Wstęp do matematyki
Zestaw 7. Działania uogólnione

Zadanie 1 Znaleźć $\bigcup_{t\in T} A_t$ i $\bigcap_{t\in T} A_t$, gdy

a) $T = [0, \infty)$, $A_t = \{x \in \mathbb{R} \ : \ t \le x\}$,

b) $T = \mathbb{N}$, $A_t = \{x \in \mathbb{R} \ : \ t \le x < t+1\}$,

c) $T = [0, \infty)$, $A_t = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 \le x \le \frac{1}{t+1}\right\}$,

d) $T = \mathbb{N}$ oraz $T = [0, \infty)$ i $A_t = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ \frac{t}{t+1} \le x < \frac{t+1}{t+2}\right\}$,

e) $T = [0, \infty)$, $A_t = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -10 - \frac{1}{t+1} < x < 2t^2 - 6t + 1\}$,

f) $T = \mathbb{R}$, $A_t = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \operatorname{tg} x = t\}$,

g) $T = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $A_t = \{x \in \mathbb{R} \ : \ xt \le 2\}$,

h) $T = \mathbb{N}$, $A_t = \left[(-1)^t, 1 + \frac{1}{t}\right]$,

i) $T = [0, \infty)$, $A_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \ge t^2\}$,

j) $T = \mathbb{R}$, $A_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = ty^2\}$,

k) $T = [0, \infty)$, $A_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 < t\, y^2\}$.

Zadanie 2 Znaleźć $\bigcup_n \bigcup_m A_{n,m}$, $\bigcap_n \bigcap_m A_{n,m}$ oraz $\bigcap_n \bigcup_m A_{n,m}$, jeśli

a) $A_{n,m} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ n \le x < m\}$,

b) $A_{n,m} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ n^2 \le x < m^2 + (n+1)^2\}$.

Zadanie 3 Znaleźć $\prod_{t\in T} A_t$, gdy

a) $T = \mathbb{N}$, $A_t = \{0, 1\}$,

b) $T = \mathbb{N}$, $A_t = \{0, 1, 2, \ldots, t\}$,

c) $T = [0, \infty)$, $A_t = [-t, t]$,

d) $T = \mathbb{R}$, $A_t = \{-t\}$.

Zadanie 4 Uzasadnić, że

a) $\bigcap_{t\in T}(A_t \cap B_t) = \bigcap_{t\in T} A_t \cap \bigcap_{t\in T} B_t$,

b) $\bigcap_{t\in T}(A_t \cup B) = B \cup \bigcap_{t\in T} A_t$,

c) na ogół $\bigcap_{t\in T}(A_t \cup B_t) \neq \bigcap_{t\in T} A_t \cup \bigcap_{t\in T} B_t$ (por. b) powyżej)

d) $\bigcup_{t\in T}(A_t \cap B_t) \subset \bigcup_{t\in T} A_t \cap \bigcup_{t\in T} B_t$ (na ogół $\not\supset$),

e) $\bigcup_{t\in T} A_t \cap \bigcup_{s\in S} B_s = \bigcup_{t\in T}\bigcup_{s\in S}(A_t \cap B_s)$,

f) $\bigcup_{t\in T}\bigcap_{s\in S} A_{t,s} \subset \bigcap_{s\in S}\bigcup_{t\in T} A_{t,s}$ (na ogół $\not\supset$),

g) $(\bigcup_{t\in T} A_t) \setminus A = \bigcup_{t\in T}(A_t \setminus A)$,

h) $\bigcup_{t\in T} A_t \setminus \bigcup_{t\in T} B_t \subset \bigcup_{t\in T}(A_t \setminus B_t) \subset \bigcup_{t\in T} A_t \setminus \bigcap_{t\in T} B_t = \bigcup_{t\in T}\left(A_t \setminus \bigcap_{s\in T} B_s\right)$ (na ogół obie inkluzje są właściwe),

i) $\bigcup_{s\in S}(A_s \cap B_s) \subset \bigcup_{s,t\in S}(A_s \cap B_t) = \bigcup_{s\in S} A_s \cap \bigcup_{t\in S} B_t$ (na ogół $\not\supset$),

j) $A \times \bigcup_{t\in T} A_t = \bigcup_{t\in T}(A \times A_t)$,

k) $\bigcap_{t\in T} A_t \times \bigcap_{s\in S} B_s = \bigcap_{t\in T}\bigcap_{s\in S}(A_t \times B_s)$,

l) $\prod_{t\in T}(A_t \cap B_t) = \prod_{t\in T} A_t \cap \prod_{t\in T} B_t$,

m) $\prod_{t\in T} A_t \cup \prod_{t\in T} B_t \subset \prod_{t\in T}(A_t \cup B_t)$ (na ogół $\not\supset$),

n) $\prod_{t\in T}\left(\bigcap_{s\in S} A_{t,s}\right) = \bigcap_{s\in S}\prod_{t\in T} A_{t,s}$.

Zadanie 5 Niech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ będą rodzinami zstępującymi. Wykazać, że

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B_n) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

Bez założenia zstępowania zachodzi tylko inkluzja (dlaczego?).

Zadanie 6 (Łączność przekroju) Jeśli $T = \bigcup_{s\in S} T_s$, to

$$\bigcap_{t\in T} A_t = \bigcap_{s\in S}\bigcap_{t\in T_s} A_t.$$

Zadanie 7 (Przemienność sumy) Niech $f : T \to T$ będzie bijekcją. Wówczas $\bigcup_{t\in T} A_t = \bigcup_{t\in T} A_{f(t)}$. Co dzieje się w przypadku injektywności f? Co, gdy f jest surjekcją?

Zadanie 8 Niech $T = \bigcup_{s\in S} T_s$ i niech $\mathcal{K} \subset 2^T$ spełnia następujący warunek

$$\forall_{K\in\mathcal{K}}\ \forall_{s\in S}\quad K \cap T_s \neq \emptyset.$$

Zachodzi wówczas „zamiana działań”

$$\bigcup_{s\in S}\bigcap_{t\in T_s} A_t = \bigcap_{K\in\mathcal{K}}\bigcup_{t\in K} A_t.$$