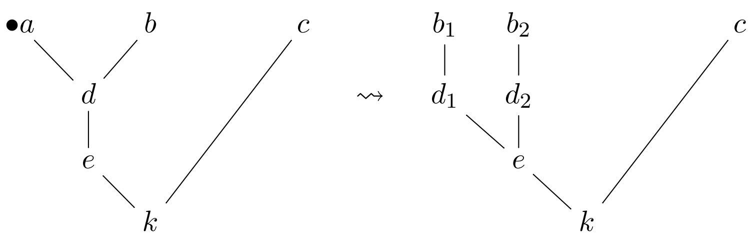


Wierzchołek d jest ojcem a i b, a e ich dziadkiem. k to korzeń. Wierzchołek c nie ma dziadka. Reguły odrastania głów Hydry po n-tym cięciu Herkulesa opisujemy tak:

- *jeżeli odcinana głowa nie ma dziadka, to nic nie odrasta,*

- *w przeciwnym wypadku do „dziadka” głowy odciętej przez n-te cięcie Heraklesa zostaje dołączonych n kopii tego, co zostało dziadkowi po odcięciu jednej głowy-wnuka:*

Kolejny rysunek ilustruje zmianę Hydry-drzewa po drugim cięciu Heraklesa, w którym odciął on głowę „a”.



Gdy w kolejnym ruchu Herakles odetnie głowę „c”, to nic nie odrośnie.

Wbrew wcześniejszym zapowiedziom zbudujemy teraz ciąg majoryzujący ciąg $H(n)$ i spełniający warunek $(*)$. Ale nie będzie to ciąg liczb naturalnych a ciąg *liczb porządkowych*:

---

[34]To konsekwencja twierdzenia, iż każdy niepusty podzbiór liczb naturalnych ma element najmniejszy. To stwierdzenie jest konsekwencją (drugorzędowej) zasady indukcji. Nie można tego dowieść korzystając z aksjomatyki Peano!

[35]Tzn. $H(n) \leqslant W(n)$ dla dowolnego n.

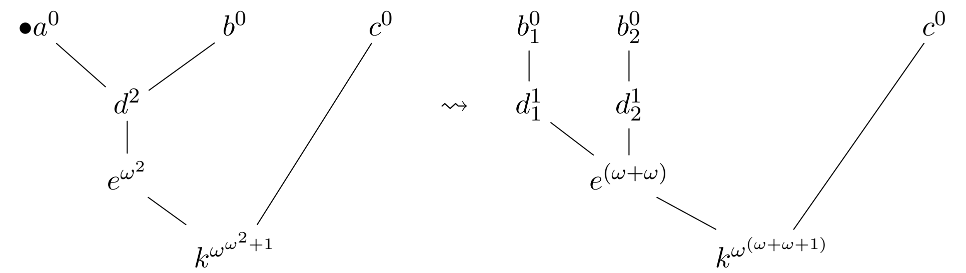
> Najprostsze liczby porządkowe to liczby naturalne - liczba naturalna n to liczba porządkowa zbioru $\{0 \leqslant 1 \leqslant \cdots \leqslant n-1\}$. ω to liczba porządkowa (naturalnie uporządkowanego) zbioru liczb naturalnych. $\omega + 1$ to liczba porządkowa zbioru $\mathbf{N}$, do którego dołożono element - powiedzmy $\star$ - jako element największy:
> $$0 \leqslant 1 \leqslant 2 \leqslant \dots n \leqslant n+1 \leqslant \cdots \qquad \cdots \leqslant \star$$
> I tak dalej... . Liczby porządkowe umiemy nie tylko dodawać, ale też mnożyć i potęgować.
> Można je też porównywać:
> $$0 < 1 < 2 < \dots < n < n+1 < \cdots \qquad \cdots < \omega < \omega+1 < \dots < \omega+n < \dots < \omega+\omega < \dots < \omega^{\omega} < \dots$$
> Liczb porządkowych jest nieskończenie wiele[36]. Dla nas ważna jest liczba ε_0, o której wystarczy nam teraz wiedzieć, że jest większa od wszystkich liczb porządkowych tu rozważanych.

Udekorujemy wierzchołki drzewa-Hydry zgodnie z taką regułą rekurencyjną:

- wszystkie liście (czyli głowy Hydry) oznaczamy przez 0*,*

- jeśli wszystkie wierzchołki dla których wierzchołek w jest ojcem oznaczone są przez liczby porządkowe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ i $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \dots \geqslant \alpha_n$, to wierzchołkowi w przypisujemy liczbę
$\omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} \cdots + \omega^{\alpha_n}$ [37]

Numerację wierzchołków wybrano tak, by liczba porządkowa etykietująca korzeń drzewa „po cięciu" była zawsze mniejsza od przypisanej mu przed cięciem. I większa od liczby głów Hydry.



Proszę uwierzyć (policzyć): tak jest zawsze, bez względu na to, który łeb Hydry utnie Herakles. Wniosek? Ciąg liczb porządkowych etykietujących kolejno korzeń drzewa-Hydry jest istotnie malejący i majoryzuje ciąg $H(n)$.

Teraz najważniejsze: zbiór liczb porządkowych $< \varepsilon_0$ jest *dobrze uporządkowany* - każdy niepusty podzbiór takich liczb ma element najmniejszy. Stąd wynika *zasada indukcji pozaskończonej: jeśli zbiór A liczb porządkowych $< \varepsilon_0$ zawiera* 0 *i dla dowolnej liczby porządkowej $\alpha < \varepsilon_0$ prawdziwa jest implikacja:*

jeśli $\beta \in A$ dla dowolnej $\beta < \alpha$, to $\alpha \in A$

to zbiór A zawiera wszystkie liczby porządkowe $< \varepsilon_0$.

A stąd już w miarę łatwo wynika, że:

każdy malejący ciąg liczb porządkowych $< \varepsilon_0$ musi osiągnąć 0*!*[38]

Herakles zawsze zabije Hydrę... Bez względu na to, ile i jak umiejscowionych na szyjach ma ona głów i jaką strategię ich odcinania wybierze Herakles... .

A Kirby i Paris pokazali, że w PA niesposób dowieść, iż Herakles zwycięży Hydrę... .

> Mniejsza o Heraklesa - heros sobie poradzi. To tylko przykład problemu sformułowanego w języku arytmetyki, którego rozwiązanie wymaga „czegoś więcej" - w tym przypadku liczb porządkowych i indukcji pozaskończonej. To jest dowód w ZFC.
> Ale dlaczego twierdzimy, że jest to „prawda"? To jest tylko „prawda teoriomnogościowa"... . Ale nie arytmetyczna... .

[36]Więcej i bardziej teoriomnogościowo o liczbach porządkowych na stronch 185 i 194.

[37]$\omega^0 = 1$

[38]Pomyśl o zbiorze A takim, że $\alpha \in A$ jeśli ciąg istotnie malejący rozpoczynajacy się od liczby α osiąga 0 po skończonej liczbie kroków.

Korzystając z tych samych środków - liczb porządkowych i indukcji pozaskończonej dla liczb porządkowych $< \varepsilon_0$ - Gentzen dowiódł niesprzeczności arytmetyki pierwszego rzędu[39].

Na koniec: to, że arytmetyka Peano (i każda obszerniejsza teoria aksjomatyczna) okazała się nierozstrzygalna, komentuje się czasem tak: „to i dobrze, bo cóż ciekawego w świecie, gdzie o wszystkim rozstrzyga komputer". Nie tak prosto. Dla wspomnianej wcześniej rozstrzygalnej arytmetki Presburgera[40] udowodniono taki oto fakt (Fischer i Rabin (1974)): *„Każdy algorytm rozstrzygający, czy twierdzenie jest dowodliwe w arytmetyce Presburgera, musi wykonać w pesymistycznym przypadku co najmniej* $2^{2^{cn}}$ *kroków" (gdzie* n *jest długością twierdzenia a* $c > 0$ *jest pewną stałą.)* Dla porównania: analogiczne oszacowanie dla rachunku zdań wynosi 2^n...

[39] Podobnie rzecz się ma z *ciągami Goodstaina*: można je zdefiniować w języku arytmetyki, ale udowodnienie, że każdy taki ciąg zbiega do zera wymaga wykorzystania idukcji pozaskończońej - patrz *http://en.wikipedia.org/wiki/Goodstein's_theorem.*

[40] str.153.

Rozdział 12

Wokół koncepcji prawdy Tarskiego

Powiedzieć, że istnieje, o czymś, czego nie ma, jest fałszem. Powiedzieć o tym, co jest, że jest, a o tym, czego nie ma, że go nie ma, jest prawdą.
„Metafizyka", Arystoteles

„Wedle klasycznej definicji prawdy, prawdziwe lub fałszywe mogą być myśli. Niektórzy uważają, że myśl, jako przedmiot w umyśle, (...) niedostępny publicznie, nie może być nośnikiem prawdy. Publicznie dostępne mogą natomiast być przedmioty myśli. Według wielu filozofów są nimi:

- sądy (propositions), czyli przedmioty abstrakcyjne (...) . Sąd jest obiektywną treścią zdania oznajmującego (...) Ten sam sąd można wyrazić za pomocą różnych zdań (np. w różnych językach), to samo zdanie, przy różnych okazjach, może wyrażać różne sądy. (...) Można wątpić, (...) czy sądy spełniają powszechnie akceptowane w ontologii Parmenidesa kryterium istnienia (istnieć = zachowywać tożsamość, być identycznym z samym sobą). Takich wątpliwości nie budzą zdania, ponieważ są przedmiotami fizycznymi: napisami lub ciągami dźwięków. (...) Koncepcja, wedle której nośnikami prawdy są zdania, znakomicie pasuje do języków rachunków logicznych i teorii matematycznych. Natomiast zdania języka potocznego mają tę niemiłą cechę, że zawierają wyrażenia okazjonalne, na przykład „ja", „dziś", „tu", „to", które przy różnych okazjach mają różne znaczenia. Zdania takie, na przykład „Dzisiaj jest piątek", jest czasem prawdziwe, zaś przez sześć dni w tygodniu fałszywe. Żeby uniknąć kłopotów z okazjonalnością, W.V.O. Quine (...) zaproponował, żeby zdania języka potocznego uznać za skróty zdań wiecznych.

Zdanie wieczne jest to takie zdanie, w którym nie występują wyrażenia okazjonalne i dlatego ich prawdziwość nie zależy od tego, kto je wypowiada, kiedy, ani gdzie (...)[1]

Wystarczy. Widać, jak wielu ustaleń trzeba po to tylko, by zacząć dyskusję o „prawdziwości". Nie jestem aż tak naiwny (zarozumiały) by podjąć próbę odpowiedzi na pytanie *„czym jest prawda i jak ją poznać?"*. Zainteresowanych odsyłam np. do (niematematycznego) dzieła J. Wolańskiego *„Epistemologia. Poznanie, prawda, wiedza, realizm"*. Swoje ambicje ograniczam do naszkicowania podstawowych ustaleń i wskazania wątpliwości związanych z „prawdą matematyczną". Dlatego z przytoczonego fragmentu wybieram tylko jedno zdanie:

„Koncepcja, wedle której nośnikami prawdy są zdania, znakomicie pasuje do języków rachunków logicznych i teorii matematycznych."[2]

12.1 Koncepcja Tarskiego

Zdanie prawdziwe to zdanie, które wyraża, że tak a tak rzeczy się mają, i rzeczy mają się tak właśnie. - *A. Tarski*

Zadowalamy się szukaniem prawdy w odpowiedniości między zdaniami w umyśle a rzeczami, o które chodzi. *G.W. Leibniz (Nowe rozważania)*

[1] Fragmenty wykładu A. Groblera - *(http:// adam-grobler.w.interia.pl/Epi4.html).*

[2] *„W zdaniu myśl wyraża się w sposób zmysłowo postrzegalny" - L.Wittgenstein.*

Dyskusja nad pojęciem prawdy w słynnej pracy Tarskiego *„The semantical conception of true”* [82] zaczyna się tak:
(...). Consider the sentence ”snow is white.” We ask the question under what conditions this sentence is true or false. It seems clear that if we base ourselves on the classical conception of truth, we shall say that the sentence is true if snow is white, and that it is false if snow is not white. Thus, if the definition of truth is to conform to our conception, it must imply the following equivalence:

The sentence ”snow is white” is true if, and only if, snow is white.

Let me point out that the phrase ”snow is white” occurs on the left side of this equivalence in quotation marks, and on the right without quotation marks. On the right side we have the sentence itself, and on the left the name of the sentence.

Employing the medieval logical terminology we could also say that on the right side the words ”snow is white” occur in suppositio formalis[3]*, and on the left in suppositio materialis*[4]*. It is hardly necessary to explain why we must have the name of the sentence, and not the sentence itself, on the left side of the equivalence. For, in the first place, from the point of view of the grammar of our language, an expression of the form ”X is true” will not become a meaningful sentence if we replace in it 'X' by a sentence or by anything other than a name – since the subject of a sentence may be only a noun or an expression functioning like a noun. And, in the second place, the fundamental conventions regarding the use of any language require that in any utterance*[5] *we make about an object it is the name of the object which must be employed, and not the object itself. In consequence, if we wish to say something about a sentence, for example, that it is true, we must use the name of this sentence, and not the sentence itself. The problem of the definition of truth obtains a precise meaning and can be solved in a rigorous way only for those languages whose structure has been exactly specified. For other languages – thus, for all natural, ”spoken” languages – the meaning of the problem is more or less vague*[6]*, and its solution can have only an approximate character. Roughly speaking, the approximation consists in replacing a natural language (or a portion of it in which we are interested) by one whose structure is exactly specified, and which diverges from the given language ”as little as possible”.*

Aby wyeliminować niejasności spowodowane zmaganiami z obcym językiem, dodajmy podobny fragment z pracy A. Tarskiego *„Truth and Proof”* (z moimi skrótami):

Weźmy pod uwagę zdanie w języku polskim, którego sens nie budzi wątpliwości, np. zdanie ”śnieg jest biały”. Umawiamy się, że zdanie to będziemy oznaczać przez „8”. Stawiamy pytanie: co mamy na myśli mówiąc, że „8” jest zdaniem prawdziwym lub jest zdaniem fałszywym? (...) , mówiąc że „8” jest zdaniem prawdziwym, mamy na myśli, że śnieg jest biały, a mówiąc, że „8” jest zdaniem fałszywym, że śnieg nie jest biały. Eliminując „8” uzyskujemy następujące sformułowania:

(1) ”śnieg jest biały” jest zdaniem prawdziwym wtedy i tylko wtedy, gdy śnieg jest biały;

(1') ”śnieg jest biały” jest zdaniem fałszywym wtedy i tylko wtedy, gdy śnieg nie jest biały.

(...) Możemy uważać (1) i (1') za cząstkowe definicje terminów ”prawdziwy” i ”fałszywy” - za definicje tych terminów w odniesieniu do pewnego konkretnego zdania. Zauważmy, że (1), podobnie jak (1'), ma postać narzuconą definicjom przez reguły logiki (...) - postać równoważności logicznej. Lewa strona (równoważności) jest to definiendum, czyli zwrot, którego znaczenie jest wyjaśnione przez definicję; prawa strona jest to definiens, czyli zwrot, który wyjaśnia to znaczenie. W obecnym przypadku definiendum jest następującym wyrażeniem:

”śnieg jest biały” jest zdaniem prawdziwym;
definiens zaś ma postać: śnieg jest biały.

Na pierwszy rzut oka może się wydać, że zdanie (1) traktowane jako definicja zawiera podstawowy błąd, znany jako błędne koło. Chodzi o to, że pewne słowa, np. ”śnieg”, występują („,) po obu stronach równoważności. W rzeczywistości jednak występują one tam w zupełnie różnych rolach.

[3] „Brane w znaczeniu formalnym”
[4] „Brane w znaczeniu materialnym”
[5] wypowiedź
[6] niejasny

Prawa strona zawiera słowo „śnieg" jako syntaktyczną część: definiens jest zdaniem, a słowo „śnieg" jest jego podmiotem. Lewa strona jest również zdaniem. Głosi ono, że prawa strona jest zdaniem prawdziwym. Podmiotem tego zdania jest nazwa zdania stojącego po prawej stronie utworzona przez ujęcie go w cudzysłów. (...) Wyrażenie ujęte w cudzysłów powinno być traktowane gramatycznie jako pojedyncze słowo nie mające części syntaktycznych. W szczególności słowo "śnieg", nie jest jego częścią syntaktyczną (...) Logik średniowieczny powiedziałby, że w definiens „śnieg" występuje in suppositione formalis, w definiendum zaś in suppositione materialis. Słowa, które nie są syntaktycznymi częściami definiendum, nie mogą jednak być źródłem błędnego koła i niebezpieczeństwo błędnego koła znika.[7]

Uchwyćmy, co najistotniejsze:
1. Tarski nie próbuje definiować prawdy. Jego celem jest określenie zasad, na których powinno się opierać dociekanie o *prawdziwości zdania* - *„what is for a proposition to be true"*. Dodajmy: zdania języka formalnego (pierwszego rzędu) a nie naturalnego.
2. Istotą koncepcji Tarskiego jest rozdział języka zdań, których prawdziwość nas interesuje (chcemy definiować) od języka, w którym prawdziwość zdań jest nam dana (i z której chcemy skorzystać w budowanej definicji)[8].

12.2 Modele języków i teorii pierwszego rzędu

Zdanie może być prawdą lub fałszem tylko dzięki temu, że jest obrazem rzeczywistości
L. Wittgenstein

Prawdziwość zdania polega na jego zgodności (korespondencji) z rzeczywistością"
A. Tarski

Sens działań matematyków w tym, że budują sformalizowane dowody zdań, które można zapisać w języku matematyki. Są (w większości) przekonani, że dowodzą ich prawdziwości. Ale co to właściwie znaczy?[9].
Słowa Wittgensteina i Tarskiego sugerują, by źródeł prawdziwości zdań szukać w „realnym świecie": zdania matematyczne powinny być interpretowalne w rzeczywistości a ta interpretacja powinna poddawać się testowi na prawdziwość. Jeśli jednak terminem „rzeczywistość" chcemy objąć nie tylko świat fizyczny lecz też świat pojęć stworzonych przez człowieka poza matematyką, to prawdziwość sądów o takim świecie wymyka się wszelkimi procedurom, które pozwalałyby nadać temu pojęciu uniwersalne i niepodważalne znaczenie.
To nie jest domena matematyki lecz filozofii. To oznacza, że nie należy oczekiwać jednoznacznych i powszechnie akceptowanych rozstrzygnieć. Ale matematyce trudno pominąć milczeniem problem prawdziwości, bo bez określenia swego stanowiska traci ona sens.
Postcantorowska i posthilbertowska matematyka XX wieku znalazła genialnie proste rozwiązanie tego dylematu. To koncepcja budowy matematyki, w której dominuje ur-teoria - teoria mnogości. ZFC pośredniczy między specjalistycznymi teoriami matematycznymi a rzeczywistością (str. **??**). To pozwala ograniczyć męczące dyskusje o zgodności z rzeczywistością poszczególnych teorii do dyskusji o relacji między ZFC a rzeczywistością. A to zadanie pracujący matematycy pozostawiają filozofom matematyki - „ludziom pogranicza matematyki". Ustalając aksjomaty ZFC matematycy powiedzieli nie-matematykom: jeśli zgodzicie się uznać prawdziwość tych zdań w waszym świecie (w co się nie wtrącamy), to my mamy narzędzia, by gwarantować prawdziwość wielu innych zdań[10]

[7] „Scientific American", t. 220, 1969, nr.6 w tłum. J. Zygmunta (tłumaczenie dostępne w internecie)

[8] Koncepcja prawdy Tarskiego wpisuje się w ogólne pojęcie „korespondencyjnego pojęcia prawdy". Autorstwo terminu J. Wolański przypisuje Joachimowi, filozofowi brytyjskiemu z początku XX wieku. Źródeł tej koncepcji można doszukiwać się u Arystotelesa. Określenia „korespondencyjna", „sematyczna", „klasyczna" (teoria prawdy) Tarski uznawał za synonimy. Istotą tej koncepcji jest to, że „prawdziwość" jest łącznikiem między słowami a światem.

[9] Na to pytanie usiłowałem odpowiedzieć już w rozdziale „Prawda i dowód". Teraz stawiam je po raz drugi i nieco odmiennie odpowiadam. Ale to nie sprzeczność tylko komplementarność.

[10] Oczywiście upraszczam. Akceptacja matematycznego opisu świata nie bierze się z afirmatywnej akceptacji aksjomatów ZFC. Matematyka zyskała zaufanie, bo wiele jej, odległych od aksjomatów, twierdzeń trafnie opisuje rzeczywistość. Od Euklidesa po mechanikę kwantową.

Dlatego rozwijając szczegółowe teorie matematyczne dbamy o to, by ich język był *interpretowalny* w języku ur-teorii, języku teorii mnogości. Ten warunek spełniają wszelkie teorie pierwszego rzędu. Teoriomnogościową *interpretację języka pierwszego rzędu sygnatury* Σ rozpoczynamy od wskazania pewnego zbioru A. Potem ustalamy interpretację symboli słownika Σ co oznacza, że:

- *każdą stałą $c \in C$ wiążemy z pewnym elementem $c^A \in A$,*
- *każdy n-argumentowy symbol relacyjny r wiążemy z pewnym podzbiorem $r^A \subseteq A^n$,*
- *każdy n-argumentowy symbol operacyjny q wiążemy z funkcją $q : A^n \to A$:*

Strukturę

$$\mathcal{A} = \Big(A, (r^A : r \in R), (q^A : q \in \Omega), (c^A : c \in C)\Big)$$

nazywamy - *teoriomnogościowym modelem języka sygnatury* Σ. Zbiór A to *nośnik* modelu[11].

Korzystając z rekurencyjnej definicji formuł możemy teraz nadać znaczenie dowolnej formule $\phi(x_1, \dots, x_n)$ - związać z nią podzbiór $[[\phi]] \subseteq A^n$ - *„zbiór desygnatów własności opisanej przez formułę ϕ w modelu $\mathcal{A}$:*[12]

- $[[r(x_1, \dots, x_n)]] = r^A$, *dla każdego symbolu relacyjnego $r \in R$,*
- $[[x = y]] = \{(a, a) : a \in A\}$,

dla dowolnych formuł $\phi(x_1, \dots, x_n), \psi(x_1, \dots, x_n)$:

- $[[\phi \wedge \psi]] = [[\phi]] \cap [[\psi]]$, $[[\phi \vee \psi]] = [[\phi]] \cup [[\psi]]$, $[[\phi \to \psi]] = [[\phi]] \to [[\psi]]$,
- $[[\neg\phi]] = \neg[[\phi]] \quad (= A^n \setminus [[\phi]])$,
- $[[\forall_{x_n} \phi(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)]] = \forall_n([[\phi(x_1, \dots, x_n)]])$, $[[\exists_{x_n} \phi(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)]] = \exists_n([[\phi(x_1, \dots, x_n)]])$.

gdzie $\forall_n, \exists_n$ to znane nam już operacje na podzbiorach zbioru A^n (patrz str.82).

Ciąg elementów $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ ma własność opisaną przez formułę $\phi(x_1, \dots, x_n)$ gdy należy do podzbioru $[[\phi]]$ [13].

Możemy teraz „zdefiniować" prawdziwość:

- *formuła $\phi(x_1, \dots, x_n)$ jest prawdziwa w modelu $\mathcal{A}$ gdy $[[\phi]] = A^n$.*

Zdanie to formuły bez wolnych zmiennych. Stąd jego semantyką jest podzbiór *zerowej potęgi kartezjańskiej zbioru A* czyli podzbiór zbioru jednoelementowego[14]. Są tylko dwa takie podzbiory - jeden pusty i jeden niepusty (jednoelementowy) Zdanie ϕ jest *prawdziwe* w modelu $\mathcal{A}$ gdy zbiór $[[\phi]]$ jest niepusty. W przeciwnym przypadku jest *fałszywe*.
Możemy teraz zaproponować *semantyczną definicję prawdziwości*:

zdanie języka pierwszego rzędu sygnatury Σ jest prawdziwe, gdy jest prawdziwe w każdym modelu tego języka.

i wtórną w stosunku do niej definicję modelu teorii:

Model aksjomatycznej teorii pierwszego rzędu T sygnatury Σ to każdy model jej języka, w którym interpretacje jej aksjomatów są zdaniami prawdziwymi.

Nużące, jak wszystkie formalne definicje[15]. Ale wystarczy przyjrzeć się im dokładniej by dostrzec naprawdę ważne subtelności.
To jest definicja „w duchu Tarskiego". Tarski pisał: *„(...) rozważając zagadnienie definicji prawdy (...) musimy używać dwóch różnych języków. Pierwszy z nich jest językiem „o którym mówimy" (...) : poszukiwana definicja prawdy stosuje się do zdań tego właśnie języka. Drugi z nich jest językiem w którym „mówimy o" pierwszym i w terminach którego* PRAGNIEMY SKONSTRUOWAĆ DEFINICJĘ PRAWDY *dla języka pierwszego. Pierwszy z nich to język przedmiotowy, drugi nazywać będziemy*

---

[11] Ten zbiór to wspominany wcześniej „kontekst", zakres zmienności zmiennych (str. 77).

[12] Zakładamy tu - na chwilę! - że w słowniku Σ rozważanego języka nie ma symboli operacyjnych ani stałych. To nieco uprości formalny opis.

[13] Logicy mówią też, że wtedy *formuła $\phi(x_1, \dots, x_n)$ jest spełniona przy wartościowaniu* $[x_1 := a_1, \dots x_n := a_n]$, i piszą $\mathcal{A} \models \phi(x_1, \dots, x_n)[x_1 := a_1, \dots x_n := a_n]$.

[14] Zerową potęgą liczby jest 1. Zerową potęgą zbioru jest zbiór jednoelementowy.

[15] *Poloniusz: Cóż czytasz, mości książę? Hamlet: Słowa, słowa, słowa.*

metajęzykiem." [82] Język przedmiotowy i metajęzyk to RÓŻNE języki.
Metajęzykiem jest język teorii mnogości. Ale przecież ZFC to też teoria pierwszego rzędu. W tym szczególnym przypadku język przedmiotowy i metajęzyk są takie same... . Wbrew Tarskiemu. Jest więc oczywiste, że przedstawiona definicja prawdziwości NIE MOŻE mieć zastosowania do ZFC bo to zjadanie własnego ogona.
Teoriomnogościowcy odpowiedzą, że sens przedstawionej definicji w tym, że czyni „prawdziwość" pojęciem wtórnym w stosunku do równości zbiorów. To prawda. A platonicy dorzucą, że równość zbiorów to w istocie nie pojęcie teoriomnogościowe ale absolutne[16].
Czy rzeczywiście? Oto przykład: bez wątpienia napis $CH_0 = \{x \in \{0,1\}\colon (x=0) \vee CH\}$, gdzie CH to zdanie-hipoteza continuum, to poprawna teoriomnogościowa definicja zbioru[17]. Ale nie mamy żadnych szans na udowodnienie w ZFC równości $CH_0 = \{0,1\}$. Ta równość jest prawdziwa gdy uznamy hipotezę continuum. Uznając jej zaprzeczenie udowodnimy równość $CH_0 = \{0\}$. A przecież możemy ZFC rozszerzyć na każdy z tych dwóch sposobów.
Żadna z dwóch równości $CH_0 = \{0,1\}$, $CH_0 = \{0\}$ nie jest „absolutna"[18]. Co robić?[19]. Zapomnieć o transcedencji i uznać, że „prawdziwość" jest dowodliwością w ramach danej ur-teorii.

> *Jeżeli zapytamy matematyka, dlaczego twierdzi, że pewne zdanie ϕ zapisane na tablicy jest prawdziwe, to nie odpowie on, że jest prawdziwe, ponieważ jego znaczenie jest prawdziwym stwierdzeniem w matematycznym uniwersum. Odpowie, że ϕ* JEST PRAWDZIWE PONIEWAŻ MOŻE BYĆ UDOWODNIONE Z „PODSTAWOWYCH ZASAD" *(„first principles"). Te podstawowe zasady są nazywane „podstawowymi" ponieważ są postrzegane jako oczywiste (...) .*
> *Czy trudno powiedzieć, która zasada jest podstawowa? Jeśli chcemy pozostać na możliwie najniższym poziomie to nie powinno to być rozstrzygane jako pytanie matematyczne. Nie wykluczamy, iż kształt listy zasad podstawowych może być przedmiotem sporu. Tak więc (arbitralnie) ustalamy zdania, które nazwiemy aksjomatami urlogiki i uznajemy ich prawdziwość. I żadna matematyka nie powinna być konieczna do tego, by stwierdzić, czy coś jest aksjomatem.*
> *Jeżeli za urlogikę przyjmiemy pierwszorzędową teorię zbiorów, to zdaniami urlogiki są zdania pierwszego rzędu z jedynym symbolem relacyjnym „$\in$". Aksjomatami są aksjomaty ZFC"[89]* [20]

12.2.1 Jeszcze jedno twierdzenia Gödla

„Aby badać matematykę, badamy jej przybliżenia wyrażone w językach pierwszego rzędu" - R. Drake.

Dla dowolnej pierwszorzędowej T i zdania napisanego w języku tej teorii możemy mówić o *dowodliwości* i *prawdziwości*.

Czy teraz możliwa jest wymarzona przez Hilberta równość *(semantyczna) prawdziwość = (syntaktyczna) dowodliwość*?

Uporządkujmy terminolgię. Przyjmijmy, że (Ax, R_{FOL}) jest pewnym systemem dowodzenia dla logiki pierwszego rzędu[21]. Sformułowanie jakiejkolwiek aksjomatycznej teorii pierwszego rzędu T to w istocie wskazanie nowego, „silniejszego" systemu dowodzenia: zbiór T to aksjomaty *specyficzne*, a zbiór Ax to aksjomaty *logiczne* tego systemu[22]. Powiemy, że:

---

[16] W ZFC stwierdzenie *„zbiory A i B są równe gdy mają te same elementy"* jest aksjomatem.
[17] Hipotezę-continuum można zapisać formalnie, jako zdanie pierwszego rzędu języka teorii mnogości. O tej hipotezie pisałem już na str. **??**.
[18] Do zbioru CH_0 będziemy jeszcze wracać.
[19] W.I.Lenin.
[20] W literaturze mówi się o dowodliwości w ZFC jako o udowodnionej prawdzie - *provably truth*.
[21] Takich systemów jest wiele. Ich opisy można znaleźć w podręcznikach logiki. Wystarczy też przeszukać internetu pod hasłem „first order logic". Konkretny kształt wybranego systemu nie jest dla nas w tej chwili ważny. Powiedzmy tylko, że wszelkie prawa klasycznego rachunku zdań obowiązują w FOL.
[22] Dlaczego tworząc teorię nie dodajemy również „specyficznych" reguł dowodzenia? Nieco upraszczając: w zbiorze reguł każdego hilbertowskiego systemu dowodzenia dla FOL jest reguła odrywania $\frac{A, A\to B}{B}$. Dlatego każdą „specyficzną" regułę dowodzenia $\frac{p_1 \cdots p_k}{k}$ można zastąpić kolejnym aksjomatem specyficznym $p_1 \wedge \ldots \wedge p_k \to k$.

zdanie ϕ jest konsekwencją logiczną (syntaktyczną) T, gdy ma dowód w systemie formalnym $(Ax \cup T, R_{FOL})$. Piszemy wówczas $T \vdash \phi$ i mówimy, że zdanie ϕ jest „dowodliwe w (teorii) T".

zdanie ϕ jest konsekwencją semantyczną T, gdy jest prawdziwe w każdym teoriomnogościowym modelu teorii T. Piszemy wówczas $T \models \phi$ i mówimy, że zdanie ϕ jest „prawdziwe - w (teorii) T".

Implikacja *„to, co dowodliwe, jest prawdziwe"* jest konieczna: jaki sens - poza polityką - ma dowodzenie głupstw (zdań fałszywych)? Ale matematyka nie znosi zbyt wielu konieczności (oczywistości) - ta zależność została udowodniona i funkcjonuje pod nazwą „twierdzenia o zgodności"[23].

Spełnienie hilbertowskiego postulatu sprawowania finitarnej kontroli nad matematyką sprowadza się teraz do pytania czy odwrotna implikacja też jest prawdziwa, czy *„to, co prawdziwe, jest dowodliwe" (w teorii T)*? Jeśli tak jest to teorię T nazywamy *pełną*.

Odpowiedź jest pozytywna: dowolna (niesprzeczna) pierwszorzędowa teoria jest pełna. A zawdzięczamy ją ... Gödelowi.

> Między dwoma twierdzeniami Gödla - o niezupełności arytmetyki i pełności teorii pierwszego rzędu (czyli w szczególności pełności PA) nie ma sprzeczności. Upewnijmy się, że to rozumiemy:
> Pierwsze twierdzenie mówi, że zdania arytmetyczne prawdziwe w POJEDYNCZYM modelu - standardowym modelu liczb naturalnych - nie muszą być dowodliwe.
> A pełność arytmetyki Peano oznacza, że każde zdanie prawdziwe we WSZYSTKICH MODELACH tej teorii, ma dowód w PA.
> To tylko potwierdza, co już wiemy: PA nie jest teorią kategoryczną - ma wiele modeli[24].

Oryginalny dowód twierdzenia o pełności teorii pierwszego rzędu przedstawiony przez Gödla był tak skomplikowany, że zrozumiało go niewielu. Wśród nich zapewne Henkin, który zaproponował własny dowód. W istocie Henkin udowodnił więcej - pokazał, że:

jeżeli teoria jest niesprzeczna, to posiada model teoriomnogościowy.

Istotę dowodu Henkina można opisać tak: jeśli teoria T napisana w języku sygnatury Σ ma model $\mathcal{A}$, to można ją rozszerzyć do maksymalnej i niesprzecznej teorii $T_{\mathcal{A}}$ - zbioru wszystkich zdań prawdziwych w $\mathcal{A}$. Wówczas dowolne zdanie postaci $\exists_x \phi(x) \in T_{\mathcal{A}}$ ma *świadka* - element $a_\phi \in \mathcal{A}$ taki, że formuła $\phi(x)$ jest spełniona przy wartościowaniu $[x := a_\phi]$. Tym samym $\mathcal{A}$ może być traktowany jako model języka sygnatury Σ wzbogaconej o nową stałą c_ϕ a zdanie $\phi(c_\phi)$ (otrzymane z $\phi(x)$ przez zastąpienie zmiennej x stałą c_ϕ) jest prawdziwe w $\mathcal{A}$.

Henkin odwrócił kierunek myślenia: pokazał, że każdą niesprzeczną teorię T można uzupełnić do maksymalnej niesprzecznej teorii T_m napisanej w języku rozszerzonym o nowe stałe i takiej, że każde zdanie egzystencjalne $\exists_x \phi(x)$ w T_m ma świadka - stałą c_ϕ taką, że zdanie $\phi(c_\phi) \in T_m$.
I zrobił to BEZ ZAŁOŻENIA, że teoria T ma model.
Druga część dowodu jest już łatwiejsza(sic!) - Henkin pokazał, jak zbudować poszukiwany model teorii T korzystając ze stałych występujących w zdaniach teorii T_m[25] .

Jak z twierdzenia Henkina wydedukować pełność dowolnej teorii pierwszego rzędu?
Przyjmijmy, że pewne zdanie ϕ jest prawdziwe we wszystkich modelach teorii T a nie jest konsekwencją logiczną tej teorii. Wówczas teoria $T \cup \{\neg\phi\}$ jest niesprzeczna[26] *a więc - na mocy twierdzenia Henkina - ma model $\mathcal{A}$. Ale w tym modelu byłoby prawdziwe zdanie ϕ (gdyż $\mathcal{A}$ to też model T) i jego zaprzeczenie $\neg\phi$. A to jest niemożliwe.*

> Twierdzenie o zgodności i twierdzenie Gödla-Henkina cieszą zwolenników koncepcji matematyki opartej

[23] Kant pisał: *Prawda jest zgodnością* POZNANIA *z jego przedmiotem.* Jeśli „poznaniem" jest dowodzenie w języku teorii a „przedmiotem" - teoriomnogościowe modele, to twierdzenie o zgodności jest realizacją postulatu Kanta.

[24] Oba twierdzenia - o pełności teorii pierwszego rzędu i niezupełności PA - Gödel przedstawił na konferencji we wrześniu 1930 roku w Królewcu. Pierwsze w obecności Hilberta, który - jak się można domyślać - przyjął ten wynik z ogromną satysfakcją. I wyjechał. Tymczasem tuż przed końcem konferencji Gödel wystąpił ponownie, tym razem z twierdzeniem o niezupełności arytmetyki. Może lepiej, że Hilbert wyjechał...

[25] Polecam artykuł G Bezhanishvili'ego *Henkin's method and the Completness Theorem* (internet)

[26] Gdyby była sprzeczna, to $T \cup \{\neg\phi\} \vdash \bot$, czyli $T \vdash \neg\neg\phi$ i tym samym $T \vdash \phi$, wbrew założeniu.

> na teorii mnogości, gdyż mogą uznać je za dowód dwóch fundamentalnych - dla nich - równości:
> *niesprzeczność (teorii) = istnienie (modelu)* *prawdziwość = dowodliwość*
> Dodatkową radość sprawia im fakt, że ten dowód wymaga uznania nieskończoności aktualnej. Wszystko się pięknie składa w całość. Tylko ta niezupełność arytmetyki... . I ta niepewna niesprzeczność ZFC... .

Zbiór zdań dowodliwych w dowolnej teorii aksjomatycznej jest częściowo rekurencyjny. To wiemy. Ale nie jest zbiorem rekurencyjnym. Mówi o tym *twierdzenie Churcha:*

Logika pierwszego rzędu jest nierozstrzygalna

co oznacza, że nie istnieje procedura, która przyjmując jako dane dowolną pierwszorzędową teorię T i zdanie ϕ sformułowane w jej języku rozstrzyga, czy zdanie to jest dowodliwe w T[27]

Church pokazał, że istnienie takiej procedury spowodowałoby istnienie procedury rozstrzygającej dla problemu stopu - udowodnił, że z każdą parą (M, v) - gdzie M to maszyna Turinga a v to słowo (binarne) - można zwązać takie pierwszorzędowego zdania $\phi_{(M,v)}$, które posiada dowód dokładnie wtedy, gdy maszyna M zatrzymuje się rozpoczynając pracę ze słowem v zapisanym na taśmie[28].

Ostatnia uwaga: czy definiowanie prawdziwości poprzez odwołanie do wszystkich modeli teoriomnogościowych jest konieczne, czy nie wystarczy odwołać się do „realnie istniejących" modeli skończonych? (model skończony to model o skończonym nośniku). Kto nam zabroni zanegować obecność aktualnej nieskończoności w matematyce i przyjąć taką oto definicję:

„zdanie języka pierwszego rzędu sygnatury Σ jest prawdziwe, gdy jest prawdziwe w każdym SKOŃCZONYM *modelu tego języka".*

To zachęcające, bo prostsze. Wszystkie podzbiory skończonego zbioru są rozstrzygalne co oznacza, że w dowolnym skończonym modelu spełnianie formuł i prawdziwość zdań są problemami rozstrzygalnymi[29]. To daje nadzieję, że prawdziwość zdań we WSZYSTKICH modelach skończonych jest rozstrzygalna lub przynajmniej dowodliwa. Niestety: B. Trakhtenbrot[30] pokazał, że:

„jeżeli w rozważanym języku pierwszego rzędu mamy choćby jeden symbol relacyjny, który nie jest jednoargumentowy, to zbiór zdań prawdziwych we wszystkich skończonych modelach tego języka nie jest rekurencyjnie przeliczalny".

Skoro zbiór zdań dowodliwych jest rekurencyjne przeliczalny, to ... muszą istnieć zdania prawdziwe we wszystkich modelach skończonych które nie są dowodliwe! Definicja prawdziwości odwołująca się do modeli skończonych wcale nie jest łatwiejsza... .

12.2.2 Ograniczenia języka pierwszego rzędu

Twierdzenia Gödla wskazały nieprzekraczalne ograniczenia języka pierwszego rzędu jako narzędzia opisu (nietrywialnej, czyli zawierającej arytmetykę) matematyki. Analiza koncepcji modelu teoriomnogościowego ujawnia dalsze. O pewnych już wspomnieliśmy (twierdzenie Trakhtenbrota, twierdzenie Churcha o nierozstrzygalności FOL). Dodajmy do tej listy ograniczeń jeszcze dwa.

Równość

Zajmijmy się dotąd pomijanymi termami i formułami-równościami termów.

W modelach teoriomnogościowych termy - schematy nazwowe - interpretujemy jako funkcje: semantyką termu o n zmiennych wolnych $t(x_1, \ldots, x_n)$ w modelu posadowionym na zbiorze A jest

[27] To oczywiście nie wyklucza, że ten problem jest rozstrzygalny dla pewnych teorii czy też pewnych klas teorii pierwszorzędowych.

[28] To ledwie zarys idei dowodu Churcha. Warto dodać, że dowodzie korzysta się z twierdzenia o pełności a „problem stopu" zastępuje się zazwyczaj równoważnym (czyli również nierozstrzygalnym) „problemem zatrzymywania maszyn Turinga rozpoczynających pracę z pustą taśmą". Zainteresowanym zalecam przeszukanie internetu pod hasłem „nierozstrzygalność logiki pierwszego rzędu" lub/i *„undecidability of FOL"*.

[29] Po odrzuceniu aktualnej nieskończoności zbiór CH_0 nie jest już poprawnie zdefiniowany!

[30] Boris (Boaz) Avraamovich Trakhtenbrot (1920-2016) rosyjski logik pochodzenia żydowskiego.

pewna, definiowana rekurencyjnie, funkcja $\hat{t} : A^n \to A$ [31].

Semantykę formuły - równości termów $t_1(x_1, \ldots, x_n) = t_2(x_1, \ldots, x_n)$ definiujemy tak:

$$[[t_1 = t_2]] = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n : \widehat{t_1}(a_1, \ldots, a_n) = \widehat{t_2}(a_1, \ldots, a_n)\}$$

> Niech to nam nie umknie: równość w teoriach pierwszego rzędu jest pochodną równośći w ZFC, która NIE JEST „absolutna" lecz jest pojęciem definiowanym wewnątrz teorii mnogości[32].

Równość to relacja o szczególnym statusie. Widać to w aksjomatyce FOL - są tam aksjomaty gwarantujące *zwrotność, symetryczność, przechodniość i kongruentność równości*[33] i aksjomat gwarantujący „wymienność" równych termów w formułach: $(t_1 = t_2 \to \phi(\ldots, t_1, \ldots) \leftrightarrow \phi(\ldots, t_2, \ldots)$ dla dowolnej formuły ϕ . Dlatego mówiąc o FOL często używamy bardziej precyzyjnego określenia: *logika pierwszego rzędu z równością.*

Czy uprzywilejowanie równości jest konieczne? Dlaczego nie traktujemy równości jako jednego z wielu równouprawnionych symboli relacyjnych a jej pożądaną interpretację nie wymusimy przez odpowiednie aksjomaty? [34].

To niemożliwe. Oto przykład: w języku, którego słownik to jeden jedyny dwuargumentowy symbol relacyjny r niesposób wskazać formułę bez równości, która jest spełniona w modelu jednoelementowym i nie jest spełniona w dwuelementowym modelu $\mathcal{A} = (\{a, b\}, r^A)$, gdzie $r^A = \{a, b\} \times \{a, b\}$. Natomiast formuła $\forall_{x,y}\, x = y$ jest spełniona tylko w modelu jednoelementowym... .

„Zamierzonej interpretacji" równości nie da się zagwarantować „syntaktycznie".

Modele teoriomnogościowe wobec ... nieskończoności

Dowód to konstrukcja finitarna - w jakimkolwiek dowodzie prawdziwości zdania w tej teorii korzystamy tylko ze skończenie wielu aksjomatów[35]. Dlatego sprzeczna teoria - taka, w której dowodliwe jest zdanie fałszywe - musi zawierać skończoną i sprzeczną podteorię. Odwróćmy to: *teoria jest niesprzeczna, jeśli tylko każdy jej skończony fragment jest niesprzeczny.* Teraz, dzięki henkinowskiej równości *„niesprzeczność teorii = istnienie modelu"*, możemy sformułować *twierdzenie o zwartości*:

Jeżeli każdy skończony fragment teorii ma model, to i cała teoria ma model[36]

Stąd

każda teoria T, która ma dowolnie duże modele skończone, musi mieć ... model nieskończony!

- wystarczy rozważyć teorię $T_\infty = T \cup \{\phi_n : n \in N\}$, gdzie

$$\phi_n \equiv \exists_{x_1,\ldots,x_n} \forall_{i,j \leqslant n}\, x_i \neq x_j$$

Zdanie ϕ_n jest prawdziwe w modelu $\mathcal{A}$ wtedy, gdy ma on więcej niż n elementów. Zatem każdy skończony fragment teorii T_∞ ma model. Tym samym - właśnie na mocy twierdzenia o zwartości -

---

[31] Semantykę najprostszych termów - $q(x_1, \ldots, x_n)$ gdzie q to n-argumentowy symbol operacyjny - określamy definiując model. Krok rekurencyjny: gdy $t(x_1, \ldots, x_n) = q(t_1, \ldots, t_m)$, to $\hat{t}(a_1, \ldots, a_n) = q^A(\widehat{t_1}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, \widehat{t_m}(a_1, \ldots, a_n)$.

[32] Więcej o tym już wkrótce. Teraz powiedzmy tylko, że teoriomnogościowa równość jest zadekretowana w postaci *aksjomatu ekstensjonalności.* Ważne: skoro funkcje-semantyki termów nie muszą być obliczalne to zbiór $[[t_1 = t_2]]$ - nie musi być rozstrzygalny ani nawet sprawdzalny.

[33] Patrz podrozdział „Więcej niż przykład - równoważność kontrolowana" - str. 26 .

[34] Wypisane wyżej aksjomaty tego nie gwarantują. Gdyby równość w aksjomatyce Peano była tylko relacją spełniającą te aksjomaty, to modelem takiej teorii byłby np. zbiór $\mathbf{N}$ z operacjami następnika, dodawania i mnożenia, w którym semantyką „równości" jest relacja $\mathbf{mod}2$ - $m\,\mathbf{mod}2\,n$ *wtw* $m - n$ *jest liczbą parzystą.*

[35] Nie wyprowadzajmy stąd jednak wniosku, że każda teoria może być zastąpiona przez skończoną teorię!

[36] Analogiczne twierdzenie obowiązuje też dla logiki zdaniowej - *„zbiór formuł zdaniowych jest spełniony, jeśli tylko każdy jego skończony podzbiór jest spełniony"*. Dowód tego twierdzenia wymaga jedynie wykorzystania indukcji i pewnej pomysłowości. Baaardziej zaawansowanym podpowiem, że ten wynik jest też konsekwencją zwartości przestrzeni topologicznej $\{0, 1\}^\omega$ (przestrzeni Cantora).

Większość matematyków kojarzy „zwartość" z topologią: (*„topologia jest zwarta, jeżeli część wspólna dowolnej nieskończonej rodziny zbiorów domkniętych jest pusta tylko wtedy, gdy pewna jej skończona podrodzina ma przekrój pusty"*). Jeśli oznaczymy przez $Mod(T)$ klasę modeli teorii T, to twierdzenie o zwartości możemy zapisać tak:

$Mod(T) = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad$ *istnieje skończony podzbiór* $T_0 \subset T$ *taki, że* $Mod(T_0) = \emptyset$

cała teoria T_∞ ma model. A ten model musi być nieskończony!

SKOŃCZONOŚĆ NIE JEST OPISYWALNA W JĘZYKU PIERWSZEGO RZĘDU [37]

Co więcej, w języku pierwszego rzędu NIE POTRAFIMY ROZRÓŻNIAĆ RÓŻNYCH RODZAJÓW NIESKOŃCZONOŚCI. Mówi o tym *twierdzenie Löwenheima-Skolema*[38]*:*

„Jeśli teoria pierwszego rzędu ma jakikolwiek model nieskończony, to ma modele nieskończone dowolnej mocy”.

Uświadomijmy sobie (najprostsze) konsekwencje:

- istnieje ciało przeliczalne, które ma wszystkie pierwszorzędowe własności ciała liczb rzeczywistych[39]*,*

- istnieje obiekt mocy continuum (i każdej mocy większej), który jest modelem aksjomatyki Peano - łącznie z aksjomatem indukcji!

- jeśli teoria mnogości ma model, to ma również model przeliczalny. W tym modelu muszą być... zbiory nieprzeliczalne. Sprzeczność?[40]

Twierdzenie Gödla o niezupełności pokazało, że język pierwszego rzędu jest zbyt słaby by jednoznacznie opisywać nieskończone obiekty matematyczne. Twierdzenia Löwenheima-Skolema idzie dalej: mówi, że ten język jest „ślepy na kolory nieskończoności”: nie widzi cantorowskiej skali nieskończoności[41].

12.3 Modele teoriomnogościowe i nominalizm

Jestem nominalistą (...). Jestem radykalnym anty-platonikiem. Reprezentuję surowy naiwny rodzaj anty-platonizmu (...) . Bardzo trudno żyć z tą postawą filozoficzną (...) zwłaszcza, gdy coś zwane teorią mnogości stanowi jego hobby. *A. Tarski*[42]

Twierdzenie Gödla mówi, że bez wskazania odpowiedniego rozszerzenia teorii ZFC nie można orzec, czy jest ona niesprzeczna. Ponieważ *niesprzeczność ZFC = istnienie modelu ZFC*” to nie można - bez dodatkowych założeń - wskazać jakiegokolwiek modelu tej teorii. Nie możemy powiedzieć CZYM JEST ZBIÓR. Tymczasem definiując modele teoriomnogościowe teorii pierwszego rzędu operujemy pojęciem zbioru bez żadnych zahamowań. Czym jest model jeśli nie wiemy, czym jest zbiór?

Oczywiście, można wszystko tłumaczyć wiarą w niesprzeczność ZFC, ale to nie zmienia faktu, że nie wiemy czym są zbiory. Jeśli tak, to czym jest teoriomnogościowy model teorii T i jak rozumieć stwierdzenie *„zdanie ϕ jest prawdziwe w teoriomnogościowym modelu teorii T”?*

Trochę dużo tych pytań na które nie znamy odpowiedzi... . Rozwiązaniem jest nieco inne rozumienie definicji teoriomnogościowego modelu teorii.

Model teorimnogościowy języka pierwszego rzędu to pewna TRANSLACJA *formuł tego języka na język teorii mnogości (spełniająca warunki określone w pierwotnej definicji modelu).*

Pokażemy jak to rozumieć na przykładzie *teorii grup Gr*. To teoria pierwszego rzędu której słownik zawiera tylko dwa symbole: operacji binarnej - „+” i stałej - „0”. Ta teoria to trzy zdania:

- $\forall_{x,y,z}\, x + (y + z) = (x + y) + z,$
- $\forall_x\, x + 0 = 0 \wedge 0 + x = x$
- $\forall_x \exists_y\, x + y = 0 \wedge y + x = 0$

---

[37]Dokładniej: w języku pierwszorzędowej teorii T nie można sformułować warunku gwarantującego skończoność jej teoriomnogościowych modeli (co jednak nie znaczy, że teorii mnogości nie można zdefiniować zbiorów skończonych).

[38]Albert T. Skolem (1887 -1963) – matematyk norweski. Leopold Löwenheim (1878 - 1957) - matematyk niemiecki.

[39]są to obliczalne liczby rzeczywiste, których jest przeliczalnie wiele... (patrz przypis na str. 148)

[40]To *paradoks Skolema*. Wrócimy do niego później.

[41]Logicy mówią, że teoria jest *kategoryczna* gdy ma jeden model - z dokładnościa do izomorfizmu. Żadna teoria pierwszego rzędu posiadająca nieskończony model nie jest kategoryczna. Dlatego mówi się też o teoriach *kategorycznych w mocy α (gdzie α to liczba kardynalna)* - takich, które mają jeden model mocy α.

[42]Cytuję za J. Wolańskim ([93], str. 183).

Jednak większość pracujących matematyków używa takiej definicji: *„grupa to dowolny zbiór G wraz z funkcją $\oplus : G \times G \to G$ i wyróżnionym elementem $\tilde{0} \in G$ takimi, że:*
- $\forall_{x,y,z \in G}\, x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$,
- $\forall_{x \in G}\, x \oplus \tilde{0} = \tilde{0} \wedge \tilde{0} \oplus x = x$
- $\forall_{x \in G} \exists_{y \in G}\, x \oplus y = \tilde{0} \wedge y \oplus x = \tilde{0}$

Ta nowa definicja to zapisana w uproszczony sposób TRANSLACJA aksjomatów teorii *Gr* na - nieco wzbogacony - język teorii mnogości[43]. To wzbogacenie polega na wprowadzeniu dodatkowych stałych $G, \oplus, \tilde{0}$. Trójka $(G, \oplus, \tilde{0})$ to wyznacza translację języka teorii grup na język (wzbogaconej o te stałe) teorii mnogości.

Twierdzenie o pełności wysłowimy teraz tak:

„jeśli translacja zdania Z ma dowód w $ZFC + GrSet$, to zdanie Z ma dowód w Gr”.

(odwrotna implikacja jest oczywiście też prawdziwa)

Nowowprowadzone stałe reprezentują dowolny model teorii grup w jakimkolwiek (potencjalnie istniejącym) modelu ZFC w tym sensie, że w $ZFC + GrSet$ dowodliwe są wszystkie zdania sformułowane w języku teorii grup i prawdziwe w teorii grup *Gr* (dokładniej: translacje takich zdań). Dlatego większość mainstramowych matematyków utożsamia teorię grup z jej teoriomnogościowa translacją.
Teoria $ZFC + GrSet$ umożliwia badanie grup w „teoriomnogościowym kontekście”: można poszukiwać dowodów zdań sformułowanych w języku teorii mnogości rozszerzonym o zestaw stałych $G, \oplus, \tilde{0}$ (których jest więcej niż translacji zdań sformułowanych w języku teorii grup).
Można też „teoriomnogościowo” wzbogacać teorię $ZFC + GrSet$. Np. dodając jako aksjomat zdanie *„G jest skończonym zbiorem”* utworzymy aksjomatykę *teorii grup skończonych*. To umożliwia dowodzenie - w ZFC - „prawd” dotyczących wyłącznie grup skończonych[44].

O *konkretnych* teoriomnogościowych modelach teorii grup można mówić wtedy, gdy stałe $G, \oplus, \tilde{0}$ są jednoznacznie definiowalne w ZFC. Np. gdy G to zbiór liczb całkowitych, $\oplus$ to zwykłe dodawanie a $\tilde{0}$ to zero.

Nic się nie zmieni gdy teorię *Gr* zastąpimy dowolną teorią pierwszego rzędu T: „tak samo” skonstruujemy teorię $ZFC + TSet$ - rozszerzenie teorii ZFC o tłumaczenia aksjomatów teorii T..

Takie nominalistyczne rozumienie teoriomnogościowego modelu teorii T prowokuje do utożsamienia „prawdziwości” zdania ϕ (w modelach teorii T) z jego dowodliwością w $ZFC + TSet$.
Dlatego pragmatycznie nastawieni mainstreamowi matematycy nie zawracają sobie głowy subtelnościami związanymi z rozróżnianiem języków teorii szczególnych i języka teorii mnogości - „nie pracują z teorią T lecz z teorią $ZFC + TSet$”. To utwierdza w przekonaniu, że „teoria mnogości to raj”.

Filozoficzne rozterki związane z niezupełnością ZFC i jej niepewną niesprzecznością są obce większości ciężko pracujących matematyków. Teoria mnogości i jej język to ich „rzeczywistość”. Są przekonani, że dowodząc w ZFC znajdują uniwersalne prawdy. Zbiorowa hipnioza? Niezamierzony efekt jednostronnej edukacji?

To postawa większości, ale nie wszystkich. Skolem pisał: *„(...) Sądziłem, że jest tak jasne, iż aksjomatyzacja w języku zbiorów nie jest zadowalającą ostateczną podstawą matematyki, że matematycy w większości nie będą się nią zbytnio interesować. Ale ostatnio zauważyłem (...) że wielu matematyków myśli, iż aksjomaty teorii mnogości stanowią podstawę* IDEI MATEMATYKI*; dlatego (...) nadszedł czas na opublikowanie krytyki” [16]*

Skolem był matematycznym konstruktywistą[45]. Czy konstruktywiści zaproponowali swoją defi-

[43] „Uproszczony”, bo np. wierne tłumaczenie drugiego aksjomatu teorii *Gr* powinno wyglądać tak:
$\forall_x\, (x \in G) \to (x \oplus \tilde{0} = x) \wedge (\tilde{0} \oplus x) = x)$

[44] Warunek „skończoności grupy” można opisać w języku teorii mnogości ale nie w języku teorii *Gr*. *Klasyfikacja prostych grup skończonych* to jedno z największych osiagnięć algebry w XX wieku. Pełna klasyfikacja tych grup to dzieło ponad stu autorów zawarte w ok. 500 pracach liczących w sumie kilkanaście tysięcy stron (C.Buciński, M.Łuba *O klasyfikacji skończonych grup prostych* (http://main3.amu.edu.pl/wiadmat/037-052.cb.wm38.pdf)).

[45] Dokładniej: był jednym z pionierów matematycznego *finityzmu*.

nicję modelu?
Takie próby podejmowano. *Logika Herbranda* różni się od logiki pierwszego rzędu wyłącznie definicją modelu. Modele są tu przeliczalne a każdy element takiego modelu ma swoją nazwę[46]. Zainteresowanych odsyłam np. na stronę internetową *http://www.cs.uic.edu/ hinrichs/herbrand/html/.*
Ale nie oczekujmy zbyt wiele, bo - jak piszą Autorzy strony - *„(...) part of the motivation for building the website was the frustration brought about by looking for and failing to find general results on this logic".*

Pora na puentę: *„Prawdę jako relatywną własność zdań pozostających w określonym stosunku do rzeczywistości nazywamy prawdą materialną, w odróżnieniu od prawdy charakterystycznej dla języków sformalizowanych nauk dedukcyjnych, której istota wyraża się w spełnianiu funkcji zdaniowej"* - wierzę że teraz to zdanie jest bardziej zrozumiałe niż przed lekturą tego rozdziału[47].

12.3.1 Dodatek: intuicjonistyczna logika temporalna (tekst roboczy)

The importance of intuitionistic temporal logics in Computer Science and Artificial Intelligence has become increasingly clear in the last few years.[48]

Intuicjonistyczna logika temporalna to - zgodnie z nazwą - swego rodzaju fuzja logiki intuicjonistycznej i temporalnej. Tę pierwszą już poznaliśmy. A poznanie drugiej należy rozpocząć od choćby skrótowego przedstawienia *logiki modalnej.*
(Zdaniowa) logika modalna to rozszerzenie klasycznej logiki zdaniowej. Jej „minimalistyczna" wersja to *logika* **K** Składnia języka tej logiki to rozszerzenie języka klasycznej logiki o dwa nowe (unarne) konstruktory - $\Box$ i $\Diamond$ - których zamierzoną interpretacją są stwierdzenia *„jest konieczne" ($\Box$)* i *„jest możliwe" ($\Diamond$).* Dodajemy też nowy aksjomat - $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ oraz nową regułę dowodzenia:

$$\frac{p}{\Box p}$$ [49]

> Wskazanie zamierzonej interpretacji konstruktorów $\Box$ i $\Diamond$ trzeba traktować z pewną rezerwą. Nie jest przecież pewne, że wszyscy interpretujemy „konieczność" i „możliwość" tak samo. Na przykład „myśląc klasycznie" (dychotomicznie) gotowi jesteśmy uznać równoważność $\neg\Box\neg p \equiv \Diamond p$. Ale czy jesteśmy tego równie pewni, gdy odrzucimy prawo wyłączonego środka?[50]
> Jest odwrotnie: to właśnie formalizacja logiki i jej aksjomatyzacja USTALA jednoznacznie zależności między konstruktorami logicznymi. A jeśli tak, to trudno oczekiwać jednomyślności.
> I tak powstała dżungla logik... .

Logiki temporalne to pewien rodzaj logik modalnych tworzone po to, by w ocenie wartosci logicznej zdań uwzględnić czas. Pomińmy jednak (ciekawy) wątek filozoficzny i spróbujmy naszkicować matematyczną, sformalizowaną wersję tej logiki.
A.N.Prior – prekursor logiki temporalnej - zdefiniował tzw. *tense logic*[51] rozszerzył język klasycznej logiki zdaniowej dodając do jego składni cztery nowe konstruktory:

Hp – „było (w przeszłości) zawsze tak, że p"[52]
Pp – „było kiedyś tak, że p"
Gp – „będzie zawsze tak, że p",

[46]Jeśli w sygnaturze języka znajdą się symbole operacyjne, to nośnikiem modelu Herbranda jest *termów domkniętych.* Na marginesie: zachęcam do zapoznania się z *twierdzeniem Herbranda.*

[47]M.Wesoły, „Uwagi o arystotelesowskiej koncepcji prawdy", Studia Filozoficzne 11, s. 117–125, 1977.

[48]To zdanie z pracy *Exploring the Jungle of Intuitionistic Temporal Logics, J. Boudou, M Diegue, D.Fernandez-Duque, P.Kremer* udostępnionej w internecie 30.12.2019 roku, na którą trafiłem poszukując wsparcia w próbach zorientowania się w dżungli nieklasycznych logik.

[50]W cytowanej na wstępie pracy konstruktor $\Box$ jest kojarzony ze słowem *„henceforth" - odtąd* natomiast konstruktor $\Diamond$ - z *„eventually" (ostatecznie).*

[51]W języku polskim - logika czasów gramatycznych (prawdopodobnie).

[52]Tzn. zdanie *Hp* jest prawdziwe, gdy zdanie *p* było prawdziwe w każdej chwili w przeszłości. Podobnie należy rozumieć opisy pozostałych konstruktorów.

Fp – „będzie kiedyś tak, że p”.[53]
Korzystając z tych konstruktorów łatwo opiszemy kolejne intencjonalnie związane z czasem: „zawsze” - $Ap \equiv Hp \wedge p \wedge Gp$ oraz „kiedyś” - $Pp \wedge p \wedge Fp$.

Dodamy też nowe prawa - aksjomaty tej teorii:
$(G(p \to q) \to (Gp \to Gq)$, $\qquad H(p \to q) \to (Hp \to Hq)$
$p \to GPp$, $\qquad p \to HFp$

i dwie nowe reguły dowodzenia:

$$\frac{p}{Gp} \quad , \quad \frac{p}{Hp}$$

(przyjmując tę interpretację zaakceptujemy równoważności $Hp \equiv \neg P \neg p$, $Gp \equiv \neg F \neg p$. Można więc ograniczyć się do wprowadzenia dwóch funktorów czasowych - P i F.)

Kiedyś może dokończę.... Gdy uda się napisać coś o „toposach temporalnych”.

[53]Również w tym przypadku - jeśli akceptujemy prawo wyłączonego środka! - możemy wyeliminowć dwa z tych czterech konstruktórów, czyli uznac równnoważności $Pp \equiv \neg H \neg p$, $Gp \equiv \neg G \neg p$.

Rozdział 13

Pewna szczególna teoria - ZFC

Matematyka jest logiką nieskończonego. Ernst Zermelo
Set Theory is the mathematical science of the infinite. It studies properties of sets, abstract objects that pervade the whole of modern mathematics. The language of set theory, in its simplicity, is sufficiently universal to formalize all mathematical concepts and thus set theory, along with Predicate Calculus, constitutes the true Foundations of Mathematics.
Stanford Encyclopedia of Philosophy

Aksjomatyka teorii mnogości, w jej dzisiejszym kształcie, nie jest dziełem Cantora. Cantor operował zbiorami w sposób bliższy temu, co dziś nazywamy *naiwną* teorią mnogości. Ujawnienie tych naiwności (np. omawianego wcześniej paradoksu Russella „odkrytego” w 1901 roku) uświadomiło potrzebę ścisłej aksjomatyzacji tej teorii.
Pierwszą dojrzałą propozycję aksjomatyzacji przestawił E. Zermelo w 1908 roku.
Aksjomaty, które ukształtowały się w wyniku tych prób i zyskały społeczną (matematyków) akceptację, noszą nazwę aksjomatów Zermelo-Fraenkela (ZF). Miało to miejsce około 1930 roku. Jeśli dodatkowo uwzględnimy słynny aksjomat wyboru, to otrzymamy tzw. aksjomatykę ZFC.

Struktura języka teorii mnogości

Słownik języka ZFC to jeden jedyny dwuargumentowy symbol relacyjny „$\in$”[1]. Stąd formuły atomowe w tym języku to albo $x = y$ albo $x \in y$, gdzie x i y to zmienne przedmiotowe.
Relację „$\in$” zwykliśmy nazywać *relacją przynależności*[2]. Jeśli $x \in y$ to mówimy: *„(zbiór) x jest elementem (zbioru) y”* lub *(zbiór) x należy do (zbioru) y”*[3]. .
Równość jest wtórna w stosunku do relacji przynależności. Mówi o tym jeden z aksjomatów ZFC - *aksjomat ekstensjonalności*: $(a = b) \leftrightarrow \forall_c\,(c \in a \leftrightarrow c \in b)$ [4]

Termin „teoria zbiorów” jest wielce mylący. Ta teoria to pierwszorzędowy OPIS TYCH CECH RELACJI PRZYNALEŻNOŚCI KTÓRE SĄ NIEZBĘDNE, BY OGÓŁ OBIEKTÓW POWIĄZANYCH TĄ RELACJĄ NAZWAĆ ZBIORAMI.
Matematycy nie badają przedmiotów, lecz stosunki między przedmiotami; z ich punktu widzenia dane przedmioty można zastąpić innymi, jeśli tylko nie zmieni to stosunków między nimi. Nie interesuje ich treść, a tylko forma - H. Poincare [57].
Teorię, która ma być podstawą matematyki, sprowadzono do opisu cech jednej jedynej relacji... . Być może zdecydowało o tym przekonanie o transcedentnym istnieniu idealnego świata matematyki.
Idealnego, czyli - jak chcieli Spinoza i Leibniz - wywodzącego się z „jednej podstawowej zasady”.

[1] Ten symbol po raz pierwszy pojawił się w 1889 w pracy G. Peano.
[2] To jest niewymuszona, lecz *zamierzona* interpretacja symbolu „$\in$”. Czy tego chcemy czy nie, to arbitralne przypisanie symbolowi wybranego znaczenia ukierunkowuje (zawęża) nasze myślenie o teorii mnogości i jej modelach.
[3] Elementem zbioru może być tylko inny zbiór.
[4] ZFC można rozpatrywać jako teorię bez równości traktując równość jako „skrót” formuły $\forall_c\,(c \in a \leftrightarrow c \in b) \wedge \forall_d\,(a \in d \leftrightarrow b \in d)$.

Skutkiem tych filozoficznych założeń jest do bólu ockhamowska składnia „czystego" języka teorii mnogości. „Do bólu" gdyż oznacza to lekceważenie pragmatyki języka, jego użyteczności. Formuły tego języka odpowiadające nawet najprostszym pojęciom to niemiłosiernie długie i najeżone zagnieżdżonymi kwantyfikatorami napisy. To nie do przyjęcia, jeżeli ZFC ma być nie tylko przedmiotem filozoficznej refleksjii ale też podstawowym językiem pracujących matematyków. A przecież *„(...) most ordinary mathematical proofs are not written in any formal system: they are just written in natural language using accepted methods of reasoning"*[5]. Luka między językiem ur-teorii a językiem naturalnym nie powinna być zbyt duża.
Tę lukę skutecznie wypełniono dodając do czystego języka teorii mnogości jego *powłokę*. I to w tej dodanej warstwie języka znajdziemy bogatą siatkę *pojęć teoriomnogościowych* - nazw, formuł nazwowych itp. - służących robotnikom matematyki[6]
Nieco upraszczając, do budowy tej powłoki używamy *stałych* i *termów* ale w tej szczególnej sytuacji lepiej mówić o *nazwach* i *formułach nazwowych* - tak, jak chciał Tarski (str.75).

Aksjomat zbioru pustego to zdanie $\exists_x \forall_y \neg(y \in x)$ - *„istnieje zbiór, do którego nic nie należy"*.
Taki zbiór jest jedyny, co pozwala wprowadzić do języka stałą - nazwę „$\emptyset$".
Można teraz niemiłą formułę $\exists_x(y \in x \wedge \forall_z \neg(z \in x))$ zastąpić miłą - $y \in \emptyset$.

> Dla matematycznego realisty dekretacja istnienia pustego zbioru jest niebłahym problemem ontologicznym. Dla nominalisty - zręcznym zabiegiem znacząco podnoszącym jakość tworzonego języka.

Korzystając z *aksjomatu nieskończoności*, wprowadzimy do języka nazwę-symbol „**N**" identyfikującą - w każdym modelu ZFC - zbiór liczb naturalnych[7]. Następnie możemy wprowadzić nazwy identyfikujące podstawopwe zbiory liczbowe - $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathcal{R}$.

Aksjomat pary[8] pozwala wprowadzić do języka ZFC formułę nazwową $\{x, y\}$. Napis $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ to nazwa, instancja tej formuły. A powszechnie używane oznaczenia *pary uporządkowanej* - (x, y) - to skrót złożonej formuły nazwowej $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

> Nzawa identyfikuje - w każdym modelu ZFC - pojedynczy zbiór. Formuła nazwowa identyfikuje pewną klasę zbiorów. Np. formuła $\{x, y\}$ identyfikuje klasę wszystkich dwuelementowych zbiorów.
> Możemy też powiedzieć: nazwa reprezentuje w języku ZFC pojedynczy zbiór a formuła nazwowa reprezentuje w tym języku klasę zbiorów.

Aksjomat sumy - $\forall_x \exists_y \forall_z (z \in y) \leftrightarrow \exists_t ((t \in x) \wedge (z \in t))$ - i *aksjomat zbioru potęgowego* - $\forall_a \exists_s (x \in s) \Leftrightarrow (\exists_b (b \in a) \wedge (x \in b))$ - pozwalają na wprowadzenie do języka formuł nazwowych postaci $\bigcup(t_i : i \in x)$ oraz 2^x.
Niewyczerpywalnym źródłem formuł nazwowych jest *aksjomat wyróżniania (komprehensji)*[9]:
dla dowolnej formuły teoriomnogościowej $\phi(x, y_1, \dots, y_k)$:

$$\forall_{y_1,\dots,y_k} \forall_a \exists_b \forall_x ((x \in b) \leftrightarrow (x \in a) \wedge \phi(x, y_1, \dots, y_k)).$$

Ten aksjomat pozwala związać z każdą formułą teoriomnogościową $\phi(x, y_1, \dots, y_k)$ formułę nazwową

$$\{x \in a : \phi(x, y_1, \dots, y_k)\}$$

---

[5]Wpis w dyskusji o twierdzeniu Parisa-Harringtona na forum internetowym.

[6]O „jądrze" i „powłoce" języka pisaliśmy w rozdziale „Obliczalność" (str 138). Pojęcia powłoki to tzw. *cukier syntaktyczny*. Aby uczynić zadość wymogom naukowej powagi, zamiast o dosypywaniu cukru winniśmy mówić o *zachowawczym (konserwatywnym)* rozszerzaniu języka - takim, które nie wpływa na pojęcie modelu języka poddanego temu zabiegowi.

[7]Aksjomat nieskończoności to zdanie $ind(x) \equiv (\emptyset \in x) \wedge \forall_a (a \in x) \rightarrow (a \cup \{a\}) \in x$. Zbiór liczb naturalnych to najmniejszy zbiór induktywny: $nat(x) \equiv ind(x) \wedge \forall_y (ind(y) \rightarrow x \subseteq y)$.

[8]$\forall_{x,y} \exists_z (\forall_t (t \in z) \Leftrightarrow ((t = x) \vee (t = y))$. Zbiór którego elementami są zbiory a i b oznaczamy przez $\{a, b\}$.

[9]Żadne ze znanych mi objaśnień znaczenia słowa *komprehensja* nie jest dla mnie przekonujące. Najbardziej podoba mi się słownikowe objaśnienie angielskiego słowa *comprehension*: to *zasięg* a także... *rozumienie*(!) (dodajmy smaczek: filozof M. Dummett każe rozróżniać „rozumienie" od zrozumienia (*understanding*)).

(parametry tej formuły nazwowej to zmienne $a, y_1, \dots y_k$.). Np. napis $a \times b$ (*„iloczyn kartezjański zbiorów a i b”*) to skrót zastępujący złożoną formułę nazwową:

$$a \times b = \{x \in 2^{2^{a \cup b}} : \exists_c \exists_d \, c \in a \land d \in b \land x = (c, d)\}$$

Zbiory z indywiduowymi nazwami są dostępne w tym sensie, że można formułować teoriomnogościowe twierdzenia odnoszące się do nazwanych „zbiorów”. Dlatego mamy twierdzenia o zbiorze liczb naturalnych (rzeczywistych itp.). Dlatego można uważać arytmetykę Peano za część teorii mnogości[10]. Podobnie „dostępne” są klasy zbiorów reprezentowane przez formuły nazwowe - można formułować twierdzenia dotyczące takich klas. Taką klasą są np. zbiory przeliczalne (wśród których jest nieprzeliczalnie wiele zbiorów bez indywiduowych nazw) a twierdzeniem *„iloczyn kartezjański dwóch zbiorów przeliczalnych jest przeliczalny”*.

Formuły nazwowe i nazwy indywiduowe pełnią tu rolę taką jak termy i stałe - można je użyć zarówno do budowy złożonych formuł nazwowych i formuł teoriomnogościowych. Np. w języku powłoki poprawny formalnie (i czytelny) jest napis - równość nazw $\{\emptyset\} = \{x \in \{0, 1\} \colon (x = 0) \lor CH\}$, gdzie CH to zdanie-hipoteza continuum[11].

> Zatrzymajmy się. „Zbiór” $\{x \in \{0, 1\} : (x = 0) \lor CH\}$ choć ewidentnie skończony, nie jest rozstrzygalny!
> No bo czy 1 to element tego „zbioru”?
> Sprzeczność? W żadnym razie. To nie zbiór, to nazwa. W ZFC nie można dowieść że ma on jeden (czy też dwa) elementy. Nieporozumienie wynika stąd, że utożsamiamy nazwę (pojęcie językowe) z jej desygnatem (którego istnienie wymaga wskazania modelu ZFC).
> To wszystko.

Dlaczego tyle uwagi poświęcamy językowi teorii mnogości? Dlatego, że ... nie mamy nic innego. Matematycy teoriomnogościowi PRACUJĄ TYLKO I WYŁĄCZNIE W JĘZYKU teorii mnogości. Wszelkie dowody istnienia uprawniają jedynie do niesprzecznego rozszerzenia języka budowanego wokół „czystego” języka teorii mnogości. „Istnienie to niesprzeczność” - tak, jak chciał Hilbert[12]. Doprecyzyjmy: istnienie matematyczne to udowodniona - w ZFC - niesprzeczność.

Źródła niekonstruktywizmu ZFC

Aksjomaty ZFC dekretujące istnienie pewnych zbiorów kreują ontologię tej teorii. Przyjrzyjmy się dwóm z tych aksjomatów.

Aksjomat wyróżniania wydaje się oczywisty (i konieczny, jeśli pamiętamy o paradoksie Russella)[13]. Ale gdy $\phi(x)$ jest formułą dla której problem spełniania nie jest rozstrzygalny (sprawdzalny) to o zbiorze $B_\phi = \{x \in A \colon \phi(x)\}$ wiemy niewiele. Wprawdzie w jednostkowych przypadkach potrafimy rozstrzygać czy element zbioru A należy do B_ϕ, ale nie mamy uniwersalnej procedury pozwalającej rozstrzygająco odpowiadać na to pytanie. Dlatego „myśląc konstruktywnie” można proponować różne modyfikacje aksjomatu wyróżniania. Np. uznać, że do B_ϕ należą te elementy A, dla których istnieje dowód przynależności do podzbioru B_ϕ. Więcej: można uznać, że elementem jest para - $((a \in A)$, *dowód przynależności a do* $B_\phi)$[14].

W odróżnieniu od aksjomatu wyróżniania, *aksjomat wyboru* budził „od zawsze” wątpliwości, choć jego sformułowanie jest proste: *dla każdej rodziny niepustych i rozłącznych zbiorów* $(a_i : i \in I)$ *istnieje zbiór* $b \subset \bigcup_{i \in I} a_i$ *który ma dokładnie jeden wspólny element z każdym ze zbiorów* a_i.

To jest oczywista oczywistość gdy myślimy o skończonych rodzinach skończonych zbiorów. Ale nie w świecie zbiorów nieskończonych - szczególnie gdy patrzy się na jego konsekwencje wśród

[10] *„ZFC jest bogatsza niż PA” - str.* **??**.

[11] Ten „zbiór” (nazwę zbiorów) spotkalismy już na str. 171.

[12] Dodatkowym powodem naszego zainteresowania językiem ZFC jest to, że choć matematycy używają go na codzień, to większość raczej nie zastanawia się nad jego strukturą. Nie pierwsi, nie ostatni... *„U licha! już przeszło 40 lat mówię prozą, nic o tym nie wiedząc” - pan Jourdain w sztuce „Mieszczanin szlachcicem” Moliera.*

[13] W istocie to nie aksjomat ale schemat nieskończonego zbioru aksjomatów (po jednym dla każdej formuły). ZFC nie jest skonczenie aksjomatyzowalna.

[14] Takie modyfikacje zbliżają nas do *teorii typów* (o której, niestety, nie będziemy tu mówić).

których są np. *lemat Kuratowskiego-Zorna*[15] i *twierdzenie o możliwości dobrego uporządkowania* dowolnego zbioru [16] . Twierdzenia, które dowodzimy korzystając z tego aksjomatu są niekonstruktywne - orzekają o istnieniu pewnych obiektów (np. dobrego porządku w każdym zbiorze) ale nie zawsze mówią, jak je skonstruować[17].

Koronnym dowodem wskazującym na odpowiedzialność aksjomatu wyboru za matematyczny niekonstruktywizm jest wynik Diaconescu (z 1974 roku), który pokazał, że jego konsekwencją jest... prawo wyłączonego środka: $ZFC \vdash P \vee \neg P!$ [18]

Popatrzmy na szkic dowodu. Dla dowolnego zdania P możemy utworzyć dwa zbiory:

$$A = \{x \in \{0,1\} : (x = 0) \vee P\} \quad , \qquad B = \{x \in \{0,1\} : (x = 1) \vee P\}$$

Na mocy aksjomatu wyboru istnieje funkcja $f : \{A, B\} \to A \cup B = \{0,1\}$ taka, że $f(A) \in A$ i $f(B) \in B$. Stąd wyprowadzimy sprytnie serię prawdziwych zdań:

$$((f(A) = 0) \vee P) \wedge (((f(B) = 1) \vee P) \qquad \rightsquigarrow \qquad f(A) \neq f(B) \vee P.$$
$$P \to (A = B) \quad \rightsquigarrow \quad P \to (f(A) = f(B)) \quad \rightsquigarrow \quad f(A) \neq f(B) \to \neg P.$$

A z dwóch ostatnich zdań wynika, że $P \vee \neg P$ [30] [19].

> Wyjątkowość wyniku Diaconescu polega na tym, że pokazuje iż aksjomat logiczny - prawo wyłączonego środka - jest konsekwencją pewnego aksjomatu specyficznego ZFC - pewnika wyboru.
> Logika jest częścią matematyki...[20]

To zaskakuje, jak sądzę, również matematyków. Ale do wyobraźni „zwykłych ludzi" bardziej przemawia wspominane wcześniej twierdzenie Banacha-Tarskiego: *„kulę można pociąć na skończenie wiele kawałków i złożyć z nich dwie kule identyczne z kulą wyjściową"*. To w sposób oczywisty niedorzeczne stwierdzenie staje się dowodliwe jeśli tylko uznamy istnienie *niemierzalnych* kawałków kuli... A istnienie *zbiorów niemierzalnych* to kolejna konsekwencja aksjomatu wyboru.

Szczęśliwie, nie trzeba znać teorii miary by to zrozumieć - przynajmniej w odniesieniu do podzbiorów liczb rzeczywistych. Wystarczy się zgodzić, że miarą zbioru $A \subset \mathcal{R}$ jest nieujemna liczba rzeczywista i spełnione winny być proste warunki:

- *miarą odcinka jest jego długość,*
- *jeśli $A \subseteq B$, to miara A jest mniejsza-równa mierze zbioru B,*
- *miara sumy rozłącznych zbiorów jest sumą ich miar,*
- *dla dowolnego zbioru A wszystkie zbiory $A_r = \{a + r : a \in A\}$, gdzie r to dowolna liczba rzeczywista, mają tę samą miarę.*

Okazuje się, że - jeśli uznajemy aksjomat wyboru! - nie można zdefinować miary zbiorów spełniającej te warunki tak, by każdy podzbiór odcinka $[0, 1]$ posiadał miarę.

Pokażemy to. Podzielmy odcinek $[0, 1]$ na rozłączne i niepuste podzbiory A_i tak, że dwie liczby rzeczywiste znajdą się w tym samym zbiorze A_j, gdy różnią się o liczbę wymierną[21]. Korzystając z aksjomatu wyboru utworzymy zbiór C zawierający po jednym elemencie z każdego ze zbiorów A_i. Ten zbiór nie może mieć miary, jest *niemierzalny*! Wystarczy rozważyć rodzinę „przesunięć" C - zbiorów $C^q = \{r = c + q : c \in C\}$, gdzie $q \in Q \cap [-1, 1]$. Zbiory C^q są parami rozłączne oraz:

$$(*) \qquad [0,1] \subseteq \bigcup_{q \in [-1,1] \cap Q} C^q \subseteq [-1, 2]$$

[15] Niepusty poset w którym każdy łańcuch jest ograniczony z góry ma element maksymalny.

[16] Tzn. tak, by każde dwa elementy były porównywalne a każdy niepusty podzbiór miał element najmniejszy.

[17] Aksjomat wyboru jest niekonstruktywny „sam w sobie" - nie mówi nic, jak konstruować podzbiór $b \subset \bigcup_{i \in I} a_i$ którego ISTNIENIE postuluje. Co ciekawe, bez tego aksjomatu niesposób dowieść, że zbiór, który ma nieskończenie wiele elementów jest ... nieskończony (czyli zawiera równoliczny z nim podzbiór).

[18] Tzn. można udowodnić to prawo korzystając z aksjomatu wyboru i *intuicjonistycznej logiki zdaniowej* którą otrzymamy wyrzucając ze zbioru aksjomatów właśnie prawo wyłączonego środka. Docenimy ten wynik gdy będziemy mówić o toposach.

[19] Formuła $((r \vee p) \wedge (r \to \neg p)) \to (p \vee \neg p)$ jest prawem intuicjonistycznej logiki zdaniowej.

[20] Twierdzenie Diaconescu wyjaśnia dlaczego nie powstała - na wzór arytmetyki intuicjonistycznej - intuicjonistyczna wersji ZFC . Ale istnieje IZF - intuicjonistyczna wersja ZFC pozbawionej aksjomatu wyboru.

[21] Zbiory A_i to klasy abstrakcji relacji równoważności ρ takiej, że $a \rho b$ gdy różnica $a - b$ jest liczbą wymierną.

Miara każdego zbioru C^q są równa mierze zbioru C. Gdyby C miał miarę, to z $(*)$ wynika, że musiała by to być taka liczba dodatnia, że dowolna jej krotność jest nie większa niż 3. A to jest niemożliwe[22].

Wniosek: wprowadzając jakąkolwiek miarę (spełniającą opisane warunki) musimy się pogodzić z istnieniem *zbiorów niemierzalnych*. Teraz już bliżej do twierdzenia Banacha-Tarskiego gdyż „kawałki" na które należy pociąć kulę by otrzymać dwie z nią identyczne, są niemierzalne... .

Stąd sugestia, by ograniczyć aksjomat wyboru do przeliczalnych rodzin zbiorów (tzw. *przeliczalny aksjomat wyboru*). J. Dieudonne: *„(...) jeśli wyrzuci się pewnik wyboru dla zbiorów nieprzeliczalnych, a zachowa się jego przeliczalny wariant, to można osiągnąć ważne cele przy pomocy innych aksjomatów (...). Przykładem jest aksjomat Solovaya (...) który mówi, że wszystkie podzbiory $\mathcal{R}^n$ są mierzalne w sensie w jakim rozumiał to Lebesgue. Dla wielu analityków byłoby to o wiele przyjemniejsze niż ogólny pewnik wyboru*[23].

Można też zostawić aksjomat wyboru w spokoju a miarę zbioru definiować tylko dla *borelowskich podzbiorów* liczb rzeczywistych. Te zbiory „konstruujemy" rekurencyjnie: punktem wyjścia są tu otwarte odcinki o wymiernych końcach. W każdym kroku rekurencyjnym korzystamy z operacji tworzenia sum przeliczalnych rodzin zbiorów i operacji dopełnienia zbioru[24]. Wszystkie podzbiory przeliczalne (i ich dopełnienia), wszystkie zbiory otwarte i domknięte są borelowskie. Oczywiście są też „nieborelowskie" podzbiory jak np. rozważany przed chwilą zbiór Vitaliego ale, jak piszą w polskiej wikipedii, *„intuicyjnie, wszystkie zbiory które można opisać wzorem są borelowskie"*[25]. Na zbiorze BS wszystkich podzbiorów borelowskich można zdefiniować miarę - funkcję $\mu : BS \to [0, \infty]$ spełniającą wszystkie wymienione wyżej warunki [26].

13.1 Modele ZFC

> *„Teoria mnogości wzbudza sprzeczne emocje wśród matematyków (...) . Z jednej strony wszyscy znają jej podstawowe pojęcia, dzięki czemu nie jest konieczne żadne przygotowanie techniczne. Co więcej, każdy ma swój własny pogląd na naturę zbiorów (...), Można uważać, że „oficjalne" przedstawienie teorii mnogości, (...) ma niewielkie znaczenie dla ich pracy (...). Z drugiej strony, istnienie zaskakujących wyników rozbiło samozadowolenie matematyków, a temat ten otacza nieuzasadniona aura tajemniczości i podziwu. W szczególności, istnienie wielu możliwych modeli matematyki jest trudne do zaakceptowania, tak więc możliwą reakcją może być to, że (...) aksjomatyczna teoria mnogości nie odpowiada intuicyjnemu obrazowi matematycznego wszechświata i że te wyniki tak naprawdę nie są częścią normalnej matematyki."*
>
> *P.Cohen - The discovery of forcing*[27]

Teoria zbiorów nie mówi, co jest zbiorem. To trzeba powiedzieć dopiero wtedy, gdy wskazujemy model tej teorii. Zbiory to elementy takiego modelu[28].

---

[22]Przy odrobinie dobrej woli można powyższe uznać za szkic konstrukcji *zbioru Vitaliego*.

[23]*Milioner ma przeliczalnie wiele par butów i przeliczalnie wiele par skarpetek. Stąd wynika, że ma przeliczalnie wiele butów i skarpetek.* Ale dowód jednego z tych faktów wymaga wykorzystania pewnika wyboru. Którego? [30]

[24]Ta rekurencja jest pozaskończona (po przeliczalnych liczbach porządkowych) więc zbiory borelowskie to twory „quasikonstruktywne".

[25]Moc zbioru wszystkich podzbiorów borelowskich to „zaledwie" continuum - $\mathfrak{c}$ podczas gdy zbiór wszystkich podzbiorów $\mathcal{R}$ ma moc istotnie większą - $2^{\mathfrak{c}}$. Zbiory borelowskie można definować w dowolnej przestrzeni topologicznej. Te zbiory w *polskich* przestrzeniach topologicznych (str. 49) są przedmiotem badań w tzw. *opisowej teorii mnogości* która, jak sądzę, jest (była) próbą ograniczenia „skali nieskończoności" w matematyce.

[26]Zainteresowanym polecam hasło: *(zewnętrzna) miara Lebesgue'a.*

[27]Rocky Mountain Journal of Math., vol.32 no 4., 2002

[28]*„In Zermelo-Fraenkel set theory, the notion of what consitutes a set is not really defined, but rather is taken as a basic concept. The Zermelo-Fraenkel axioms describe the properties of sets and the set-theoretic universe. For instance, if X is an infinite set, the Power Set Axiom tells us that there is a set, 2^X (...). But the other axioms do not tell us very much about the members of 2^X (...)"-K.J.Devlin - http://projecteuclid.org/euclid.pl/1235419480.*

13.1.1 ZFC, ZFC^{-} i arytmetyka Peano

Wskazanie modelu ZFC jest ... trudne. Aby zrozumieć, że źródłem trudności jest aksjomat nieskończoności spójrzmy najpierw na teorię ZFC^{-} którą otrzymamy z ZFC zastępując ten aksjomat jego zaprzeczeniem. Ta teoria opisuje zbiory skończone [29].
Rozpatrzmy nieco bardziej wnikliwie zależności między ZFC, ZFC^{-} i arytmetyką Peano - PA. Wiemy, że ZFC jest bogatsza od PA - język arytmetyki można przetłumaczyć na język teorii mnogości tak, że aksjomaty PA są dowodliwe w ZFC (str.**??**) . Ponieważ obie teorie są pierwszorzędowe[30], to tłumaczenie zdania arytmetycznego dowodliwego w PA jest dowodliwe w ZFC:

To już wiemy. A jeśli nawet nie wiemy, to się specjalnie nie dziwimy. Ciekawsze jest to, że istnieje „translacja odwrotna" - z języka teorii zbiorów do języka arytmetyki.
Pomysł jest prosty: każda liczba naturalna ma *rozwinięcie dwójkowe*: $n = a_0 2^0 + a_1 2^1 + a_2 2^2 + \ldots + a_k 2^k$. To pozwala określić taką relację na zbiorze liczb naturalnych: *„$m \ll n$ wtedy, gdy na m-tym miejscu binarnego rozwinięcia liczby n jest jedynka"*[31]. Relacja „$\ll$" jest rozstrzygalna, więc można ją opisać za pomocą formuły arytmetycznej (o dwóch zmiennych wolnych). Przypisanie atomowej formule teoriomnogościowej „$x \in y$" formuły arytmetycznej „$x \ll y$" umożliwia tłumaczenie języka teorii mnogości na język arytmetyki.

Ta translacja byłaby tylko ciekawostką, gdyby nie to, że po tym tłumaczeniu aksjomaty teorii ZFC^{-} są dowodliwe w PA [38]!

> Każde teoriomnogościowe twierdzenie dotyczące zbiorów skończonych (niekorzystające z aksjomatu nieskończoności) można sformułować w języku arytmetyki i dowieść korzystając z aksjomatyki Peano. Arytmetyka to matematyka zbiorów skończonych[32].

Translację, która przeprowadza aksjomaty pewnej teorii w twierdzenia innej, nazwaliśmy kiedyś modelem tej pierwszej w drugiej (str. 175). Można więc powiedzieć, że ZFC^{-} ma model arytmetyczny. Dodam: niezależnie od tego, czy ZFC ma jakikolwiek model.

13.1.2 Kłopoty (to lubię)...

Wskazanie modelu ZFC jest trudne... . Skoro tak, to może trzeba „zapomnnieć" o tym problemie zadowalając się tym, że język teorii mnogości jest świetnym narzędziem opisu rzeczywistości? Niestety: na mocy twierdzenia Gödla-Henkina - istnienie modelu ZFC jest RÓWNOWAŻNE niesprzeczności ZFC. A to nie jest temat do żartów...
Model teoriomnogościowy to para $(A, \in_A)$, gdzie A to zbiór, a „$\in_A$" to relacja binarna na zbiorze A wybrana tak, by spełnione były wszystkie aksjomaty ZFC. Wówczas elementy zbioru A możemy nazwać zbiorami - w tym modelu.

Ale A ma też być zbiorem, czyli elementem INNEGO modelu teorii ZFC!

> „Innego", bo zbiór A nie może być swoim własnym elementem. Wyklucza to jeden aksjomatów ZFC - *aksjomat regularności: „każdy niepusty zbiór zawiera (jako element) zbiór, który jest z nim rozłączny"*:
> $$\forall_x (x \neq \emptyset \Rightarrow \exists_y (y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))$$
> Ten aksjomat nie jest intuicyjnie oczywisty. Ale to z niego wynika, iż żaden zbiór nie zawiera samego siebie jako elementu[33].

[29] ZFC^{-} jako niesprzeczna teoria pierwszego rzędu nie może mieć tylko jedynego (nieskończonego) modelu - nie opisuje JEDNOZNACZNIE tego, co wydaje się wręcz „fizyczne" - uniwersum zbiorów skończonych.

[30] Czyli w obu przypadkach korzystamy z tych samych aksjomatów logicznych i reguł dowodzenia.

[31] Np. $2 \ll 5$, ale $\neg(1 \ll 5)$ gdyż $5 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2$..

[32] Tę translację wykorzystano by pokazać, że twierdzenie Parisa-Harringtona nie ma dowodu w PA. Relację między PA i ZFC można postrzegać jako ilustrację hilbertowskiego podziału matematyki na „realną" i „idealną": dowody teoriomnogościowych twierdzeń nieodwołujących się do nieskończoności są możliwe w PA, ale w ZFC są „bardziej eleganckie". Warto by to stwierdzenie poprzeć eleganckim przykładem elegancji. Ale nie potrafię.

[33] *Jedynym elementem zbioru $\{a\}$ jest a. Gdyby $a \in a$, to jedyny element zbioru $\{a\}$ nie jest z nim rozłączny.* Ten aksjomat pozwala też uniknąć paradoksu Russella.

Aby wskazać jakikolwiek teoriomnogościowy model ZFC musimy dysponować innym modelem tej teorii ... . *Uh Houston, we've had a problem...*[34] .
Pracujący matematyk powie: przecież mamy *uniwersum von Neumanna*[35].
Przyjrzyjmy się sprawie bliżej.

Universum von Neumanna

Całokształt naszej tzw. wiedzy (...) jest tworem człowieka i styka się z doświadczeniem tylko wzdłuż swoich krawędzi - W.V.Quine

Przyjmijmy w tym podrozdziale twarde założenie: nie znamy modelu ZFC. Dysponujemy jedynie językiem ZFC w którym możemy definiować (reprezentować za pomocą nazw i formuł nazwowych) pewne zbiory i klasy zbiorów. Dlatego będę przez jakiś czas pisał „zbiory" w cudzysłowie by rozróżnić pojęcie teoriomnogościowe od jego desygnatu w modelu ZFC . Ale po pewnym czasie cudzysłowy znikną.

Osnową konstrukcji von Neumanna są *liczby porządkowe*. Jak wszystko w tym świecie, te liczby to „zbiory": *liczba porządkowa to „zbiór" α, który jest tranzytywny* - $\forall_x(x \in \alpha \to x \subset \alpha)$ *i liniowo uporządkowany przez relację „$\in$"* - $\forall_{x,y}\,(x, y \in \alpha \to (x \in y) \vee (y \in x))$.

Powinniśmy to rozumieć tak:
„semantycznie": liczby porządkowe w dowolnym (hipotetycznie istniejącym) modelu ZFC to klasa zbiorów reprezentowana w języku ZFC przez formułę zdaniową - koniunkcję zdań opisujących tranzytywność i liniowe uporządkowanie zbioru,
„syntaktycznie": deklarując, że „β jest liczbą porządkową" (gdzie β to nazwa pewnego zbioru) to zakładamy, że formuły definiujące pojęcie liczby porządkowej są prawdziwe przy podstawieniu $\alpha := \beta$.[36]

Najprostsze liczby porządkowe to liczby naturalne. Każda liczba porządkowa α ma swój następnik - liczbę $\alpha \cup \{\alpha\}$. Liczby - następniki to *liczby izolowane*. Pozostałe to *liczby porządkowe graniczne*. Taką liczbą jest np. ω - „zbiór" wszystkich liczb naturalnych. Istnieją liczby porządkowe $\omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\omega, \omega\cdot\omega, \ldots \omega^{\omega}, \ldots$[37].

Ale liczby porządkowe nie tworzą „zbioru". To *paradoks Burali-Fortiego*: gdyby przyjąć, że istnieje „zbiór" wszystkich liczb porządkowych Ord , to „zbiór" $\gamma = \bigcup(\alpha\colon \alpha \in Ord)$ byłby liczbą porządkową. Stąd $\gamma \in \gamma$, a to przeczy aksjomatowi regularności.

Uniwersum von Neumanna V to wielkość graniczna, aproksymowalna przez „zbiory" $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots V_\alpha \subseteq \cdots$ indeksowane liczbami porządkowymi. Zbiory V_α definiowane są „rekurencyjnie":

$$V_0 = \emptyset, \qquad V_\alpha = \{x\colon x \subseteq \textstyle\bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta\} \quad [92]^{38}$$

Kusi, by napisać

$$(*) \qquad V = \bigcup_{\alpha\in Ord} V_\alpha$$

gdzie Ord to kolekcja wszystkich liczb porządkowych.
Skoro jednak Ord nie jest „zbiorem", to i V nie jest „zbiorem"[39]. V jest *klasą*.

Dla tak opisanej klasy V dowodzi się twierdzenia, które ma potwierdzać, że zasługuje ona na miano uniwersum matematyki teoriomnogościowej - *każdy „zbiór" należy do V*.

[34] „Huston, mamy problem" - to słowa astronauty J.Swigerta po tym, gdy na pokładzie Apollo 13 wybuchł pojemnik z tlenem...

[35] Na marginesie: niektórzy - np. K. Wójtowicz w pracy *O hipotezie continnum (Zagadnienia Filozoficzne w Nauce XXII, 1998 (35-52)* - przypisują tę konstrukcję E. Zermelo.

[36] Można to uznać za dzielenie włosa na czworo. Ale mówimy tu przecież o podstawach matematyki.

[37] Dodajmy, że dowód istnienia np. liczby $\omega+\omega$ wymaga użycia niewspominanego dotąd *aksjomatu zastępowania*.

[38] Ta definicja jest nieco odmienna od powszechnie stosowanej ale jej równoważna.

[39] ZFC gwarantuje tylko istnienie sumy rodziny „„zbiorów" indeksowanej przez „zbiór". Równość $(*)$ należy czytać tak: zbiór należy do klasy V dokładnie wtedy, gdy należy do pewnego „„zbioru" V_α. *Stopień (rząd) zbioru a* to najmniejsza liczba porządkowa α taka, że $a \in V_\alpha$.

Jedyną wadą V jest to, że jest zbyt dużym obiektem, by być zbiorem...
Pięknie się ułożyło... . Skąd więc wątpliwości? Ta naracja prowadzona jest w duchu matematycznego realizmu. A przecież powiedzieliśmy tylko tyle, że w ZFC można dowieść kilku twierdzeń:

$ZFC \vdash$ *dla każdego „zbioru”-liczby porządkowej α istnieje „zbiór” V_α o określonych własnościach*,
$ZFC \vdash$ *„każdy „zbiór” jest elementem pewnego „zbioru” V_α* [92],
$ZFC \vdash$ *-nie istnieje „zbiór” liczb porządkowych.*

> Użycie frazy *„istnieje zbiór V_α”* sugeruje, że udowodniliśmy istnienie pewnych zbiorów.
> Nic z tych rzeczy: pokazaliśmy tylko, że W KAŻDYM (TEORIOMNOGOŚCIOWYM) MODELU ZFC można wyróżnić zbiory V_α o opisanych własnościach
> . Konstrukcja von Neumanna wzbogaca naszą wiedzę o wszelkich POTENCJALNYCH teeoriomnogościowych modelach ZFC: każdy taki model ma strukturę odwzorowującą hierarchię „zbiorów” V_α. Ale nie udowodniliśmy istnienia jakiegokolwiek teoriomnogościowego modelu ZFC!

Ujawnienie *hierarchii von Neumanna* wzbogaca język teorii mnogości. Można definiować zbiory (klasy zbiorów) korzystając z *rekurencji pozaskończonej* i dowodzić własności zbiorów korzystając z *indukcji pozaskończonej* - uogólnienia zwykłej zasady indukcji: *„jeśli - dla dowolnej formuły teoriomnogościowej $\phi(x)$ - potrafimy dowieść prawdziwości zdania $\phi(\emptyset)$ i uzasadnić implikację $\forall_{\beta<\alpha}\phi(\beta) \to \phi(\alpha)$ to zdanie $\phi(\alpha)$ jest prawdziwe dla każdej liczby porządkowej α.*

Stwierdzenie *„każdy zbiór należy do pewnego zbioru V_α”* zapewnia platonikom psychologiczny komfort, bo wprowadza w ich wobrażeniu matematycznego uniwersum prostą hierarchię: każdemu zbiorowi A można teraz przypisać pewną miarę złożoności - najmniejszą liczbę porządkową α taką, że $A \in V_\alpha$. U podstaw tej hierarchii jest zbiór pusty i zbiory skończone - te, których istnienie jest „oczywiste”, poparte realnymi przykładami. Z pokorą przyjmujemy, że im dalej, tym trudniej. Skoro jednak mamy usposobienie platonika, to zgadzamy się, że w $V = \bigcup V_\alpha$ są wszystkie zbiory. V to matematyczne uniwersum... . Ze zrozumieniem przyjmujemy do wiadomości, że jeśli wzbogacimy ZFC dodając aksjomat dekretujący istnienie tzw. *silnie nieosiągalnych* i nieprzeliczalnych liczb kardynalnych, to dla każdej takiej liczby α, V_α „jest” modelem ZFC[40].

Co to za liczby? Nie wchodząc w szczegóły: liczby kardynalne to podklasa liczb porządkowych. Liczba kardynalna α jest silnie nieosiągalna gdy dla dowolnej liczby kardynalnej $\beta < \alpha$, $2^\beta < \alpha$ - *„liczby nieosiągalne mają się do liczb mniejszych tak jak ω ma się do liczb skończonych”*. ω to najmniejsza (i przeliczalna) liczba silnie nieosiągalna. W ZFC nie da się udowodnić istnienia innych takich liczb ani temu zaprzeczyć. Zadekretowanie ich istnienia musi być dodatkowym aksjomatem - jeśli tego chcemy.

> ZFC zyskała powszechną akceptację m.in. dlatego, że jej aksjomaty są „oczywiste” gdy myślimy o zbiorach skończonych. Dyskutowany tu nowy aksjomat jest odmienny: wśród skończonych liczb porządkowych - liczb naturalnych - nie ma liczb silnie nieosiągalnych. Najmniejsza z nich - liczba ω - to kres świata zbiorów skończonych i jednocześnie wrota do abstrakcyjnego świata z nieskończoną skala nieskończoności.
>
> Niezupełności ZFC prowokuje do poszukiwania jej rozszerzeń lepiej opisujących matematyczne uniwersum. Jakie nowe aksjomaty, już nie „intuicyjnie oczywiste”, są warte uwagi? Przywołajmy słowa Gödla: *„są aksjomaty tak obfitujące w konsekwencje, rzucające tak wiele światła na całą dziedzinę i dające tak potężne metody rozwiązywania problemów (...), że bez względu na to, czy są one z natury konieczne, czy też nie, musiałyby zostać zaakceptowane przynajmniej w takim samym sensie, jak każdy dobrze ugruntowany teoria fizyczna”*.[41]
> Czy fakt, że ZFC wzbogacone o aksjomat istnienia nieprzeliczalnej silnie nieosiagalnej liczby kardynalnej daje nam model ZFC usprawiedliwia jego akceptacji?

[40] ZFC jest niesprzeczne o ile to wzbogacenie jest niesprzeczne. Gödel dowiódł, że i odwrotna implikacja jest prawdziwa.

[41] Cytuję za artykułem P.Koellnera *On reflection principle* (internet). Termin *reflection principle - zasada refleksji* pojawia się w „postgödlowskich” dyskusjach o podstawach matematyki. Ta zasada ma wiele różnych sformuułowań ale wspólny schemat: *„Zasady te mówią, że każde stwierdzenie prawdziwe w V jest prawdziwe w jakimś mniejszym V_α. To oznacza, że dla żadnej formuły ϕ nie można zdefiniować V jako „całości”, która spełnia ϕ, ponieważ istnieje*

Powiedzmy jeszcze słowo o pewnej wyrafinowanej konstrukcji i twierdzeniu burzącym platońską interpretację uniwersum von Neumanna. W [92] opisano teorię ZFC^+ - rozszerzenie ZFC polegające na dodaniu do języka ZFC nowej stałej - powiedzmy M - i pewnych nowych aksjomatów. Pierwszy z nich to zdanie „$\forall_{x,y} y \in x \wedge x \in M \rightarrow y \in M$" które zapewnia, że stała M reprezentuje w każdym (potencjalnie istniejącym) modelu ZFC zbiór tranzytywny. Drugi to zapisane formalnie zdanie *„istnieje bijekcja między M i* $\mathbf{N}$" które gwarantuje, że M reprezentuje zbiór przeliczalny. Pozostałe nowe aksjomaty ZFC^+ to *relatywizacje względem M* wszelkich aksjomatów specyficznych ZFC. „Relatywizacja" polega na ograniczenie zakresu kwantyfikacji zmiennych do M[42]. Udowodniono, że:

„If ZFC is consistent then so is ZFC^+"   [92], str.27

Uznając równość *„niesprzeczność = istnienie modelu"* - można odczytać to tak:

„jeśli teoria ZFC jest niesprzeczna, to ma model U, w którym można wskazać przeliczalny i tranzytywny zbiór M, który jest również modelem ZFC"[43]. Co więcej:

- każda liczba porządkowa w M jest liczbą porządkową w U, ale nie odwrotnie - liczb porządkowych w M jest istotnie mniej niż w U,

- podzbiory zbioru A w M to zbiory postaci $B \cap M$, gdzie B jest podzbiorem A w U .

Dlatego konstrukcja von Neumanna w małym modelu M- konstrukcja zbiorów V_α - jest zdecydowanie „krótsza i chudsza" niż w U. Te „uniwersa" nie są równe, nie są „tym samym".

> Czy to oznacza, że użycie terminu „uniwersum" w odniesieniu do konstrukcji von Neumanna jest błędem? Wystarczy przyjąć punkt widzenia nominalistów by uznać, że klasa V JEST modelem ZFC. Ale NIE JEST to model teoriomnogościowy (w sensie Tarskiego). To *model wewnętrzny (inner model)* wykreowany wewnątrz języka ZFC[44].

> Tak więc - w pewnym uproszczeniu - modelem ZFC jest ... ZFC .
> Matematyczne uniwersum nie jest rzeczywistością - ani fizyczną, ani transcedentną. To część „świata intelektualnego"[45].

Jedno jest pewne: konstrukcja von Neumanna nie wnosi nic - lub niewiele - do dyskusji o niesprzeczności ZFC. *„The question of the formal consistency of ZFC must remain a matter of faith unless and until a formal inconsistency is demonstrated".*

Najlepszym podsumowaniem dyskusji o modelach ZFC jest, jak sądzę, taka oto wypowiedź W.V.Quine'a, która genialnie ujmuje istotę problemu:

„Kiedy ktoś proponuje teorię dotyczącą jakiegoś typu przedmiotów, jesteśmy skłonni wyobrażać sobie, że nasze zrozumienie jego słów będzie przebiegało w dwóch etapach: po pierwsze, musimy zrozumieć czym są te przedmioty; po drugie, musimy pojąć, co mówi o nich teoria. Tak jednak nie jest, bowiem

„ZROZUMIENIE CZYM SĄ PRZEDMIOTY, JEST W GŁÓWNEJ MIERZE PO PROSTU OPANOWANIEM TEGO, CO MÓWI O NICH TEORIA"[46]

Na marginesie: o co chodzi w twierdzeniu Cantora?

---

odpowiedni początkowy segment V_α, który spełnia ϕ (...) (zmodyfikowane przez relatywizację kwantyfikatorów. Ten schemat wypełnimy, gdy (1) określimy język i (2) określimy naturę relatywizacji" - tak napisano w przywołanej tu pracy do której odsyłam zainteresowanych. Ale ostrzegam: to nie jest łatwa lektura.

[42] Np. relatywizacja aksjomatu pary to: $\forall_{x,y \in M} \exists_{z \in M} \forall u \in M u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y$.

[43] Zbiorami w modelu M są elementy M. To że jest to „model" ZFC jest zagwarantowane przez dołączenie relatywizacji aksjomatów ZFC do teorii ZFC^+.

[44] *„An inner model is a definable proper class that is a model of ZF (...)"[30].* Definiowalne klasy to te, które są opisane przez teoriomnogościowe formuły.

[45] Tak ładnie napisał Yu.I. Manin w podręczniku *A Course in Mathematical Logic.*

[46] Willard Van Orman Quine (1908-2000) - amerykański filozof nauki. Zainteresowanym polecam obszerną informację na temat poglądów Quine'a w polskiej wikipedii. Cytat zaczerpnąłem z artykułu *„Słowo i przedmiot"*. Dodam jeszcze jedno zdanie z *Philosophy of Mathematics, M. Tiles* świetnie korespondujace z przytoczonym cytatem: *„Quine (...) postuluje istnienie abstrakcyjnych obiektów i postuluje je jako realne istnienie, ale jest to postrzegane jako część mitologii, którą opracowaliśmy dla radzenia sobie ze światem fizycznym".*

Zbiór liczb naturalnych jest w obu opisanych modelach - „małym” M i „dużym” U - ten sam. Ale zbiory potęgowe - $2^{\mathbf{N}}_M$ w M i $2^{\mathbf{N}}_U$ w U są istotnie różne.
Ten pierwszy - widziany w modelu U - jest przeliczalny. Postrzegany wewnątrz M - nieprzeliczalny.

> A więc jak? Można „ponumerować” elementy zbioru $2^{\mathbf{N}}_M$ czy nie?
> To pytanie nie ma matematycznego sensu. Twierdzenie Cantora nie mówi o absolutnym numerowaniu ale o równoliczności zbiorów w danym modelu ZFC (czyli o istnieniu odpowiedniej bijekcji). W M nie mamy bijekcji między zbiorami $\mathbf{N}$ i $2^{\mathbf{N}}_M$ a takowa jest w U... .
>
> Nic więcej nie można powiedzieć. Nic więcej nie wolno powiedzieć.

I jeszcze jedno: zbiór liczb naturalnych w M i U to ten sam zbiór. Ale w M ma niej podzbiorów niż w U. Zatem czy naprawdę jest to „taki sam” zbiór?

13.2 Twierdzenie Łosia

Dowód „istnienia” pary modeli U i M jest zbyt skomplikowany bym odważył się go tu przedstawiać. Szczęśliwie można wskazać twierdzenie, które równie efektownie ujawnia subtelności teorii mnogości. To *twierdzenie Łosia.*

> W bibliotece Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu M. Kopernika w Toruniu można obejrzeć karykaturę prof. Jerzego Łosia, na której został on przedstawiony jako człowiek z głową w chmurze z napisem „abstrakcja”.
> Czym sobie na to zasłużył? Prawdopodobnie jest to związane z jego słynną konstrukcją *ultraproduktu modeli* i twierdzeniem z nim związanym. Spróbujemy opowiedzieć o tym znakomitym wyniku i jego roli w dyskusji o matematycznym uniwersum.

Twierdzenie Łosia, na pozór, nie brzmi sensacyjnie: mówi o tym, że dowolny model języka pierwszego rzędu $\mathcal{A}$ można zanurzyć w model $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$ o „dużo większym” nośniku który ma dokładnie te same pierwszorzędowe własności. Zmienimy zdanie, gdy poznamy konsekwencje tego twierdzenia.

Preludium - o równości „prawie wszędzie”

Skoro teoria mnogości afirmuje (abstrakcyjną) nieskończoność aktualną a (przyziemną) skończoność wręcz degraduje to nie dziwi, że w tej matematyce pojawiło się pojęcie *„równości prawie wszędzie”*. W odniesieniu do ciągów liczb naturalnych to pojęcie definiujemy tak:

ciągi liczb naturalnych $(n_i : i \in N)$ oraz (m_i) - są „równe prawie wszędzie” gdy $n_i \neq m_i$ tylko w skończonej liczbie przypadków:

$$(n_i) =_{pw} (m_i) \quad \textit{wtw gdy zbiór} \quad \{i \in \mathbf{N} \colon a_i \neq b_i\} \textit{ jest skończony.}$$

Popatrzmy na konsekwencje wprowadzenia tej szczególnej „równości”. Z każdym ciągiem (n_i) możemy teraz związać nową „jedność” - zbiór oznaczany przez $[(n_i)]$ i złożony z tych ciągów, które są mu równe prawie wszędzie:

$$[(n_i)] = \{(m_i) : (n_i) =_{pw} (m_i)\}$$

oczywiście ciągi równe prawie wszędzie wyznaczają tę samą nową „jedność” - np. $[(1, 2, 3, 4, 4, 4, \ldots)] = [(4, 4, 4, 4, \ldots)]$.

Oznaczmy przez N^{ks} zbiór tak zdefiniowanych „jedności”[47]. Zbiór $\mathbf{N}$ można zanurzyć w zbiór N^{ks} poprzez przyporządkowanie $n \rightsquigarrow [(n, n, n, \ldots)]$.

Możemy teraz wykorzystać działania w zbiorze liczb naturalnych do określenia (nazywanych tak samo) działań na elementach zbioru N^{ks}. Np. dodawanie w N^{ks} zdefiniujemy tak:

$$[(n_i)] + [(m_i)] = [(n_i + m_i)]$$

$[(1, 2, 3, 4, \ldots)] + [(2, 4, 6, 8 \ldots)] = [(3, 6, 9, 12 \ldots)$.

Nieco bardziej subtelne jest przeniesienie relacji „mniejsze-równe” na zbiór N^{sk} :

[47]Matematycznie: relacja "$=_{pw}$" to równoważność, a N^{ks} to wyznaczony przez nią zbiór ilorazowy.

$$[(n_i)] \leqslant [(m_i)] \quad \textit{wtw gdy zbiór } \mathbf{N} \setminus \{i \in N \colon a_i \leqslant b_i\} \textit{ jest skończony},$$

Ten przykład jest po to by zgodzić się, że „tak samo” można zbudować rozszerzenie dowolnego modelu języka pierwszego rzędu $\mathcal{A} = (A, (q^A), (r^A), (c^A))$:

- na zbiorze nieskończonych ciągów elementów A określamy relację „równości prawie wszędzie”:

$$(a_i) =_{pw} (b_i) \textit{ wtw gdy zbiór } \{i \in \mathbf{N} \colon a_i = b_i\} \textit{ jest koskończony}^{48},$$

- tworzymy zbiór A^{ks} którego elementami są zbiory $[(a_i)] = \{(b_i) \colon a_i =_{pw} b_i\}$. Zbiór A można zanurzyć w A^{ks} : $a \rightsquigarrow [(a, a, a, \ldots)]$,

- przenosimy wszystkie operacje i relacje i stałe z modelu $\mathcal{A}$ na zbiór A^{ks} w sposób opisany w przykładzie[49].

Załóżmy teraz, że $\mathcal{A}$ jest modelem pewnej teorii pierwszego rzędu. I zapytajmy: czy tak zbudowany nowy „większy” model jest też modelem tej teorii?
Odpowiedź jest ... negatywna. Ale wystarczy zastąpić *filtr* zbiorów koskończonych przez *ultrafiltr* by odpowiedź była pozytywna.

Ultrafiltry i ultrapotęgi

Czym jest ultrafiltr? Przekrój (część wspólna) dwóch koskończonych zbiorów jest koskończony. Dowolny zbiór zawierający w sobie zbiór koskończony jest koskończony. To oznacza, że rodzina wszystkich koskończonych podzbiorów liczb naturalnych jest *filtrem*[50].

Ultrafiltry to filtry maksymalne (względem relacji zawierania)[51]. Wszystkie podzbiory zawierające ustalona dowolnie liczbę n to *ultrafiltr trywialny*. Nas interesują *ultrafiltry nietrywialne*.

> Przykre jest to, że NIE POTRAFIMY WSKAZAĆ żadnego nietrywialnego ultrafiltru!
> Skąd pewność, że istnieją? Mają ją tylko ci, którzy akceptują aksjomatykę teorii zbiorów wraz z aksjomatem wyboru. To ten aksjomat gwarantuje, że dowolny filtr można rozszerzyć do ultrafiltru[52].

Powtórzymy opisaną procedurę rozszerzania modelu $\mathcal{A}$ zastępując filtr zbiorów koskończonych dowolnie wybranym nietrywialnym ultrafiltrem $\mathcal{U}$. Otrzymany w ten sposób nowy model $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$ to *ultrapotęga* $\mathcal{A}$. Możemy teraz sformułować

Twierdzenie Łosia: *„model $\mathcal{A}$ i jego ultrapotęga $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$ są elementarnie równoważne” co oznacza, że dowolne zdanie pierwszego rzędu jest prawdziwe w modelu $\mathcal{A}$ dokładnie wtedy, gdy jest prawdziwe w modelu $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$ - gdy $\mathcal{A}$ jest modelem teorii T, to i $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$ jest modelem T.*

> Model $\mathcal{A}$ i jego *ultrapotęga* - model $\mathcal{A}^{\mathcal{U}}$ - są nierozróżnialne w języku pierwszego rzędu. Różne są tylko ich nośniki - zbiory, na których są posadowione[53].

Ktoś zirytowany nagromadzonymi tu zawiłościami i powierzchownością opisu może oczekiwać, że zilustruję tę konstrukcję w prosty sposób, np. zakładając, że model $\mathcal{A}$ jest skończony. Płonne nadzieje: w takim przypadku ta konstrukcja się trywializuje - $\mathcal{A}^{\mathcal{U}} = \mathcal{A}$.

> Konstrukcja Łosia to czysta abstrakcja - nie ma sensu bez akceptacji nieskończoności i pewnika wyboru.

[48] To mała innowacja: *zbiór $A \subseteq \mathbf{N}$ jest koskończony, gdy jego dopełnienie - zbiór $\mathbf{N} \setminus A$ - jest skończony.*

[49] Np. gdy q^A to operacja dwuargumentowa w $\mathcal{A}$, to $\tilde{q}([(a_i)], [(b_i)]) = [(q^A(a_i, b_i)]$.

[50] Nazywanym *filtrem Frecheta*.

[51] Dla spragnionych formalnych definicji: ultrafiltr $\mathcal{U}$ to rodzina niepustych podzbiorów $\mathbf{N}$ taka, że dla dowolnych zbiorów $A, B \subseteq \mathbf{N}$: 1. $A \in \mathcal{U} \wedge A \subset B \to B \in \mathcal{U}$ 2. $A, B \in \mathcal{U} \to A \cap B \in \mathcal{U}$ 3. $A \notin \mathcal{U} \to \mathbf{N} \setminus A \in \mathcal{U}$.

[52] Dowód istnienia nietrywialnego ultrafiltru zawierającego dany filtr wykorzystuje lemat Kuratowskiego-Zorna.

[53] Jeśli ultrafiltr jest trywialny, to $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\mathcal{U}}$. Dlatego trywialne ultrfiltry nie interesują nas wcale.

13.2.1 Konsekwencje twierdzenia Łosia

Ten na pozór czysto techniczny wynik jest źródłem wielu odkrywczych zaskoczeń[54]. Zacznijmy od najprostszego. Oznaczmy przez $\mathbf{N}^{\mathcal{U}}$ ultrapotęgę zbioru $\mathbf{N}$ względem pewnego nietrywialnego ultrafiltru $\mathcal{U}$. $\mathbf{N}^{\mathcal{U}}$jest modelem arytmetyki Peano.

Elementy $\mathbf{N}^{\mathcal{U}}$ są wyznaczone przez ciągi liczb naturalnych. Ciągi stałe - $(n, n, n, \ldots)$ - wyznaczają *liczby standardowe*. Oprócz nich w $\mathbf{N}^{\mathcal{U}}$ jest nieprzeliczalnie wiele liczb *niestandardowych*. Taką liczbą wyznacza np. ciąg $(0, 1, 2, \ldots)$.
Każda liczba niestandardowa jest większa od wszystkich liczb standardowych.

> Zero jest liczbą standardową. Następnik liczby standardowej jest standardowy. To zdaje się przeczyć peanowskiemu aksjomatowi indukcji, bo przecież podzbiór liczb naturalnych o tych własnościach powinien być zbiorem wszystkich takich liczb... .
> Ale zasada indukcji opisana w aksjomatyce Peano dotyczy jedynie podzbiorów arytmetycznych! Nie ma tu sprzeczności. Jedyne, co możemy stąd wywnioskować, to stwierdzenie, że pojęcie „liczba standardowa" nie jest definiowalne w języku arytmetyki.
> I choć to przeczy intucji, można (trzeba) pogodzić zasadę indukcji z nieprzeliczalnością zbioru $\mathbf{N}^{\mathcal{U}}$... .

Zastąpmy liczby naturalne rzeczywistymi i rozważmy ultrapotęgę $\mathcal{R}^{\mathcal{U}}$. Tu też można wyróżnić liczby *standardowe* - klasy ciągów stałych $[(a, a, a, \ldots a)]$. Wśród niestandardowych liczb rzeczywistych można wyróżnić dwie podklasy:

- *„nieskończenie duże" - większe od wszystkich liczb standardowych. Taką liczbą jest np.* $[(1, 2, 3, \ldots)]$,
- *„nieskończenie małe" - niestandardowe liczby dodatnie mniejsze od wszystkich standardowych liczb dodatnich. Taką liczbę wyznacza np. ciąg* $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ [55].

> $\mathcal{R}$ można zanurzyć w $\mathcal{R}^{\mathcal{U}}$: $a \rightsquigarrow a^* = [(a, a, \ldots)]$. Liczb w $\mathcal{R}^{\mathcal{U}}$ jest „więcej".
> Konstrukcja Dedekinda miała wypełnić wszelkie luki między liczbami wymiernymi na prostej rzeczywistej. Zatem po dorzuceniu liczb niestandardowych też ich nie powinno być. A jednak: wystarczy pomyśleć o przekroju wyznaczonym przez parę zbiorów z których jeden składa się nieskończenie małych dodatnich i wszlkich od nich mniejszych a drugi to jego dopełnienie[56].
> Metafora geometryczno-liczbowa - utożsamienie liczb z punktami prostej - jest tylko metaforą... .

Czy struktura $\mathcal{R}^{\mathcal{U}}$ to tylko ciekawostka?
W drugiej połowie XVII wieku Leibniz i Newton budowali podstawy analizy matematycznej korzystając bez skrupułów z liczb nieskończenie małych: *„liczba γ jest nieskończenie mała, jeżeli $-a < \gamma < a$ dla dowolnej liczby rzeczywistej $a > 0$"*. Leibniz zakładał, że wokół każdej liczby rzeczywistej a rozciąga się *monada* - chmura liczb, które nie są rzeczywiste, ale są nieskończenie bliskie a - *„infinitely close to a"*[57].
Porządkując matematykę twórcy teorii mnogości zarządzili jej arytmetyzację - budowę wszelkich zbiorów liczbowych „na bazie" liczb naturalnych korzystając z konstruktorów dostępnych w ZFC. Tak wprowadzono do matematyki teoriomnogościowej liczby całkowite, wymierne i rzeczywiste. Gdy Weierstrass budując podstawy analizy matematycznej zaproponował precyzyjny *ϵ-δ formalizm* z ulgą stwierdzono, że „nieskończenie małe" (których Leibniz nigdy zadowalająco nie opisał formalnie) są zbędne. Cantor i twórcy nowoczesnej analizy matematycznej odrzucili te „bakcyle

[54] Lub zaskakujących odkryć.

[55] Istnienie nieskończenie małych liczb w $\mathcal{R}^{\mathcal{U}}$ dowodzi, że w języku pierwszego rzędu nie da się sformułować prawa Archimedesa - $\forall_{x \in \mathcal{R}} \exists_{n \in N}\, n \cdot x > 1$.

[56] Przekrój - para odpowiednich zbiorów liczb wymiernych (A, B) - wskazuje lukę, gdy zbiór A nie ma elementu największego a zbiór B - najmniejszego (str.35). Pojawienie się „nowych luk" w $\mathcal{R}^{\mathcal{U}}$ to tylko dowód, że ciągłość - taka, jaką definiuje Dedekind - nie jest opisywalna w języku pierwszego rzędu.

[57] Termin „monada" to centralne pojęcie filozofii Leibniza: *„Tam zaś, gdzie nie ma części, nie jest możliwa ani rozciągłość, ani kształt, ani podzielność. Monady te są tedy właściwymi atomami natury i jednym słowem pierwiastkami rzeczy." (G. W. Leibniz, Monadologia).*. Leibniza mogło zainspirować wynalezienie pod koniec XVI wieku mikroskopu co odkryło niedostępny wcześniej świat „nieskończenie małych" obiektów. Bezzasadna konfabulacja? H. Keisler wyjaśniając w [39] podstawowe pojęcia analizy niestandardowej używa terminu „mikroskop" gdy mówi o monadach i „teleskop" - gdy mówi o ... galaktykach (galaktyka liczby a to zbiór $\{b \colon |b - a|\ \textit{jest standardowa}\}$).

cholery". Nie bacząc na to, że zastępując leibnizowskie intuicje definicjami zapisanymi w języku ϵ-δ (rojącymi się od kwantyfikatorów), odseparowali matematyków od zdrowej części społeczeństwa. Byli przekonani, że czynią dobro.

Wynik Łosia podważa tę pewność. Konstrukcja ultrapotęgi $\mathcal{R}^{\mathcal{U}}$ umożliwia precyzyjne zdefiniowanie nieskończenie małych liczb rzeczywistych. Można więc wrócić do idei Leibniza uprawiając analizę matematyczną w $\mathcal{R}^{\mathcal{U}}$ zamiast w $\mathcal{R}$. Tak powstała *analiza niestandardowa*[58].

Spróbujmy pokazać, co różni języki standardowej i niestandardowej analizy matematycznej. Każdą funkcję $f\colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ można rozszerzyć do funkcji $f^*\colon \mathcal{R}^{\mathcal{U}} \to \mathcal{R}^{\mathcal{U}}$ przyjmując $f^*([(r_i)]) = [(f(r_i)]$. Twierdzenie Łosia gwarantuje, że każda pierwszorzędowa własność funkcji f przysługuje też funkcji f^*. I vice versa.

W analizie standardowej, aby zrozumieć ciągłość funkcji trzeba najpierw pojąć czym jest granica funkcji w punkcie (str. 39) - bariera nie do przeskoczenia dla zdrowej części społeczeństwa. Tymczasem korzystając z zanurzenia $\mathcal{R} \rightsquigarrow \mathcal{R}^{\mathcal{U}}$ można wrócić do intuicyjnie prostej, leibnizowskiej charakteryzacji ciągłości: *„funkcja $f\colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ jest ciągła w punkcie $a \in \mathcal{R}$, dokładnie wtedy, gdy nieskończenie mała zmiana argumentu powoduje nieskończenie małą zmianę wartości funkcji":*

$$\forall_y\, a^* \approx y \Rightarrow f^*(a^*) \approx f^*(y)$$

(gdzie $a^* = [(a, a, \ldots)]$ a zapis $a^* \approx y$ oznacza, że różnica $a^* - y$ jest nieskończenie małą liczbą):

Podobnie rzecz się ma z *pochodną funkcji ciągłej f w punkcie a. W analizie standardowej to granica ilorazu różnicowego. W niestandardowej to część standardowa liczby*

$$\frac{f^*(a^* + \alpha) - f^*(a^*)}{\alpha}$$

gdzie α to dowolnie wybrana nieskończenie mała (różna od zera)[59].

Wystarczy zajrzeć do jakiejkolwiek monografii poświęconej analizie niestandardowej by się przekonać, że prowadzenie rachunków (dowodzenie) w języku Leibniza jest w wielu przypadkach łatwiejsze niż w języku Weierstrassa[60].

> Renesans idei Leibniza pod postacią analizy niestandardowej jest tak udany, że niektórzy (np. K. Gödel) mówili i mówią o niej jako o analizie matematycznej XXI wieku...

Prawdziwy zawrót głowy grozi gdy zastosujemy konstrukcję Łosia do (istniejącego hipotetycznie) modelu ZFC. Oznaczmy go przez **Set** a przez $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ oznaczmy nowy model ZFC - jego ultrapotęgę względem właściwego ultrafiltru $\mathcal{U}$.
Zbiorami w $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ są klasy abstrakcji ciągów zbiorów z **Set**. Oczywiście:

$$[(A_1, \ldots, A_n, \ldots)] = [(B_1, \ldots, B_n, \ldots)] \quad wtw \quad \{i \in \mathbf{N} : A_i = B_i\} \in \mathcal{U}$$
$$[(A_1, \ldots, A_n, \ldots)] \in [(B_1, \ldots, B_n, \ldots)] \quad wtw \quad \{i \in \mathbf{N} : A_i \in B_i\} \in \mathcal{U}$$

Większość teoriomnogościowych konstrukcji w $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ realizowana jest „po współrzędnych". Np. para złożona ze zbiorów $[(A_1, \ldots, A_n, \ldots)]$ i $[(B_1, \ldots, B_n, \ldots)]$ to zbiór $[((A_1, B_1), (A_2, B_2) \ldots)]$. Funkcja to klasa abstrakcji ciągu funkcji w **Set**[61].

[58] Za twórcę analizy niestandardowej uważa się matematyka amerykańskiego, A. Robinsona. Trochę dziwi, że niektórzy autorzy zapominają o roli twierdzenia Łosia w budowie podstaw analizy niestandardowej.

[59] Część standardowa liczby $[(a_i)]$ to liczba $[(a, a, \ldots)]$ taka, że różnica tych liczb jest nieskończenie mała. Ponieważ w definicji pochodnej nieskończenie mała α jest wybierana dowolnie, to może się zdarzyć, że tak definiowana pochodna w punkcie nie istnieje. I bardzo dobrze, bo to samo mówi analiza standardowa. (patrz str. 40)

[60] Można skorzystać z dostępnej w internecie książki *Elementary Calculus, an infinitesimal approach* H. J. Keislera. „Łatwość" czy „trudność" to kategorie subiektywne. Sugerowałem, że miarą trudności pojęcia może być stopień zagnieżdżenia kwantyfikatorów w zdaniu je opisującym („schody generała Wieniawy"). A po przetłumaczeniu definicji formułowanych w języku Weierstrassa na język analizy niestandardowej kwantyfikatorów z reguły ubywa.

[61] Nie wszystko jest tak proste. Np. sprawdzenie, czy $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ spełnia *aksjomat ekstensjonalności* - $A = B$ wtw $\forall_C\, (C \in A \leftrightarrow C \in B)$ - wygląda tak (zarys dowodu):
gdy $[(A_i)] = [(B_i)]$ to $\{i \in N : A_i = B_i\} \in \mathcal{U}$ a gdy $[(C_i)] \in [(A_i)]$ to $\{j : C_j \in A_j\} \in \mathcal{U}$. Stąd $\{j : C_j \in A_j = B_j\} \in$

Zbiór liczb naturalnych - najmniejszy zbiór induktywny w $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ - to $\mathbf{N}^{\mathcal{U}} = [(\mathbf{N}, \ldots, \mathbf{N}, \ldots)]$.
Czujny czytelnik zauważył, że zbiór liczb naturalnych w $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ oznaczyłem tak samo jak ultrapotęgę $\mathbf{N}$ względem $\mathcal{U}$ w $\mathbf{Set}$. Rzeczywiście, te obiekty mają te same elementy. Tak samo - „po współrzędnych"- definiujemy dodawanie i mnożenie. Zatem - czy te zbiory są tym samym?
To pytanie... nie ma sensu. One należą do dwóch różnych modeli ZFC, dwóch odrębnych światów. Łatwiej to pojąć gdy zauważymy, że te zbiory mają istotnie różne rodziny podzbiorów! Liczby standardowe są podzbiorem ultrapotęgi $\mathbf{N}^{\mathcal{U}}$ w $\mathbf{Set}$ natomiast ... nie tworzą podzbioru zbioru liczb naturalnych w $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ bo byłby to zbiór induktywny istotnie mniejszy od $\mathbf{N}^{\mathcal{U}}$!

> Część zbioru, która nie jest jego podzbiorem? Kolejny paradoks?
> W żadnym razie. Aksjomaty ZFC nie dają żadnych podstaw do stwierdzenia, że podzbiorem zbioru jest każda, wyróżniona w jakikolwiek sposób kolekcja jego elementów, jego część.

To zaskakujące stwierdzenie jest konsekwencją równie szokującego twierdzenia: *„każda przeliczalna rodzina zbiorów* $([A^i] : i \in N)$ *w* $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ *taka, że każdy skończony przekrój* $[A^0] \cap \cdots \cap [A^k]$ *jest niepusty, ma ... niepusty przekrój"*.

> Rzeczywiście? Przecież łatwo udowodnimy - w ZFC!- istnienie przeliczalnych rodzin zbiorów, które nie mają tej własności - np. rodzina odcinków $(0, \frac{1}{n})$. To jednak nie przeczy przywołanemu twierdzeniu, bo ... nie jest ono sformułowane w języku ZFC! „Przeliczalność" jest w nim rozumiana „zewnętrznie": rodzina $([A^i] : i \in N)$ nie jest indeksowana przez liczby naturalne w $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ ale przez elementy „zewnętrznego" (np. definiowanego konstruktywnie) zbioru liczb naturalnych na którym posadowiony jest ultrafiltr $\mathcal{U}$.

Dowód tego twierdzenia jest zbyt skomplikowany, bym mógł choćby przedstawić jego szkic. Pokażę tylko jak z niego wynika, że liczby standardowe nie tworzą zbioru.
Załóżmy, że podzbiorze $D \subseteq \mathbf{N}^{\mathcal{U}}$ są wszystkie liczby standardowe. Dla dowolnej „zewnętrznej" liczby naturalnej n, podzbiór $D^{\geqslant n} \subset D$ złożony z liczb większych-równych standardowej liczbie $[(n, n, \ldots,)]$ jest niepusty. Tych zbiorów jest przeliczalnie wiele (w sensie zewnętrznym!) a przekrój każdej skończonej podrodziny takich zbiorów jest niepusty. Zatem - na mocy przywołanego twierdzenia - w zbiorze D musi być niestandardowa liczba naturalna! Koniec dowodu.

> W modelu zamierzonym standardowe liczby naturalne są generowane przez strukturę rekurencyjną. Każdą z nich można SKONSTRUOWAĆ W SKOŃCZONYM CZASIE (w skończonej liczbie kroków) rozpoczynając od zera, np.stawiając obok siebie kreski na pustej kartce, jedną po drugiej.
> Twierdzenie Łosia pokazuje, że tej charakteryzacji nie da się zapisać w języku pierwszego rzędu[62].
> Jakkolwiek to nie zabrzmi trzeba powiedzieć, że ta pierwotna definicja liczb naturalnych nie należy do teoriomnogościowej matematyki... .

Zaskoczeń ciąg dalszy:
I. *Definiowany w ZFC zbiór liczb naturalnych jest dobrze uporządkowany przez relację „$\leqslant$"*: każdy jego niepusty PODZBIÓR ma element najmniejszy. Ale w $\mathbf{N}^{\mathcal{U}}$ nie ma najmniejszej liczby niestandardowej! Sprzeczność? Nie: te liczby - jako dopełnienie liczb standardowych w $\mathbf{N}^{\mathcal{U}}$ - nie tworzą podzbioru.

II. *Definiowana teoriomnogościowo liczba naturalna jest* SKOŃCZONYM *zbiorem,* $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Ale każda liczba niestandardowa, ma... nieskończenie wiele elementów! Np. wszystkie standardowe liczby są elementami zbioru - liczby niestandardowej $[(0, 1, 2, \ldots)]$. Sprzeczność? W żadnym razie. W teorii mnogości zbiór skończony to taki, który nie jest równoliczny ze swym właściwym podzbiorem. Nic więcej.

$\mathcal{U}$ i, konsekwentnie, $\{k : C_k \in B_k\} \in \mathcal{U}$, czyli $[(C_i)] \in [(B_i)]$.

Gdy $[(A_i)] \neq [(B_i)]$, to $\{i \in N : A_i \neq B_i\} \in \mathcal{U}$ czyli jeden ze zbiorów $\{i \in N : A_i \supsetneq B_i\}$, $\{i \in N : A_i \subsetneq B_i\}$ jest w $\mathcal{U}$. A to pozwala na skonstruowanie zbioru $[(C_i)]$ który należy tylko do jednego z tych dwóch zbiorów.

[62]Wynika to z aksjomatu wyróżniania.

> Definiowana w ZFC skończoność jest pojęciem zależnym od modelu.
> Taka definicja skończoności nie gwarantuje, że każdy zbiór skończony można opróżnić W SKOŃCZONYM CZASIE wyjmując kolejno po jednym elemencie[63].

III. Skoro liczby standardowe nie tworzą podzbioru, to przyporządkowanie $f : \mathbf{N}^{\mathcal{U}} \to \{0,1\}$ takie, że:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n - \textit{niestandardowa} \\ 0 & n - \textit{standardowa} \end{cases}$$

NIE JEST funkcją w $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$[64]. Ale to przyporządkowanie jest funkcją w $\mathbf{Set}$.

IV. W $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ nie potrafimy rozstrzygać o równości liczb naturalnych. Np. nie wiemy, czy liczba $[(0,1,0,1,0,1,\ldots)]$ to zero czy następnik zera - to zależy od tego, czy zbiór liczb parzystych należy do ultrafiltru $\mathcal{U}$.

> Skoro równość liczb naturalnych nie jest rozstrzygalna, to czy o jakiejkolwiek funkcji działającej na tym zbiorze można mówić, że jest obliczalna?

V. Liczby naturalne to skończone liczby porządkowe. Jeśli są one różne w $\mathbf{Set}$ i $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$, to i liczby porządkowe w obu modelach są różne.

Obiekty $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ reprezentowane przez ciągi stałe - $[(A,A,\ldots)]$ - to zbiory *standardowe*. Można więc - w tym modelu - mówić o standardowych i niestandardowych elementach zbioru, standardowych funkcjach itp. i zauważyć - na przykład - takie ciekawostki:

- *każdy nieskończony zbiór* $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ *ma niestandardowe elementy,*
- *wszystkie elementy zbioru skończonego w* $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ *są standardowe dokładnie wtedy, gdy ten zbiór jest standardowy.*

13.3 Matematyczne uniwersum

Strasznie nam się ta opowieść o modelach ZFC skomplikowała... . Jak w tym kontekście interpretować wynik Łosia?

„Zbiór" jako pojęcie pierwotne teorii ZFC nie jest w niej definiowany. Próbujemy to robić w języku naturalnym. Próbował Cantor, próbują kognitywiści. Mimo niejasności - wszak język naturalny nie ma precyzji języków formalnych - żywimy przekonanie, że to pojęcie ma jednoznacznie określony zakres. Twórcy teorii mnogości chcieli te niejasne wyobrażenia zastąpić opisem w formalnym języku pierwszego rzędu. Klasa desygnatów pojęcia „zbiór" miała być opisana jako model ZFC. I - jak się zdawało (chciało) - jako model jedyny.

Niesprzeczność ZFC - niedowodliwa w ZFC - wymusza istnienie jej „małych modeli"[65]. Twierdzenia Lowenheima-Skolema i Łosia pokazały, że małych modeli jest wiele - jeśli tylko istnieje choćby jeden. Można było się łudzić, że wszystkie małe modele są zawarte w jednym dużym „uniwersalnym" modelu (choćby takim, którego elementy tworzą klasę a nie zbiór). Ale twierdzenie Łosia temu przeczy - niesposób zanurzyć modele $\mathbf{Set}$ i $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ w jeden większy model tak, że zbiory liczb naturalnych z obu modeli pozostaną - po tym zanurzeniu - zbiorami liczb naturalych.

13.3.1 Model zamierzony ZFC

Powszechnym nieporozumieniem dotyczącym modeli ZFC jest oczekiwanie, że (...) powinniśmy ZAWIESIĆ WSZYSTKIE NASZE WCZEŚNIEJSZE

[63] Ilustrując zasadę indukcji, często używamy takiego przykładu: *„w urnie jest skończenie wiele kul numerowanych liczbami naturalnymi. Na miejsce jednej wyjmowanej kuli wolno włożyć skończenie wiele kul o numerach niższych niż numer wyjętej kuli. Pokaż, że takie postępowanie musi - po skończonym czasie - doprowadzić do opróżnienia urny"*. Akurat... spróbuj tak opróżnić urnę, w której jest jedna kula o numerze $[(0,1,2,\ldots)]$...

[64] 0 to $[(0,0,\ldots)]$ i $1 = [(1,1,\ldots)]$.

[65] Małych w tym sensie, że „elementy tego modelu tworzą zbiór".

WYOBRAŻENIA *dotyczące zbiorów, kiedy zaczynamy studiować ZFC.* [66]

Matematyka nie zaczęła się od Cantora i Hilberta. Twórcy ur-teorii - ZFC - jako cel stawiali sobie uporządkowanie ZASTANEJ MATEMATYKI. To był ich model zamierzony. I jest nim nadal choć dziś - właśnie za sprawą ZFC - to matematyczne uniwersum jest nieporównywalnie większe.

> To nie oznacza że w języku ZFC można wiernie odwzorować wszystkie cechy „zastanej matematyki". W tej matematyce wszystkie liczby naturalne są standardowe, konstruowalne „w skończonej liczbie kroków" a równość tych liczb jest rozstrzygalna. W konsekwencji, konstruowane z liczb naturalnych liczb całkowite, wymierne a nawet rzeczywiste czy zespolone, interpretujemy w tym świecie jednoznacznie. Dzięki kartezjańskiemu utożsamieniu punktów z ciągami liczb również przestrzeń euklidesowa „wymiaru n" jawi się nam jako pojęcie „jednoznacznie określone". W tym świecie podstawowe obiekty są konstruowalne a skończoność rozumiemy tak, jak w świecie rzeczywistym.
> Tego wszystkiego ZFC nie potrafi adekwatnie opisać. Pokazało to twierdzenie Łosia.
>
> *Twierdzenie Łosia nie jest odkryciem alternatywnych uniwersów. Ono tylko wskazuje ograniczenia ZFC i języka pierwszego rzędu jako języka opisu matematycznego uniwersum*[67].

Takie nieortodoksyjne wyobrażenie matematycznego uniwersum wymaga rozszerzenia ZFC o „aksjomat istnienia modelu zamierzonego". Ale ten aksjomat ma odmienny charakter. Jest raczej manifestacją przekonania, że uprawiania matematyki nie ogranicza się do ZFC.

„THE AXIOM OF STANDARD MODEL, *i.e., that there is a standard model, is slightly stronger than the consistency of the system. Nevertheless, I feel that one must work with standard models if one is to have any kind of reasonable intuitive understanding*" *-P. Cohen [16].*
J. von Neumann: *„Formalistycznie pojmowana teoria zbiorów odseparowana jest od wszystkiego co intuicyjne."*

Można też bardziej „psychologicznie": *„Jeżeli za urlogikę przyjmiemy pierwszorzędową teorię zbiorów, to zdaniami urlogiki są zdania pierwszego rzędu z jedynym symbolem relacyjnym „∈". Aksjomatami są aksjomaty ZFC. Nieformalnie interpretujemy te aksjomaty jako stwierdzenia o matematycznych obiektach konstruowanych jako zbiory. A ponieważ* MATEMATYCZNE OBIEKTY NIE SĄ A PRIORI ZBIORAMI, PEWNA REINTERPRETACJA JEST DOKONYWANA W NASZYCH UMYSŁACH. *Jednakże jest to zgodne z ideologią matematyczną która przyjmuje, że nie jest ważne czym są obiekty ale jakie są relacje między nimi" [89]*

„Życie jest formą istnienia białka tylko w kominie coś czasem załka" - A. Osiecka... .

J. Pogonowski w artykule *„Jak żyć z paradoksem Skolema"* (internet) pisał: *„Trudno jest sensownie mówić o jedynym, zamierzonym modelu teorii mnogości. Problem ten nie spędza jednak snu z powiek pracującym matematykom – posługują się oni swobodnie pojęciami mnogościowymi, pozostawiając filozoficzne rozterki związane z podstawami teorii mnogości logikom".* Pełna zgoda co do oceny postaw matematyków ale mój wniosek jest inny: ZFC MA model zamierzony, choć - podkreślmy - nie jest to model teoriomnogościowy.
Jego jądro to rekurencyjna struktura liczb naturalnych. Są to jednocześnie skończone liczby porządkowe a ich „zamierzona" interpretacja determinuje interpretację sporego fragmentu liczb porządkowych. Wyjaśniam: twierdzenie *o postaci normalnej Cantora* mówi, że każdą liczbę porządkową $\alpha \neq 0, , \alpha < \varepsilon_0$ można zapisać w postaci $\alpha = \omega^{\beta_1} m_1 + \ldots + \omega^{\beta_k} m_k$, gdzie n_i, m_i, k to liczby naturalne i $\alpha > \beta_1 > \cdots > \beta_k \geqslant 0$. Stąd każda liczba $\alpha < \varepsilon_0$ ma postać normalną, którą można zapisać korzystając wyłącznie z liczb naturalnych i liczby ω. Dlatego „zamierzona interpretacja" liczb naturalnych określa interpretację liczb porządkowych $< \varepsilon_0$.[68]

---

[66] *T. Y. Chow, A beginner's guide to forcing, Contemporary Mathematics*, tekst dostępny w internecie.

[67] W artykule *„Podstawy Matematyki w wieku XX"* (dostępnym w internecie) znalazłem takie stwierdzenie jego Autorów (W. Marek i J.Mycielski): *„ G. Cantor (...) udowodnił, że wszystkie przedmioty, które rozważają matematycy, można rozumieć jako zbiory. (...) Na przykład, za pomocą pojęcia zbioru łatwo zdefiniować pojęcie liczby naturalnej".* Nie rozumiem. Zgodzę się, że można je tak opisywać W JĘZYKU ZFC. Ale nie „rozumieć".

[68] ε_0 to najmniejsza liczba porządkowa spełniająca równość $\beta = \omega^\beta$. Jednocześnie ε_0 to granica ciągu 0, $1 = \omega^0$, $\omega = \omega^1$, ω^ω, ω^{ω^ω}, ... To całkiem spora liczba porządkowa - pracujący matematycy rzadko wychodzą poza wyznaczony przez nią świat wielkości nieskończonych. Takich liczb użyliśmy opisując zmagania Heraklesa z Hydrą.

Potem, wykorzystując liczby porządkowe $< \varepsilon_0$, zbudujemy spory fragment„zamierzonego" uniwersum von Neumanna.

Taki „model" ZFC mają w głowie pragmatycznie usposobieni pracujący matematycy. To świat matematyczny, w którym pracują korzystając z języka ZFC i jej aksjomatów STOSOWNIE DO POTRZEB. Bo ten język jest w istocie „nadmiarowy". Ale to raczej jego zaleta a nie wada. Np. teoriomnogościowe pojęcie funkcji wydaje się zbyt odległe od tego jakie funkcje są w istocie interesujące w modelu zamierzonym. Ale byłoby zdecydowanie gorzej, gdyby pewne „przyporządkowanie funkcyjne" w tym modelu zamierzonym nie mieściło się w teoriomnogościowym pojęciu funkcji.

Zrozumienie ZFC budujemy dzięki (podświadomemu) odwołaniu się do modelu zamierzonego. Oto przykład. Opisując po raz pierwszy niestandardowy model arytmetyki (str. 110) argumentowałem: *„każdy skończony podzbiór teorii* $PA \cup \{succ^n(0) < c : n \in N\}$ *ma model - jest nim* $\mathbf{N}$ *z „odpowiednio dużą" liczbą* n_c *wskazaną jako interpretacja stałej c. Zatem (...) ta teoria ma model. Ale nie może nim być* $\mathbf{N}$, *gdyż „nie istnieje liczba naturalna większa od każdej liczby postaci* $succ^n(0)$*".*
Czyżby? Przecież w $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ liczba naturalna $\tilde{id} = [(0, 1, 2, \ldots, n \ldots)]$ jest większa od każdej standardowej liczby $[(\ldots, n, n, \ldots)] = succ^n(0)$. To rozumowanie nie jest poprawne. Bardziej precyzyjnie: nie można tego stwierdzenia udowodnić w ZFC !

To rozumowanie jest jednak w pełni poprawne gdy prowadzimy je w modelu zamierzonym, w którym liczby naturalne są standardowe i reprezentowane przez napisy $succ(succ(\ldots succ(0)))$[69] .

Co mamy w głowie mówiąc *„słowo to skończony ciąg liter"*? Jak rozumiemy stwierdzenie, że *„zbiór fromuł (termów)"*? Przecież to nie tak, że najpierw wskazujemy pewien teoriomnogościowy model ZFC a dopiero potem interpretujemy te i inne metamatematyczne stwierdzenia. Mamy w głowie „pierwotny" model zamierzony. Konieczność odwołania do tego modelu staje się oczywista gdy zauważymy, że w wielu fundamentalnych twierdzeniach pojawiają się modele budowane z formuł, co oznacza - niczym nieuprawnione - utożsamienia zbioru formuł rozumianego jako realny zbiór napisów ze zbiorem definiowanym teoriomnogościowo. Tak jest np. w opisanym wcześniej twierdzeniu Henkina o zupełności[70].

> Uznajemy ZFC za ur-teorię ale matematykę uprawiamy w jej modelu zamierzonym.
> Ten model jest potrzebny robotnikom matematyki jak tlen, bo nadaje sens ich pracy[71].

Dodajmy arcyważny przykład. *Uniwersum Gödla*[72] to odchudzona wersja uniwersum von Neumanna - rekurencyjnie definiowana rodzina coraz to większych „zbiorów" $(L_\alpha : \alpha \in Ord)$. Punkt wyjścia jest ten sam: $L_0 = V_0 = \emptyset$. Gdy „zbiór" L_α jest już zdefiniowany, to dla każdej formuły ϕ definiujemy „zbiór" L^ϕ_α złożony z tych „zbiorów", które są opisane przez formułę ϕ i parametry ze zbioru L_α[73]. Przyjmujemy

$$L_{\alpha+1} = \bigcup_{\phi \in Form} L^\phi_\alpha$$

gdzie $Form$ to (zewnętrzny), przeliczalny zbiór formuł teoriomnogościowych. Dla liczb porządkowych granicznych przyjmujemy $L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\alpha$. Ostatecznie

$$L = \bigcup_{\alpha \in Ord} L_\alpha$$

Mniejsza o szczegóły[74]. Zauważmy, że $L_{\alpha+1}$ to suma rodziny zbiorów indeksowanych przez „ze-

[69]Można zaprzecyć temu rozumowaniu np. włączając do języka arytmetyki symbol $succ^{\tilde{id}}$. Powodzenia... .

[70]W artykule P. Gładkiego *„Program Hilberta"* (internet), przypisano Hilbertowi pogląd, że: *„w metamatematyce rozumowanie musi opierać się na intuicyjnym pojęciu liczby całkowitej a nie na arytmetyce sformalizowanej."* No to mam ważnego sojusznika... .

[71] *„He's a real nowhere man, sitting in his Nowhere Land, making all his nowhere plans for nobody. Doesn't have a point of view, Knows not where he's going to (...)* - The Beatles.

[72]*Constructible Gödel universe"*. Nie należy mylić tego pojęcia z „kosmologicznym" *uniwersum Gödla.*

[73]Odwołujemy się tu do aksjomatu wyróżniania.

[74]Patrz: *https://en.wikipedia.org/wiki/Constructible universe.*

wnętrzny" zbiór formuł $Form$. A przecież ZFC gwarantuje tylko istnienie sum rodzin zbiorów indeksowanych przez zbiór z tego samego modelu! *„Gödel's construction relies on the central concept of definability, that requires to* MANIPULATE FORMULAS WITHIN THE SET-THEORETIC UNIVERSE, *(...) For that, we need to* INTERNALIZE THE LANGUAGE OF FORMULAS *of ZF in ZF, by constructing a particular denumerable set Form whose elements—called (...) codes of formulas—are intended to represent external formulas as sets [47].* Przedstawione w tej pracy rozwiązanie problemu jest zbyt skomplikowane technicznie bym mógł je tu szczegółowo omawiać. Tym bardziej, że nie jestem do niego przekonany[75].
Uh Houston, we've had a problem... A może należy budować uniwersum Gödla w modelu zamierzonym? Nie trzeba wówczas „uwewnętrzniać" zbioru formuł... .

Konstrukcja von Neumanna korzysta z aksjomatu zbioru potęgowego. Ale nawet w modelu zamierzonym, znając zbiór A nie możemy jednoznacznie stwierdzić „jak wyglądają" jego podzbiory: NIE WIEMY jak wygląda zbiór potęgowy związany z A[76]. Zatem jeśli przyjmiemy, że uniwersum von Neumanna jest budowane w modelu zamierzonym, to nadal jest to tylko wskazanie hierarchicznej struktury zbiorów w tym modelu (a nie przepis na jego konstrukcję). Natomiast konstruując w tym samym modelu uniwersum Gödla nie korzystamy ze zbiorów potęgowych. Obiekty tego uniwersum są opisywane rekurencyjnie. To może to jest konstrukcja modelu zamierzonego?[77]

Teza, że liczby naturalne istnieją poza teorią mnogości (która w konsekwencji uprawomocnia tezę o istnieniu modelu zamierzonego) nie budzi większych oporów. Tak myślał nie tylko Brouwer ale i jego antagonista Hilbert. Kilkadziesiąt lat poźniej E. Nelson pisał (elegancko): *„There is obviously something inelegant about making arithmetic depend on set theory" [53].* A T. Forster poszedł dalej pisząc: *„One should not allow the (fairly sensible) idea that set theory can be a foundation for mathematics to bounce one into thinking that one has to start entirely inside Set Theory and* PULL ONESELF UP INTO MATHEMATICS BY ONE'S BOOTSTRAPS[78]*. That is not sensible. (...) On the contrary: it is perfectly reasonable - indeed essential - to approach the construction of the cumulative hierarchy armed with the primitive idea of ordinal" [30].* Dalej jest jeszcze mocniej: *„Textbook after textbook will tell the reader that an ordinal is a transitive set wellordered by „∈". Ordinals (...) are not sets at all."*

Miło wiedzieć, że nie jestem odosobniony w swoich poglądach... .

13.3.2 Superstruktury i niestandardowe uniwersa

Dyskusja o modelu zamierzonym miała pokazać, że można traktować ZFC pragmatycznie. To byłoby zapewne herezją sto lat temu, w czasach młodości ZFC. Zniszczenie marzeń ortodoksów dokonane przez Gödla i Cohena sprawiło, że przestano straszyć heretyków stosem. Zaczął kiełkować pogląd, iż objęcie pojedynczą aksjomatyczną teorią całego *matematycznego uniwersum* nie musi być priorytetem matematyki. Pewnie dlatego na jednej ze stron wikipedii znalazło się takie zdanie: *„In mathematics (...) a universe is a collection that contains all the entities* ONE WISHES TO CONSIDER IN A GIVEN SITUATION"*..* Gotów jestem się zakładać, że dziś większość matematyków to teoriomngościowi pragmatycy - *praktykują ale nie wierzą.*

Te tworzone *ad hoc* uniwersa można opisać formalnie jako *superstruktury*[79]. Ich budowa przy-

[75]Zapomnijmy na chwilę o tych wątpliwościach. Wówczas $L \subseteq V$. Ale czy uniwersum L jest istotnie mniejsze? Równość $V = L$ jest niesprzeczna z ZFC tzn. nie potrafimy - w ZFC - dowieść równości $L = V$ ani jej zaprzeczyć... . *„Gödel briefly considered proposing that we add $V = L$ to the accepted axioms (...) but he soon changed his mind. His later view was that $V = L$ is* REALLY *false, even though it is consistent with set theory, if set theory is itself consistent"* [60]. Warto zajrzeć do tego artykułu H.Putnama dumając o relacji między ZFC a „rzeczywistością".

[76]Nieprzekonanym przypomnę też, że istnienie pewnych podzbiorów $\mathcal{R}$ (również w opisywanym tu modelu zamierzonym!) zależy od akceptacji pewnika wyboru (zbiory niemierzalne -str.182)

[77]To naiwne, wiem.

[78]*„pull oneself up by one's bootstraps"* to idiom, którego jedno z możliwych znaczeń jest bliskie opowieści o baronie Munchausenie, który wydostał się z bagna ciągnąc się za włosy... .

[79]Tę nieprzyzwoicie krótką notkę o niestandardowych uniwersach sporządziłem w oparciu o pracę [52] pomijając szereg *istotnych* szczegółów, które jednak nie są *istotne* dla zrozumienia *istoty* rzeczy... .

pomina nieco konstrukcję von Neumanna. Jej bazą jest dowolnie ustalony *zbiór indywiduuów (atomów, ur-elementów)*. Przyjmijmy, że jest to zbiór liczb rzeczywistych (w „modelu zamierzonym"): *„in analysis a real number is always handled as a* PRIMITIVE ENTITY RATHER THAN AS A SET" - *[52]*. Superstruktura o bazie $\mathcal{R}$ to przeliczalna suma zbiorów.

$V(\mathcal{R}) = \bigcup_{n\in N} V_n(\mathcal{R})$, gdzie $V_0(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$, $V_{n+1}(\mathcal{R}) = V_n(\mathcal{R}) \cup 2^{V_n(\mathcal{R})}$.

$V(\mathcal{R})$ to model języka teorii zbiorów ale nie jest to model ZFC. Ale są tu wszelkie obiekty - liczby i zbiory - niezbędne do uprawiania analizy matematycznej. Można tu mówić o iloczynach kartezjańskich, funkcjach, relacjach a więc i o modelach teorii pierwszego rzędu[80].

> Uprawiając matematykę kreujemy własne uniwersum. *„Superstructures are universes for the practice of mathematics"*. Korzystamy z języka teorii mnogości a z jej aksjomatów - „w ograniczonym zakresie".

Superstrukturę $V(\mathcal{R})$ można rozszerzyć tworząc *niestandardowe uniwersum*. Dla dowolnie wybranego ultrafiltru $\mathcal{U}$ na zbiorze $\mathbf{N}$ *ograniczona ultrapotęga* $V(\mathcal{R})_r^{\mathcal{U}}$ to podzbiór „zwykłej" ultrapotęgi: ciąg (f_n) wyznacza element $[(f_n)] \in V(\mathcal{R})_r^{\mathcal{U}}$ tylko wtedy, gdy wszystkie elementy tego ciągu należą do jednego ze zbiorów $V_m(\mathcal{R})$.
Para $(V(\mathcal{R}), V(\mathcal{R})_r^{\mathcal{U}})$ wraz z przyporządkowaniem- zanurzeniem $a \in V(\mathcal{R}) \rightsquigarrow a^* = [(a, a, \ldots)] \in V(\mathcal{R})_r^{\mathcal{U}}$ to właśnie niestandardowe uniwersum[81].

Elementy $V(\mathcal{R})_r^{\mathcal{U}}$ to *zbiory niestandardowe*. Zbiory postaci a^* nazywamy *zbiorami standardowymi*. *Zbiory wewnętrzne* to elementy zbiorów standardowych a pozostałe to *zbiory zewnętrzne*[82].

$V(\mathcal{R})$ to świat klasycznej analizy matematycznej. Zanurzenie $V(\mathcal{R})$ w $V(\mathcal{R})_r^{\mathcal{U}}$ nie zmienia przedmiotu badań lecz stwarza szerszy konteks poznawczy: *„Załóżmy, że chcemy udowodnić pewną hipotezę P dotyczące liczb rzeczywistych (...) i opisaną przez formułę pierwszego rzędu ϕ. Może się zdarzyć, że łatwiej jest rozstrzygnąć tę hipotezę w niestandardowym modelu, w którym są dostępne dodatkowe narzędzia (np. nieskończenie małe), zamiast w standardowym modelu. Gdy właściwość P (...) zostanie udowodniona (lub obalona) w modelu niestandardowym, (...) to jest ona również prawdziwa (fałszywa) w strukturze standardowej" [52]*

Dodatek: twierdzenie Ramsey'a revisited

Twierdzenia Łosia pozwala spełnić obietnicę i dokończyć dowód twierdzenia Ramsey'a: *„dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje liczba $R(n)$ taka, że każdy skończony, pełny dwukolorowy graf o $R(n)$ wierzchołkach zawiera jednokolorowy podgraf o n wierzchołkach"*[83].

Wykorzystamy udowodnioną już „nieskończoną wersję" tego twierdzenia (str. 112) i twierdzenie Łosia w jego pełnej wersji. Ta pełna wersja mówi (upraszczając) że *„pierwszorzędowe zdanie prawdziwe we wszystkich modelach $(\mathcal{A}_n : n \in N)$ jest prawdziwe w ultraprodukcie tej rodziny* $\Pi(\mathcal{A}_n : n \in N)$" [84]

Pełne grafy dwukolorowe to modele pewnej teorii pierwszego rzędu[85] a własność *„dwukolorowy graf nie zawiera jednokolorowego podgrafu o m wierzchołkach"* jest opisywalna w języku tej teorii. To otwiera możliwość wykorzystania wyniku Łosia.

Dowodzimy przez sprzeczność: przyjmijmy, że dla pewnej liczby naturalnej m nie istnieje liczba $R(m)$ o żądanej własności, tzn. dla każdej liczby naturalnej n można wskazać pełny dwukolorowy i n-wierzchołkowy graf K_n w którym nie ma jednokolorowego podgrafu o m wierzchołkach.

[80] Wprawdzie teoriomnogościowa konstrukcja zbioru liczb naturalnych „nie mieści się w $V(\mathcal{R})$" ale te liczby są tu obecne jako elementy bazowego zbioru $\mathcal{R}$).

[81] Przypomnijmy, że inne niestandardowe uniwersa otrzymamy zastępując zbiór $\mathcal{R}$ dowolnym zbiorem X.

[82] Nazwy „wewnętrzny" i „zewnętrzny" nie mają wiele wspólnego ze znaczeniami, jakie im nadaliśmy poprzednio.

[83] Przypomnijmy: to twierdzenie interesuje nas dlatego, że jego nieco wzbogacona wersja - twierdzenie Parisa-Harringtona - to przykład zdania niedowodliwego w PA a dowodliwego w ZFC.
Zapisany tu „dowód" jest, jak zawsze, tylko szkicem, zarysem dowodu.

[84] Elementami ultraproduktu $\Pi(\mathcal{A}_n : n \in N)$ są klasy abstrakcji ciągów $(a_n : a_n \in A_n)$ definiowane tak, jak w przypadku ultrapotęgi. Działania i relacje na tych ciągach też definiujemy „tak samo".

[85] Spróbuj samodzielnie sformułować tę teorię.

Zbudujmy ultraprodukt rodziny $\Pi^{\mathcal{U}}(K_n : n \in N)$ względem dowolnego właściwego ultrafilru $\mathcal{U}$. Na mocy twierdzenia Łosia, ten obiekt dziedziczy wszystkie wspólne pierwszorzędowe własności modeli $(K_n : n \in N)$. Jest więc pełnym dwukolorowym grafem bez jednokolorowego podgrafu o m wierzchołkach.
Ten graf-ultraprodukt jest nieskończony i przeliczalny. Zatem - na mocy „nieskończonej wersji" twierdzenia Ramsey'a - jest w nim nieskończony jednokolorowy pełny podgraf, czyli ... zawiera jednokolorowy pełny podgraf o m wierzchołkach.

Ta sprzeczność upoważnia do stwierdzenia, że udowodniliśmy twierdzenie Ramsey'a.

Jeszcze jedna uwagę godną uwagi: $R(2) = 2$. Łatwo wyliczyć, że $R(3) = 6$. Ale na pytanie o liczbę $R(5)$ potrafimy dziś odpowiedzieć tylko, że $43 \leqslant R(5) \leqslant 49 \ldots$ ... .
Jak to możliwe, że dysponując potężnymi komputerami i obliczeniami rozproszonymi nie umiemy spośród siedmiu liczb wybrać tej jednej właściwej? Policzmy: liczba przypadków, które trzeba przetestować dla np. $n = 45$ to - szacunkowo - liczba podzbiorów zbioru par, jakie można utworzyć korzystając z 45 elementów. A to - „w przybliżeniu" - $2^{(45^2)}$...[86] Można podejrzewać, że ten niesłychanie szybki wzrost liczb Ramsey'a jest przyczyną niedowodliwości twierdzenia Ramsey'a (w wersji Parisa-Harringtona) w arytmetyce Peano...[87].

13.3.3 Forcing i niezależność hipotezy kontinuum (nieprzyzwoicie krótko)

> Jeśli chcemy zrozumieć metodę forcingu musimy wyzbyć się naiwności, „intuicji" i postrzegać teorię ZFC skrajnie formalnie - np. konsekwentnie przestrzegać zasady, że elementami zbioru są zbiory. Nie można bać się liczb porządkowych oraz indukcji i rekurencji pozaskończonej.

Początkiem opowiadania o metodzie forcingu jest przytoczone wcześniej twierdzenie[88] :

„jeśli teoria ZFC jest niesprzeczna, to ma model U, w którym można wskazać przeliczalny i tranzytywny zbiór M, który jest również modelem ZFC".
Zbiorami w modelu M są te zbiory modelu U, które są elementami M. Ponieważ M jest tranzytywny i przeliczalny to *wszystkie zbiory w M (elementy M) są zbiorami przeliczalnymi w U.*

W rozważanej sytuacji można wśród pojęć teoriomnogościowych wyróżnić *pojęcia absolutne* takie, że każdy desygnat tego pojęcia w modelu M jest też jego desygnatem w dużym modelu U (upraszczam). I tak:[89]
- $\mathbf{N}^U = \mathbf{N}^M$ *- zbiór liczb naturalnych w M to zbiór liczb naturalnych w U - pojęcie „zbiór liczb naturalnych" jest absolutne,*
- zbiór $A \in M$ jest liczbą porządkową w M dokładnie wtedy, gdy jest liczbą porządkową w U. (ale liczb porządkowych w M jest mniej niż w U[90]. „Liczba porządkowa" to pojęcia absolutne.

Zbiór potęgowy $2^{\mathbf{N}}_M$ istnieje (bo M to model ZFC) i „wewnątrz M" jest nieprzeliczalny. Ale jest zbiorem przeliczalnym w U, czyli jest różny od od zbioru potęgowego $2^{\mathbf{N}}_U$ w U. Stąd wynika, że:
$\aleph_1^M$ *- najmniejsza nieprzeliczalna liczba kardynalna w M - jest przeliczalna w U i tym samym różna od $\aleph_1^U$ - najmniejszej nieprzeliczalnej liczby kardynalnej w U.* Pojęcia „liczba kardynalna" i „(najmniejsza) nieprzeliczalna liczba kardynalna" nie są absolutne.

---

[86] Szacując nieco dokładniej: 2^{990}. Ale to niewiele zmienia...

[87] *„Wyobraźmy sobie, że wroga cywilizacja napada na Ziemię i - grożąc zniszczeniem planety - żąda od nas wyznaczenia wartości liczby $R(5)$. By uniknąć zagłady powinniśmy zmobilizować wszystkich matematyków, informatyków i programistów, zaprogramować wszystkie komputery i spróbować znaleźć żądaną wartość. A jeśli kosmici zażądają wyznaczenia liczby $R(6)$? Wówczas powinniśmy raczej spróbować... zniszczyć najeźdźców." (P.Erdos (1913-1996) - matematyk węgierski)*

[88] Tego twierdzenia tu nie dowodzimy - nasza opowieść o forcingu to „ślizganie się po powierzchni". Z uwagi na niebanalną złożoność formalnych definicji i dowodów ograniczam się do nieformalnej - ale mam nadzieję, zrozumiałej - narracji. Zainteresowanym polecam [92] - znakomite źródło wiedzy o metodzie forcingu, z którego korzystałem pisać ten podrozdział.

[89] Dowody poniższych twierdzeń można znaleźć w [92].

[90] Bo wszelkie liczby porządkowe we M są zbiorami przeliczalnymi w U.

Chyba się trochę kręci w głowie (szczególnie platonikom)... .
Wstęp za nami. Metodę forcingu stosuje się wtedy, gdy - mówiąc mało precyzyjnie - chcemy rozszerzyć model M (wewnątrz U) dokładajac do niego pewien zbiór $G \in U$. Ale ten dokładany zbiór nie jest dowolny - musimy „coś o nim wiedzieć" patrząc na mały model M.

Zaczniemy od przykładu.
Zbiór $\mathbf{N}$ ma mniej - bo przeliczalnie wiele - podzbiorów w M niż w U. Tym samym nie każda U-funkcja $f : \mathbf{N} \to \{0,1\}$ jest w M. Ale w M jest zbiór wszystkich *skończonych aproksymacji* takich U-funkcji [91]. Oznaczmy ten zbiór przez P
Każda funkcja $f\colon \mathbf{N} \to \{0,1\}$ w U wyznacza podzbiór P złożony z jej skończonych przybliżeń. f jest ich sumą mnogościową.
Zapytajmy: jak opisać podzbiory $G \subset P$ których suma mnogościowa jest (wszędzie określoną) U-funkcją z $\mathbf{N}$ do $\{0,1\}$? I na dodatek taką, która nie należy do M?
Dwa warunki są oczywiste:

- jeśli $q \in G$, $p \in P$ oraz $p \subseteq q$, to $p \in G$,

- dla dowolnych $p, q \in G$ istnieje $r \in G$ taki, że $p, q \subseteq r$,

Te gwarantuje, że suma mnogościowa funkcji ze zbioru G jest funkcją częściową z $\mathbf{N}$ do $\{0,1\}$. Dwa pozostałe warunki sformułujemy tak:

- jeśli $D \subset P$, $D \in M$ oraz D jest gęsty (tzn. dla każdego $p \in P$ istnieje $q \in D$ taki, że $p \subseteq q$) to przekrój $G \cap D$ jest niepusty.

- $G \notin M$.

Dla każdej liczby naturalnej n zbiór $D_n = \{q \in P\colon n \in dom(q)\}$ jest gęsty. Dlatego ten trzeci warunek zapewnia, że dziedziną funkcji-sumy funkcji ze zbioru G jest cały zbiór $\mathbf{N}$.
Oznaczmy tę funkcję-sumę przez f_G. Łatwo sprawdzić, że zbiór $P \setminus G = \{q \in P\colon \exists_n\, q(n) \neq f_G(n)\}$ jest gęstym podzbiorem P. To oznacza, że przekrój $G \cap (P \setminus G)$ powinien być niepusty - o ile $P \setminus G \in M$. Ale to jest niemożliwe jeśli $G \notin M$[92].

Podsumowując: jeśli $G \subset P$ spełnia wskazane cztery warunki, to suma f_G jest (wszędzie określoną) funkcją z $\mathbf{N}$ do $\{0,1\}$ która nie należy do M.

Te cztery warunki definiują *ideały* w dowolnym niepustym zbiorze $P \in M$.

Punktem wyjścia do konstrukcji rozszerzenia modelu M metodą forcingu jest para $(P \in M, G \subset P)$ taka, że G jest ideałem w P[93]. Rezultatem zastosowania tej metody jest model ZFC oznaczany przez $M[G]$ taki, że:

- $M[G]$ zawiera M i G,

- $M[G]$ jest przeliczalnym i tranzytywnym zbiorem w U,

- $M[G]$ ma te same liczby porządkowe co M.

Oba „małe" modele - M i $M[G]$ - można opisać korzystając z hierarchii von Neumanna, jako jako sumy definiowanych w znany nam już sposób, zbiorów (str.185):

$$M = \bigcup(V_\alpha^M\colon \alpha \in Ord(M)), \qquad M[G] = \bigcup(V_\alpha^G\colon \alpha \in Ord(M))$$

gdzie $OrdM$ to zbiór liczb porządkowych z M. $V_\alpha^G \supseteq V_\alpha^M$ co oznacza, że zbiory tej postaci mają - w $M[G]$ - „nowe" podzbiory, które nie należą do M.
Problem w tym, że opis „rozszerzania" zbiorów V_α^M jest mocno skomplikowany. Trudno.

I. Najpierw definiujemy zbiór *P-nazw*. Jest to suma rekurencyjnie definiowanej rodziny zbiorów $(\mathcal{N}_\alpha)$ indeksowanej liczbami porządkowymi w M:

- $\mathcal{N}_0$ to zbiór pusty,

---

[91] Skończona aproksymacja U-funkcji f to jej obcięcie do skończonego podzbioru $\mathbf{N}$. Dowód (nietrywialny), że $P \in M$ znajdziemy w [92] str. 31.

[92] Gdyby $P \setminus G \in M$ to również $G \in M$ jako dopełnienie tego podzbioru w zbiorze $P \in M$.

[93] Zbiór P to *„forcing notion"*, G to *„generic ideal"*. Nie znam powszechnie akceptowanych polskich odpowiedników tych terminów. *„Generic ideal"* G będę nazywał tu po prostu *ideałem*.

- $\mathcal{N}_\alpha$ to zbiór wszystkich podzbiorów produktu $\bigcup(\mathcal{N}_\beta\colon \beta < \alpha) \times P\colon\ (\alpha > 0)$.
Rząd P-nazwy τ to najmniejsza liczba porządkowa α taka, że $\tau \in \mathcal{N}_\alpha$.

II. Zbiór G pozwala przyporządkować P-nazwom *wartości* (które są zbiorami w U): dla dowolnej P-nazwy τ

$$\tau^G = \{\sigma^G\colon \exists_{p\in G}\,(\sigma, p) \in \tau\}\ .$$

III. Wartości P-nazw to zbiory w modelu $M[G]$.

Pomocny przykład: niewątpliwie każda U-funkcja $f\colon \mathcal{N}_\alpha \to P$ jest P-nazwą. Jej wartością jest zbiór $f^{-1}(G)$. Rząd P-nazwy f to $\alpha + 1$.

„Można uznać, że każda para $< \sigma, p > \in \tau$ reprezentuje POTENCJALNY *element zbioru τ^G, który jest realizowany jako* RZECZYWISTY *element tylko wtedy, gdy $p \in G$." [92]*[94].

Pomińmy szczegóły i poprzestańmy na dwóch uwagach:

- każdy zbiór $a \in M$ ma nazwę: $name(a) = \{(name(b), p)\colon b \in a, p \in P\}$. Wartość tej nazwy to ... zbiór a . To oznacza, że $M \subseteq M[G]$,

- zbiór G ma nazwę: $name(G) = \{(name(p), q)\colon p, q \in P, p \subseteq q\}$. Jak się można domyślać, wartość tej nazwy to G , czyli $G \in M[G]$.

$M[G]$ jest modelem ZFC. Dowody prawdziwości większości aksjomatów w tym modelu nie są aż tak straszne [92]. Ale, jak zwykle, wyjątkiem jest pewnik wyboru. Dowodząc jego prawdziwości korzystamy ze specjalnej metody dowodzenia spełnialności formuł teoriomnogościowych w $M[G]$ odkrytej (opracowanej) przez Cohena - z metody forcingu.

Spróbujmy zilustrować jej działanie na przykładzie najprostszej formuły pierwszorzędowej - równości $x_1 = x_2$.

Orzekanie o spełnianiu tej równości przy danym wartościowaniu w $M[G]$ to orzekanie o równości zbiorów $\tau_1^G = \tau_2^G$ gdzie τ_1, τ_2 są pewnymi P-nazwami. Istota metody forcingu (w odniesieniu do formuły $x_1 = x_2$ zawarta jest w następującym twierdzeniu:

- równość $\tau_1^G = \tau_2^G$ jest prawdziwa w $M[G]$ dokładnie wtedy, gdy istnieje $p \in G$ które wymusza równość P-nazw $\tau_1 = \tau_2$.

> Relacja „wymuszania równości" to w istocie rodzina trójargumentowych relacji $\mathcal{F}_\alpha^=$ indeksowana liczbami porządkowymi w M. Każda taka relacja wiąże pary P-nazw (o rzędach mniejszych niż α) z elementami zbioru P. Netoda forcingu sprowadza dowód równości zbiorów $\tau_1^G = \tau_2^G$ w $M[G]$ do wskazania w zbiorze G elementu p takiego, że „p wymusza równość nazw τ_1, τ_2" - $(p, \tau_1, \tau_2) \in \mathcal{F}_\alpha^=$ dla pewnej liczby porządkowej α większej od rzędów P-nazw τ_1, τ_2.

Dla zaspokojenia ciekawości zapiszmy (niebanalną) rekurencyjną definicję rodziny relacji $\mathcal{F}_\alpha^=$.
$(p, \tau_1, \tau_2) \in \mathcal{F}_\alpha^=$ *jeżeli:*

- dla dowolnej pary $(\sigma_1, q_1) \in \tau_1$ takiej, że $p \subseteq q_1$, istnieje para $(\sigma_2, q_2) \in \tau_2$ taka, że $q_1 \subseteq q_2$ i $(q_2, \sigma_1, \sigma_2) \in \mathcal{F}_\beta^=$, gdzie β jest liczbą porządkową większą od rzędów σ_1, σ_2,

- dla dowolnej pary $(\sigma_2, q_2) \in \tau_2$ takiej, że $p \subseteq q_2$ ... dokończ zakładając, że jest to warunek „symetryczny" do powyższego.

[94]Przydatna(?) analogia: konstrukcja rozszerzenia ciała liczb wymiernych Q zawierającego choćby jeden pierwiastek wielomianu (nierozkładalnego) f o współczynnikach wymiernych jest dwuetapowa: najpierw konstruujemy zbiór wielomianów $Q[x]$ - wielomiany traktujemy jako *nazwy* elementów budowanego rozszerzenia. W drugiej kolejności przyporządkujemy nazwom *wartości*, którymi są reszty z dzielenia wielomianów przez f. Te wartości to elementy poszukiwanego ciała.

> *„(...) dla dowolnych P-nazw $\tau_1, \ldots, \tau_n$ i teoriomnogościowej formuły $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ można pytać: dla jakich ideałów $G \subset P$ zdanie $\phi(\tau_1^G, \ldots, \tau_n^G)$ jest prawdziwe w $M[G]$? Czy może się zdarzyć, że da się wywnioskować prawdziwość takiego zdania z pewnej strukturalnej własności G? Można sobie wyobrazić przypadki, w których obecność pojedynczego elementu $p \in P$ w G może wystarczyć, aby zapewnić prawdziwość takiego zdania w $M[G]$. (...)*
> *Jeśli tak jest, to mówimy, że p wymusza („forces") $\phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ (...)*
>
> *„The fundamental theorem of forcing effectively states that everything which is true in $M[G]$ is forced by some $p \in G$."[92]*

Oczywiście formułując to fundamentalne twierdzenie dla dowolnej formuły ϕ należy zastąpić opisane wyżej „relacje wymuszania" ($\mathcal{F}_\alpha^=$) relacjami ($\mathcal{F}_\alpha^\phi$) konstruowanymi w sposób uwzględniajacy kształt formuły ϕ [92].

Niezależność hipotezy continuum

Hipoteza continuum[95] to „święty graal" matematyki teoriomnogościowej. Pytanie, które dręczyło Cantora po odkryciu różnych rodzajów nieskończoności rozumie początkujący student matematyki. Z drugiej strony cohenowski dowód nierostrzygalności hipotezy continuum w ramach ZFC cieszy się opinią skrajnie trudnego. Dlatego ogromna większość matematyków daruje sobie jego poznanie (ciekawe, ilu się do tego przyzna...).
Szczęśliwie, wiedząc to co już wiemy o budowie rozszerzenia $M \rightsquigarrow M[G]$ mozemy spróbować przedstawić zarys dowodu Cohena unikając wszelkich technicznych niuansów.

To „proste". Wystarczy wskazać dwie pary (P_1, G_1) i (P_2, G_2) takie, że w model $M[G_1]$ potwierdza hipotezę continuum natomiast model $M[G_2]$ prawdziwe jej przeczy.

> Przypomnijmy jeszcze raz kluczowe fakty:
> *- zbiór liczb naturalnych w M jest też zbiorem liczb naturalnych w rozszerzeniach postaci $M[G]$,*
> *-w modelach M i $M[G]$ liczby porządkowe są takie same, ale*
> *- liczby kardynalne w modelach M i $M[G]$ mogą być różne.*

W szczególności $\aleph_1$ - najmniejsza nieprzeliczalna liczba kardynalna - nie musi być taka sama w M i $M[G]$ (dlatego będę używał oznaczeń $\aleph_1(M)$ i $\aleph_1(M[G])$[96].
Użyjemy też symboli $\aleph_2(M)$ i $\aleph_2(M[G])$ dla oznaczenia najmniejszych liczb kardynalnych większych (odpwiednio) od $\aleph_1(M)$ i $\aleph_1(M[G])$ (w modelach M i $M[G]$).

Opiszmy nieco bardziej precyzyjnie oczekiwane własności rozszerzeń $M[G_1]$ i $M[G_2]$:

- $M[G_1]$ ma być modelem teorii $ZFC + CH$ co oznacza, że jest w nim jest bijekcja między zbiorem podzbiorów $\mathbf{N}$ i zbiorem-liczba kardynalną w $\aleph_1(M[G_1])$,

- $M[G_2]$ ma być modelem $ZFC + \neg CH$ co oznacza, że zbiór $\mathbf{N}$ ma w $M[G_2]$ więcej niż $\aleph_2(M[G_2])$ podzbiorów.

Wystarczy tylko znaleźć odpowiednie pary (P_1, G_1), (P_2, G_2)... . Łatwo powiedzieć.

Model $ZFC + CH$.

Jako zbiór $P_1 \in M$ wskazujemy zbiór wszystkich bijekcji w M między przeliczalnymi podzbiorami $2_M^{\mathbf{N}}$ i przeliczalnymi podzbiorami $\aleph_1^M$ - najmniejszej nieprzeliczalnej liczby kardynalnej w M.
Poszukiwaną bijekcją w $M[G_1]$ jest suma mnogościowa funkcji należących do G_1 [97]

Model $ZFC + \neg CH$.

Podstawą konstrukcji rozszerzenia w tym przypadku jest zbiór $P_2 \in M$ którego elementami są funkcje w M działające między skończonymi podzbiorami $\mathbf{N} \times \aleph_2(M)$ a zbiorem $\{0, 1\}$. Dowodzi się (nielekko) że:

---

[95]Str. **??**.

[96]*„We stress that although $2_M^{\mathbf{N}}$ and $\aleph_1[G_1]$ are countable, within M they appear to be uncountable."* [92].

[97]Ponieważ $G_1 \in M[G_1]$ i $M[G_1]$ jest zbiorem tranzytywnym, to suma elementów $G1$ jest zbiorem w $M[G_1]$. Dodajmy, że w tym przypadku zbiory podzbiorów $\mathbf{N}$ w M i $M[G_1]$ są takie same a liczby kardynalne $\aleph_1(M)$ i $\aleph_1(M[G_1])$ są równe.

- liczby kardynalne w $M[G_2]$ są takie same jak w M. W szczególności $\aleph_2(M) = \aleph_2(M[G])$

- Niech $f: \mathbf{N} \times \aleph_2(M) = \mathbf{N} \times \aleph_2(M[G]) \to \{0, 1\}$ będzie funkcją- sumą funkcji-elementów ideału G. Wówczas zbiory

$A_\alpha = \{n \in \mathbf{N}: f(n, \alpha) = 1\} : \alpha < \aleph_2(M[G]))$

są parami różne.

A to oznacza, że zbiór $\mathbf{N}$ ma w $M[G]$ (conajmniej) $\aleph_2^{M[G]}$.

Zwraca uwaę, że nie podałem tu specyfikacji ideałów G_1 i G_2. Oznazcza to, że mogą to byc dowolne ideały w zbiorach P_1 i P_2.
Ale skąd wiemy, że jakiekolwiek ideały istnieją w zbiorach P_1 i $P2$? W [92] znajdziemy twierdzenie które mówi, że dla dowolnego elementu $p \in P$ istnieje ideał zawierający p.

To wszystko. Dokładniej: to wszystko, co można powiedzieć o cohenowskim dowodzie nierozstrzygalności hipotezy continuum nie wnikając w szczegóły techniczne i niebanalne dowody. Zainteresowanym polecam lekturę [92].

> Od udowodnnienia niezależności hipotezy continuum od ZFC przez Gödla i Cohena minęło kilkadziesiąt lat. I co? I nic[98]. Nikt nie dyskutuje, które z dwóch możliwych rozszerzeń ZFC należy wybrać. Pokazuje się wprawdzie pewne fakty, których prawdziwość zależy od tego wyboru ale nic więcej.
> Czy to nie dowód, że zapomnieliśmy, iż ta teoria miała być niewzruszoną podstawą matematyki?
> A może przyznanie, że aksjomatyczny fundament wcale nie jest matematyce niezbędny?

13.3.4 Wilk w owczej skórze

Wyobraźmy sobie alternatywną historię matematyki. Przypuśćmy, że Cantor lub ktoś równie genialny wpada na pomysł, by stworzyć ur-teorię matematyki rozszerzając nieco język arytmetyki Peano. W tym nowym języku formułuje teorię, którą - dla odróżnienia od pierwszorzędowej arytmetyki Peano - nazywa *arytmetyką drugiego rzędu*[99].

To skromne rozszerzenie: ogranicza się do wprowadzenia *zmiennych drugiego rzędu*. Dla odróżnienia od *zmiennych przedmiotowych* - $x, y, z, \ldots$ - nowe zmienne oznaczamy dużymi literami - $X, Y, Z, \ldots$. W konsekwencji pojawiają się nowe formuły atomowe: dla dowolnego termu arytmetycznego t i zmiennej drugiego rzędu X, napis $t \in X$ jest taką formułą.
Formuły złożone budujemy z atomowych tak samo, jak w języku pierwszego rzędu.

Nowa teoria - SOA - to rozszerzenie arytmetyki Peano o trzy aksjomaty:
- *aksjomat indukcji*:

$$\forall_X\, (0 \in X) \wedge (\forall_x\, (x \in X \to succ(x) \in X) \to \forall_x\, (x \in X)$$ [100]

- *aksjomat wyróżniania*: dla dowolnej „drugorzędowej” formuły $\phi(x, y_1, \ldots, y_k, Y_1, \ldots Y_m)$ nie zawierającej wolnej zmiennej X[101]:

$$\exists_X \forall_x\, (x \in X) \leftrightarrow \phi(x, y_1, \ldots, y_k, Y_1, \ldots, Y_m))$$

- *aksjomat ekstensjonalności*:

$$\forall_{X,Y}\, X = Y \leftrightarrow \forall_x\, (x \in X \leftrightarrow x \in Y)$$

Tak jak w ZFC, aksjomat wyróżniania pozwala na wprowadzenie do języka SOA formuł nazwowych - napisów postaci

$$\{x : \phi(x, y_1, \ldots, y_k, Y_1, \ldots, Y_m)\}$$

(gdzie $y_1, \ldots, y_k, Y_1, \ldots, Y_m$ to zmienne wolne - parametry tej formuły nazwowej).

Co można w tej matematyce wyrazić? Co można badać? Popatrzmy na proste przykłady:

[98] To nieco krzywdzące. Prawdziwe o tyle, że dyskusje o konsekwencjach dowodu Cohena nie przeniknęły do matematycznego mainstreamu.

[99] *Second Order Arithmetics - SOA*. Ta teoria została stworzona przez Hilberta i Bernaysa w latach 30-tych XX w

[100] Uwaga historyczna: w „pierwotnej” wersji aksjomatyki Peano tak właśnie sformułowano aksjomat indukcji. Nie była to teoria pierwszego rzędu. Ale nie była to też teoria równoważna SOA.

[101] To zastrzeżenie jest istotne: w przeciwnym wypadku dla $\phi(x) \equiv \neg(x \in X)$ otrzymamy sprzeczność.

1. Formuła $x = x$ wprowadza do języka SOA nazwę (= bezparametrową formułę nazwową) $\{x\colon x = x\}$. Zastąpimy ją symbolem **N** *i będziemy nazywać „uniwersum" ponieważ*

$$SOA \vdash \forall_x\, x \in \mathbf{N} \qquad \text{oraz} \qquad SOA \vdash \forall_X\, X \subseteq \mathbf{N}$$ [102]

2. Formuła nazwowa $\{x\colon \neg(x \in Y)\}$ (z parametrem Y) sprawia, że w SOA można mówić o dopełnieniu (definiowalnego) zbioru. Można wprowadzić skrót $\neg Y$ dla tej formuły i np. pokazać, że:

$$SOA \vdash \forall_Y \forall_x\, (x \in Y) \vee (x \in \neg Y)$$

Podobnie można wprowadzić nazwy $X \cup Y$, $X \cap Y$ (z parametrami X, Y).

3. Oznaczmy term arytmetyczny $(n + m)^2 + n$ sugestywnym skrótem (n, m). To oznacza wprowadzenie do języka SOA pojęcia pary uporządkowanej - formuły nazwowej $\{x : x = (n, m)\}$ [103]
W konsekwencji możemy konstruować w SOA iloczyny kartezjańskie:

$$Y \times Z = \{x : \exists_{y,z}\, (y \in Y) \wedge (z \in Z) \wedge (x = (y, z))\}$$

a potem - korzystając z pojęcia podzbioru - wprowadzić do SOA pojęcia relacji i funkcji[104]*.*

4. „Zbiór jest skończony, gdy na trasie każdej nieskończonej podróży po jego punktach musi znaleźć się punkt odwiedzony conajmniej dwukrotnie". Tę charakteryzację zbiorów skończonycyh zapiszemy w języku SOA w postaci niezbyt miłej formuły:

$$Finite(Y) \equiv \forall_X\, (Tr(X) \wedge Succ(X, Y) \rightarrow Fix(X, Y) \vee Y = \emptyset).$$

gdzie $Tr(X), Succ(X, Y), Fix(X, Y)$ to skróty:

$$Tr(X) \equiv \forall_{x,y,z}\, (x, y) \in X \wedge (y, z) \in X \rightarrow (x, z) \in X,$$
$$Succ(X, Y) \equiv \forall_{x \in Y} \exists_{y \in Y} (x, y) \in X,$$
$$Fix(X, Y) \equiv \exists_{x \in Y}\, (x, x) \in X$$

W SOA można mówić o zbiorach skończonych. Ale nie ma tu zbioru wszystkich podzbiorów **N***! Pominiemy opowieść, jak w tej teorii definiujemy liczby całkowite, wymierne i rzeczywiste. Mając w głowie to, co powiedzieliśmy o funkcjach ciągłych, nie dziwimy się zbytnio, że w SOA można te funkcje definiować i badać* [105]*. To wystarczy, by uprawiać sensowną matematykę w obszarze wyznaczonym przez arytmetykę drugiego rzędu.*
SOA to teoria pośrednia między arytmetyką a teorią mnogości: PA jest podteorią SOA a ZFC jest bogatsza od SOA [106]*. Jaka jest matematyka SOA? Jaka jest „siła" tej teorii?*
Pięknie napisał o tym S.G. Simpson:„Szczególnie interesuje nas pytanie, które aksjomaty orzekające o istnieniu są niezbędne do udowodnienia znanych twierdzeń matematycznych. Zakres tego pytania (...) zawęzimy dzieląc matematykę na dwie części. Pierwsza to matematyka teoriomnogościowa (set-theoretic mathematics) a drugą nazwiemy zwykłą (ordinary) matematyką. Przez matematykę teoriomnogościową rozumiemy te jej dziedziny, które zbudowano po teoriomnogościowej rewolucji (...) takie jak topologia ogólna, analiza funkcjonalna, algebra nieskończonych struktur, i abstrakcyjna teoria zbiorów. Do zwykłej matematyki zaliczamy dziedziny wcześniejsze od teorii mnogości -

[102] Można „zanurzyć" SOA w ZFC utożsamiając **N** z najmniejszym zbiorem induktywnym - zbiorem liczb naturalnych.Zmienne w SOA utożsamiamy ze zmiennymi teoriomnogościowymi „o ograniczonym zakresie zmienności": zakresem zmiennych przedmiotowych są zbiory-liczby naturalne a zakresem zmiennych drugiego rzędu - podzbiory liczb naturalnych. Np. formułę $x \in X$ „tłumaczymy" na formułę teoriomnogościową $(x \in \mathbf{N}) \wedge (X \in 2^{\mathbf{N}}) \wedge (x \in X)$.

[103] $SOA \vdash \forall_{m,n,k,l}\, ((m + n)^2 + n = (k + l)^2 + l) \rightarrow ((m = k) \wedge (n = l))$. Para liczb naturalnych jest jednoznacznie reprezentowana przez pojedynczą liczbę - kod pary.

[104] $fun(F, X, Y) = F \subseteq X \times Y \wedge \forall_x \exists!_y\, (x, y) \in F$.

[105] *„(...) ponieważ zachowanie funkcji ciągłej jest podyktowane jej wartościami w punktach wymiernych, można zaimplementować te funkcje jako zbiory par liczb wymiernych. Ale te pary mogą być implementowane przez kody-liczby naturalne, więc funkcje ciągłe po liczbach rzeczywistych również mogą być implementowane na poziomie zbiorów liczb naturalnych. (...) Podsumowując, klasyczną analizę funkcji zwykłych można zrekonstruować w SOA (...)co jest powodem, dla którego SOA nazywa się czasem po prostu „analizą" - P.Smith, Induction and Predicativity (http://philpapers.org/rec/SMIIAP-2).* Dodajmy, że „zbiór liczb rzeczywistych" to NIE JEST pojęcie matematyki budowanej na bazie SOA!

[106] Termin „bogatsza teoria" oznacza, że aksjomaty SOA są przy takim tłumaczeniu dowodliwymi twierdzeniami w ZFC.

geometrię, teorię liczb, logikę matematyczną i teorię obliczalności. Rozróżnienie między matematyką teoriomnogościową i zwykłą jest, z grubsza, rozróżnieniem między „matematyką nieprzeliczalną" i „matematyką przeliczalną". (...) Stąd, na przykład, badanie ciągłych funkcji rzeczywistych jest częścią zwykłej matematyki (...) [73].

> *SOA to ur-teoria zwykłej matematyki. SOA to matematyka liczb, ZFC to matematyka zbiorów.*

„W SOA można nie tylko bardzo dużo wyrazić, ale i dużo udowodnić. Praktyka pokazuje, że niemal każde twierdzenie, z którym można się zetknąć w ciągu pierwszych lat studiów matematycznych, można udowodnić w SOA, jeśli tylko można je wysłowić w jej języku. O przykłady twierdzeń wyrażalnych, lecz niedowodliwych w SOA (a dowodliwych w ZFC) wcale nie tak łatwo"[107].

SOA jako teoria drugiego rzędu

Uznajmy prymat ZFC i popatrzmy z tej perspektywy na SOA.
W języku pierwszego rzędu równość jest wyróżniona - ma ustaloną interpretację w każdym teoriomnogościowym modelu[108]*. W SOA mamy drugą wyróżnioną relację - przynależność (elementu do zbioru). To cecha charakterystyczna nie tylko SOA ale wszelkich teorii odwołujących się do języka i logiki drugiego rzędu*[109]*.*
Czy to znaczy, że - wbrew wcześniejszym twierdzeniom - ZFC to teoria drugiego rzędu? W żadnym razie. W teorii mnogości operujemy zmiennymi, termami i relacjami „na jednym poziomie". Zapis $(x \in y) \wedge (y \in z)$ jest tu poprawny. Natomiast w języku drugiego rzędu mamy dwa rodzaje zmiennych - przedmiotowe i zbiorowe. Zapis $x \in X$ jest poprawny tylko wtedy, gdy x to zmienna indywiduowa a X - zmienna drugiego rodzaju. Zapis $(x \in Y) \wedge (Y \in Z)$ jest tu niepoprawny[110]*. W SOA (i innych teoriach drugiego rzędu) relacja przynależności „$\in$" jest spłaszczona - można mówić tylko o przynależność liczby naturalnej do podzbiorów uniwersum - zbioru liczb naturalnych.*

Język drugiego rzędu jest w oczywisty sposób interpretowalny w języku ZFC. Dlatego bez większego oporu przyjmujemy, że takie teorie „mają sens" w matematyce teoriomnogościowej. SOL jest słabsza od ZFC, ale dzięki wyróżnionej roli symbolu „$\in$" bardzo jej bliska. I pewnie dlatego Quine nazwał SOL „teorią zbiorów w owczej skórze"[111]*.*

Jednak logika drugiego rzędu ma poważną wadę - nie jest zupełna. Czy jest więc logiką? Zupełność to dla wielu niezbywalny atrybut logiki. „(...) Motywację stojącą za żądaniem kompletności właściwej logiki można zrekonstruować tak: konsekwencja logiczna jest intuicyjnie rozumiana jako pojęcie semantyczne. (...) Zatem to teoria modeli, oddaje logiczną konsekwencję. System dedukcyjny oferuje nam zaledwie kilka reguł wnioskowania. Jeśli dowód zupełności systemu się nie powiedzie to oznacza, że nie wychwytuje on prawidłowo logicznych konsekwencji [61]

Odpowiedzią na postawione pytanie jest twierdzenie Lindströma: „logika pierwszego rzędu jest najsilniejszą logiką, która jest zupełna i dla której można udowodnić twierdzenie o zwartości".

Czy zdanie okrągłe wypowiesz,
czy księgę mądrą napiszesz,
będziesz zawsze mieć w głowie
tę samą pustkę i ciszę.(...)

Zwieść cię może ciągnący ulicami tłum,
wódka w parku wypita albo zachód słońca,
lecz pamiętaj: naprawdę nie dzieje się nic
i nie stanie się nic - aż do końca. (...)
M. Zabłocki

---

[107] Cytat pochodzi z artykułu L. Kołodziejczyka o przydługim tytule *„Jak pokazać, że coś ma elementarny dowód nie pokazując tego dowodu"* (internet).

[108] Lub: w języku teorii mnogości (aksjomat ekstensjonalności).

[109] *SOL = Second Order Logic*

[110] Logikę drugiego rzędu można powiązać z (prostą) teorią typów Russella. Idea tej teorii to hierarchizacja wyrażeń i wielkości matematycznych za pomocą *typów*. Najprostszy typ „wielkości indywiduowych" ma rząd 1, rząd typu zbiorów tych indywiduów to 2, rząd typu zbiorów wielkości rzędu 2 to 3... itd. Język n-tego rzędu dopuszcza, mówiąc w uproszczeniu, użycie i kwantyfikację zmiennych, których zakresem zmienności są wielkości co najwyżej n-tego rzędu. *„Dowolne wyrażenie zawierające zmienną związaną jest wyższego typu niż ta zmienna"* - B.Russell.

[111] *„Second Order Logic is a set theory in sheep's clothes"* lub *„SOL is Set Theory in disguise"*.

to be continued ...

Bibliografia

[1] S.Abramsky,*The Lazy Lambda Calculus, (http://www.cs.ox.ac.uk/files/293/ lazy.pdf)*

[2] M.Atiyah,*Matematyka w XX wieku, Roczniki PTM Seria II: Wiad. Mat. XXXIX (2003)*

[3] M.van Atten, D.van Dalen, R.Tieszen, *Brouwer and Weyl: The phenomenology and mathematics of intuitive continuum, http://www.researchgate.net/publication/*

[4] H.P.Barendregt, *The Lambda Calculus, its syntax and semantics, Studies in Logic and the Foundation of Mathematics vol.103, North-Holland Publ. Comp. 1981*

[5] M.Barr, Ch.Wells, *Toposes, Triples and Theories (http://www.cwru.edu/artsci/math/ wells/pub/ttt.html) (30.11.2011)*

[6] J.L.Bell, *Continuity and Infinitesimals, Stanford Encyklopedia of Philosophy (http://plato. stanford.edu/entries/continuity/),(13.12.2012)(pełny tekst książki* The Continuous and the Infinitesimal in Mathematics and Philosophy *jest dostępny w internecie).*

[7] N.Bezhanishvili, D.de Jongh, *Intuitionistic Logic, (http://www.cs.le.ac.uk/people/ nb118 /Publications/ESSLLI2705.pdf) (20.01.2013)*

[8] C.Böhm, G.Jacopini, *Flow Diagrams, Turing Machines And Languages With Only Two Formation Rules, http://www.cs.unibo.it/ martini/PP/bohm-jac.pdf*

[9] B.Brożek, M.Hohol, *Umysł matematyczny, Copernicus Center Press, Kraków 2014*

[10] A.Bundy, *The Automation og Proof by Mathematica Induction, in Handbook of Automated Reasoning vol.1 , North-Holland, 1992*

[11] S.Buss,*First-Order Proof Theory of Arithmetic - Rozdział II książki o nieznanym mi tytule, (http://www.math.ucsd.edu/ sbuss/ResearchWeb/handbookII/ChapterII.pdf)(24.07.2012)*

[12] C.S.Calude,*Information and Randomness - an algorithmic perspective, Springer 2002 (2ed.)*

[13] F.Cardone, J.R.Hindley, *History of Lambda-calculus and Combinatory Logic, Swansea University Mathematics Department Research Report No. MRRS-05-06 (2006) (http://maths.swan.ac.uk/staff/jrh/papers/jrhhislamweb.pdf) (15.04.2012)*

[14] G.Chaitin, *The search for the perfect language , http://pirsa.org/09090007/ (20.12.2012)*

[15] G.Chaitin, *On the search of the lenght of programs for computing finite binary sequences, Journal of the ACM 13 (1966),pp.547-569*

[16] P.Cohen,*The discovery of forcing, Rocky Moutain J.of Math. vol.32, no.4, 2002*

[17] H.Curry,*The Paradox of Kleene and Rosser, Transactions of the American Mathematical Society Vol. 50, No. 3 (Nov., 1941), pp. 454-516*

[18] ks.J.Dadaczyński, *Pojęcie nieskończoności w matematyce, Studia Historyczno-Teologiczne 2002, t.35, z.2, s.265-270*

[19] ks.J.Dadaczyński, *Koncepcja matematyki G. Cantora a idea logicyzmu, Zagadnienia Filozoficzne w Nauce XXII, 1998, s.15-34*

[20] ks.J.Dadaczyński, *Filozofia matematyki Immanuela Kanta i jej dziedzictwo, Zagadnienia Filozoficzne w Nauce XXIV / 1999, s.26-42*

[21] D. van Dalen,*Intuitionistic logic, The Blackwell Guide to Philosophica Logic. Ed. L.Gobble. Blackwell, Oxford.2001, 224-257.*

[22] P.J.Davis, R.Hersh,*Świat matematyki, Wydawnictwo Naukowe PWN,1994*

[23] B.Dembiński, *Teoria idei. Ewolucja myśli platońskiej, sbc.org.pl)*

[24] J.Dieudonee, *Logika i matematyka, Zagadnienia Filozoficzne w Nauce VIII, 7-19 (1986)*

[25] A.Döring, Ch.Isham, *„What is a Thing?”: Topos Theory in the Foundations of Physics (internet)*

[26] U.Eco, *W poszukiwaniu języka uniwersalnego, Wyd. Marabut, 2002*

[27] A.Einstein, *Jak wyobrażam sobie świat, Copernicus Center Press,2022*

[28] *Companion Encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences,* ed. I. Grattan-Guiness

[29] S.Feferman, *Predicativism (internet???)*

[30] T.Forster,*The axioms of set theory, internet*

[31] J.Y.Girard,*The Blind Spot, Lectures on Logic, Rome, Autumn 2004. (http://iml.univ-mrs.fr/ girard/coursang/coursang2.pdf.gz)*

[32] M.Has,*Czy świat zmierza ku czemuś?, Zielone Brygady. Pismo Ekologów, nr 4 (218), 2006*

[33] S.Hawking, L.Mlodinow, *Wielki projekt, Wyd. Albatros,2017*

[34] S.Hawking, *Krótka historia czasu, Wyd.Zysk i S-ka*

[35] M.Heller, *Elementy mechaniki kwantowej dla filozofów, Copernicus Center Press, 2018*

[36] P.Johnstone, *The point of pointless topology, Bull. AMS vol.8, No.1, 1983*

[37] J.P.Jones, *Universal Diophantine Equation, Journal of Symb.Logic,vol 47 N.3,1982*

[38] A.Kanamori, *The mathematical development of set theory. From Cantor to Cohen, Bull.of Symb.Logic vol 2.,Num.1, March 1996*

[39] H.J. Keisler, *Foundations of infinitesmall calculus, (keisler@math.wisc.edu)*

[40] R.Kaye, *Tennenbaum's Theorem for Models of Arithmetic, internet*

[41] J.Klop, *Term rewriting systems (internet)*

[42] S.Krajewski, *Twierdzenie Gödla i jego filozoficzne interpretacje, rozdział z książki „Twierdzenie Gödla” zamieszczony w internecie*

[43] M.Kordos, *Czy w matematykę trzeba wierzyć? (XX Szkoła Matematyki Poglądowej, internet*

[44] J.J.C.Kuiper, *Ideas and Explorations - Brouwer's Road to Intuitionism - praca doktorska, 2004, http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2004-0303-084333/inhoud.htm*

[45] G.Lakoff, R.E.Nunez, *Where Mathematics Come from. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being. New York.Basic Books,2000*

[46] S.McLane, I.Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic - a first introduction to topos theory, Springer-Verlag,1992*

[47] A.Miguel, An introduction to forcing, https://www.fing.edu.uy/ amiquel/forcing/forcing

[48] M. McLuhan, *Wybór tekstów, Zysk i S-ka Wydawnictwo,2001*

[49] R.Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów. PWN, Warszawa, 1995.*

[50] R.Murawski,*Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki, Wyd. Naukowe UAM, Poznań, 2000.*

[51] R.Murawski (red.),*Współczesna filozofia matematyki, wybór tekstów, PWN Wwa 2002.*

[52] M. Di Nasso,*On the Foundations of Nonstandard Mathematics (internet)*

[53] E.Nelson, *Hilbert's mistake, https://web.math.princeton.edu/ nelson/papers/hm.pdf*

[54] J.van Oosten,*Realizability: a historical essay (internet)*

[55] R.Penrose, *Nowy umysł cesarza. PWN, Warszawa, 1995*

[56] J.Petrakis, *Brouwer's fan theorem (diploma thesis) (internet)*

[57] H.Poincare, *Nauka i Hipoteza.*

[58] J.Pogonowski, *Niewyrażalna tęsknota za modelem zamierzonym, odczyt 10.06. 2010 roku, Uniwersytet Opolski, http://www.glli.uni.opole.pl/index.php?id=publications (2.11.2012)*

[59] J.Pogonowski, *Geneza matematyki według kognitywistów, Investigationes Linguisticae, vol. XXIII, pp.106-146, 2001*

[60] H.Putnam,*Models and reality, Journal of Symbolic Logic, Vol. 45, No. 3 (Sep., 1980), pp.464-482.*

[61] P.Raatikainen, *Hilbert's program revisited, (Synthese 137: 157ďż˝177, 2003.) http://www .mv.helsinki.fi/home/praatika/Hilbert's Program Revisited.pdf*

[62] H.Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej, PWN,1989.*

[63] B.Russell, *Wstęp do filozofii matematyki, PWN 1958.*

[64] B.Rosenblum, F.Kuttner, *Zagadka teorii kwantów, Prószyński i S-ka, 2013.*

[65] C.Rovelli,*Tajemnica czasu, Wydawnictwo JK, 2019.*

[66] R.M.Sainsbury, *Frege and Russell, The Blackwell Companion to Philosophy, Second Ed.,Edited by N.Bunnin, E.P.Tsui-James, 1996*

[67] G.Sambin, *Intuitionistic formal spaces,http://www.math.unipd.it/ sambin/txt/ifs87-97.pdf,*

[68] J.P.Seldin, *Lambda-Calculus and Functional Programming, internet*

[69] J.P.Seldin, *The Logic of Curry and Church, http://www.logic.amu.edu.pl/images/c/c5/Currychurch.pdf*

[70] S.Shaprio, *Foundations without Foundationalism A Case for Second-order Logic, Oxford Univ. Press, 2006 (dostępne w internecie)*

[71] S.Shaprio, *Philosophy of Mathematics, Structure and Ontology Oxford Univ. Press, 1997*

[72] W.Sieg, *Theory of computability, http://www.phil.cmu.edu/summerschool/2006/Sieg/computability-theory.pdf (15.10.2012)*

[73] S.G.Simpson, *Subsystems of Second Order Arithmetic,(rozdział 1), https:www. math.psu.edu /simpson/sosoa/chapter1.pdf*

[74] C.Smorydzyński, *Godel incompleteness theorem, in: Proof Theory and Constructive Mathematics, Part D.*

[75] R.Smullyan, *Na zawsze nierozstrzygnięte - zagadkowy przewodnik po twierdzeniach Gödla (tłum. J.Pogonowski) Książka i Wiedza, 2007.*

[76] M.H.Soersten, P.Urzyczyn, *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, draft-paper.*

[77] Ch.Strachey, *Fundamental Concepts in Programming Languages, Higher-Order and Symbolic Computation, 13, 11ďż˝49, 2000*

[78] T.Streicher, *Introduction to Constructive Logic and Mathematics, http:www.mathematik.tu-darmstadt.de/ streicher/CLM/clm.pdf.*

[79] T.Streicher,*Realizability, http:www.mathematik.tu -darmstadt.de/ streicher/REAL/ REAL.pdf*

[80] L.Susanka, *What are we (mathematicians) doing? internet (???).*

[81] A.Tarski, *Wprowadzenie do logiki, Philomat (internet)*

[82] A.Tarski, *The Semantical Conception of True, Philosophy and Phenomenological Research 4 (1944) (http://www.ditext.com/tarski/tarski.html) (5.10.2012)*

[83] M.Tiles,*Philosophy of Mathematics, The Blackwell Companion to Philosophy, Second Ed.,Edited by N.Bunnin, E.P.Tsui-James, 1996*

[84] A.S.Troelstra, *Constructivism and proof theory, internet*

[85] A.S.Troelstra, *History of constructivism in the 20th century, http://staff.science.uva.nl/ anne/hhhist.pdf (15.10.2011)*

[86] K.Trzęsicki, *Metodologiczne i teoriopoznwacze przesłanki klasycznego problemu rozstrzygalności, http: www.calculemus.org/neumann/odczyty/trzesicki2.pdf (10.12.2011)*

[87] C.F von Weizsäcker, *Filozofia grecka a fizyka współczesna, Zagadnienia Filozoficzne w Nauce II , 1979/80, s.1ďż˝17.*

[88] K.Wojtowicz, *Paradoksy skończoności, Zagadnienia filozoficzne w nauce XVIII 1996, s.87-100.*

[89] J.Väänänen, *Second order logic and foundation of mathematics, Bull.Symbolic Logic, 7(4) 504-520, 2001.*

[90] W.Veldman,*Understanding and using Brouwer's continuity principle, Raport no.0008, Dept.of Math, Univ.of Nijmegen, internet*

[91] S.Vickers,*Locales and toposes as spaces (internet)*

[92] N.Weawer,*Forcing for mathematicians, World Scientific,2014*

[93] S.Wolfram,*A New Kind of Science, Wolfram Media, 2002*

[94] R.Zach*Hilbert's Finitism: Historical, Philosophical and Metamathematical Perspectives*