

Wstęp do matematyki

Zestaw 8. Równoliczność i moce zbiorów

1. Dowieść, że następujące zbiory są równoliczne:
 - (a) $A = \{x \in \mathbb{N}; x < 7\}$ oraz $B = \{x \in \mathbb{N}; x^2 < 49\}$;
 - (b) $A = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - 2x + 1 = 0\}$ oraz $B = \{0\}$;
 - (c) zbiór liczb rzeczywistych dodatnich $\mathbb{R}^{>0}$ oraz zbiór liczb rzeczywistych ujemnych $\mathbb{R}^{<0}$;
 - (d) zbiór wszystkich liczb naturalnych $\mathbb{N}$ oraz zbiór $\{x \in \mathbb{N}; x > n_0\}$ dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$;
 - (e) zbiór wszystkich punktów leżących na cięciwie danego okręgu oraz zbiór wszystkich punktów leżących na łuku opartym na tej cięciwie.
2. Niech X będzie zbiorem nieskończonym, zaś $X_0 \subseteq X$ podzbiorem skończonym. Udowodnić, że $X \setminus X_0$ jest równoliczny ze zbiorem X .
3. Zbadać moc zbioru wszystkich okręgów na płaszczyźnie, które mają środek o współrzędnych wymiernych i których promień ma długość będącą całkowitą wielokrotnością $\sqrt{2}$.
4. Udowodnić, że zbiór wszystkich trójkątów równobocznych na płaszczyźnie o środku ciężkości w początku układu współrzędnych i jednym z wierzchołków o współrzędnych wymiernych jest przeliczalny.
5. Udowodnić, że zbiór wszystkich przedziałów na prostej o obu końcach wymiernych jest zbiorem przeliczalnym.
6. Udowodnić, że każda rodzina przedziałów rozłącznych na prostej jest zbiorem przeliczalnym.
7. Dowieść, że jeśli zbiory A, B są przeliczalne, to zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$ oraz $A \div B$ są również przeliczalne.
8. Dowieść, że jeśli $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją monotoniczną o wartościach rzeczywistych, to zbiór jej punktów nieciągłości jest przeliczalny.
9. Dowieść, że każdy z następujących zbiorów jest mocy $\aleph_0$:
 - (a) zbiór okręgów, których środki leżą w punktach o współrzędnych wymiernych i promieniach będących liczbami wymiernymi;
 - (b) zbiór trójkątów równobocznych o środku ciężkości w początku układu współrzędnych i jednym wierzchołku wymiernym;

- (c) zbiór rozłącznych sześciątów w przestrzeni trójwymiarowej;
 - (d) zbiór rozłącznych kół położonych na płaszczyźnie;
 - (e) zbiór macierzy o wyrazach wymiernych;
 - (f) zbiór $\{x \in \mathbb{R}; \exists_{x \in \mathbb{N}} x^n \in \mathbb{Q}\}$, gdzie $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór liczb wymiernych.
10. Znaleźć moc zbioru ciągów o wyrazach wymiernych, stałych od pewnego miejsca.
11. Znaleźć moc zbioru wszystkich ciągów zbieżnych o wyrazach całkowitych.
12. Dowieść, że jeśli A jest zbiorem przeliczalnym, zaś B zbiorem mocy $\mathfrak{c}$, to zbiory $A \cup B$, $A \setminus B$ oraz $A \div B$ są również mocy $\mathfrak{c}$.
13. Dowieść, że jeśli $\{A_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ jest rodziną mocy $\mathfrak{c}$ zbiorów przeliczalnych, rozłącznych i niepustych, to zbiór $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} A_t$ ma moc $\mathfrak{c}$.
14. Sprawdzić, czy następujące zbiory mają moc $\mathfrak{c}$:
- (a) $\{x \in \mathbb{R}; \exists_{n \in \mathbb{N}} x^n \in \mathbb{Q}\}$;
 - (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 = y\}$;
 - (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x)\}$, gdzie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją;
 - (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \exists_{q \in \mathbb{Q}} x - y = q\}$;
 - (e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0\}$;
 - (f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 = 9\}$;
 - (g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \in \mathbb{Q}, x^2 = 4\}$;
 - (h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy < 1\}$;
 - (i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 10\}$;
 - (j) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 10\}$;
 - (k) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
15. Udowodnić, że jeśli $\text{card } X \geq \aleph_0$, to zbiór X zawiera podzbiór A przeliczalny i taki, że $X \setminus A \sim X$.
16. Udowodnić, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by zbiór X był równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym jest, aby $\aleph_0 \leq \text{card } X$.
17. Udowodnić, że:
- (a) dla dowolnych zbiorów A_1, B_1, A_2, B_2 warunek $A_1 \sim B_1$ i $A_2 \sim B_2$ implikuje, że $A_1 \times B_1 \sim A_2 \times B_2$;
 - (b) dla dowolnych zbiorów A oraz B , jeśli $A \sim B$, to $2^A \sim 2^B$;
 - (c) jeśli zbiory A i B są rozłączne, to dla każdego zbioru X zachodzi $X^{A \cup B} \sim X^A \times X^B$. Wywnioskować stąd, że $2^{A \cup B} \sim 2^A \times 2^B$, gdy $A \cap B = \emptyset$.