

Wstęp do matematyki

Zestaw 6. Kwantyfikatory

Zadanie 1 Za pomocą kwantyfikatorów i funktorów oraz znanych operacji $(x + y, x \cdot y)$, relacji $(<, =, \leq)$ i symboli dla liczb (np. 0, 1) zapisać następujące funkcje zdaniowe

- a) x jest sumą kwadratów dwu liczb naturalnych;
- b) x jest liczbą pierwszą;
- c) x nie jest liczbą pierwszą;
- d) $x = \text{NWD}(y, z)$;
- e) $x = \text{NWW}(y, z)$;
- f) liczby x i y mają takie same dzielniki;
- g) nie istnieje największa liczba naturalna;
- h) nie istnieje największa liczba pierwsza;
- i) każde trzy liczby mają NWD;
- j) nie istnieje największa liczba rzeczywista;
- k) między dowolnymi dwiema liczbami rzeczywistymi istnieje trzecia;
- l) y jest pierwiastkiem stopnia co najwyżej trzeciego z pewnej liczby rzeczywistej.

Zadanie 2 Wskazać zmienne wolne i zmienne związane w następujących formułach

- a) $\forall_x \forall_y \Phi(x, y, z)$;
- b) $\exists_z \Phi(x, y, z)$;
- c) $\forall_x \forall_y \Phi(x, y, z) \wedge \exists_z \Psi(x, y, z)$;
- d) $\exists_x (\Phi(x, y, z) \Rightarrow \Psi(x, x, y)) \Rightarrow \{\exists_x \exists_z [\Phi(x, x, y) \wedge \Theta(x, y, y)]\}$;
- e) $\exists_x \forall_y [(x < y) \Rightarrow (x < z) \wedge (z < y)]$;
- f) $\exists_x (x < x \vee x < z)$.

Przypomnijmy, że jeśli Φ jest formułą trzech zmiennych (wolnych) x, y, z o zakresach odpowiednio X, Y, Z , to wykresem Φ nazywamy zbiór $\{(x, y, z) \in X \times Y \times Z : \Phi(x, y, z)\}$. Podobnie dla jednej, dwu i więcej zmiennych (zapisać samodzielnie).

Zadanie 3 Znaleźć wykresy następujących funkcji zdaniowych (zmienne x, y, z mają zakres $\mathbb{R}$)

- a)** $x < |y|$, **b)** $x \geq y \vee x^2 + y^2 \leq 1$,
c) $y^2 + 2y - 3 \leq 0$, **d)** $\sim (x \cdot y < 1)$,
e) $x + y = z$, **f)** $x^2 + y^2 = z$,
g) $|x| < 1 \wedge |y| < 1 \wedge |z| < 1$, **h)** $\exists_x x \cdot y = 1$,
i) $\forall_x x^2 + y^2 \neq z^2$, **j)** $\forall_x \exists_y x^2 + y^2 = z^2$,
k) $\exists_x \forall_y x \cdot y = z$, **l)** $\forall_x \exists_y (x < z) \wedge (z < y)$,
m) $\forall_x \forall_y x^2 + y^2 \geq z^2$, **n)** $\exists_x y = \sqrt{1 - x^2}$,
o) $\exists_x (x^2 + 2ax + b = y) \wedge (y > 0)$, **p)** $\exists_x \sin y < x \wedge x < 2 + \sin y$,
r) $\forall_x \operatorname{tg} x > y \wedge -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, **s)** $\forall_x x = z \cdot \sin z \wedge y = z \cdot \cos z$.

Zadanie 4 Wykazać, że poniższe wyrażenia nie stanowią praw rachunku kwantyfikatorów

- a)** $((\exists_{x \in X} \Phi(x)) \wedge (\exists_{x \in X} \Psi(x))) \Rightarrow (\exists_{x \in X} (\Phi(x) \wedge \Psi(x)))$,
b) $((\forall_{x \in X} (\Phi(x) \vee \Psi(x))) \Rightarrow ((\forall_{x \in X} \Phi(x)) \vee (\forall_{x \in X} \Psi(x))))$,
c) $(\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} \Phi(x, y)) \Rightarrow (\exists_{x \in X} \forall_{y \in Y} \Phi(x, y))$,
d) $(\exists_{y \in Y} \forall_{x \in X} \Phi(x, y)) \Rightarrow (\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} \Phi(x, y))$,
e) $((\forall_{x \in X} \Phi(x)) \Rightarrow (\forall_{x \in X} \Psi(x))) \Rightarrow (\forall_{x \in X} (\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)))$.

Zadanie 5 Sprawdzić, czy następujące formuły są tautologiami

- a)** $\forall_x \Phi(x) \Rightarrow \forall_z \Phi(z)$,
b) $\forall_x [\Phi(x) \vee \Psi(x)] \Rightarrow \forall_x \Phi(x) \wedge \forall_x \Psi(x)$,
c) $\forall_x \forall_y \Phi(x, y) \Rightarrow \forall_x \Phi(x, x)$,
d) $\sim [\exists_x \exists_y \Phi(x, y) \Rightarrow \forall_z \Phi(z, z)]$,
e) $\exists_x [\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)] \Rightarrow [\exists_x \Phi(x) \Rightarrow \exists_x \Psi(x)]$,
f) $\forall_x [\Phi(x) \Rightarrow \forall_x \Phi(x)]$,
g) $\forall_x [\exists_x \Phi(x) \Rightarrow \Phi(x)]$.