

Wstęp do matematyki

Zestaw 5. Relacje i zbiory ilorazowe

1. Niech $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ będzie relacją zdefiniowaną następująco:

$$(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Czy jest to relacja równoważności? Przedstawić tę relację graficznie w układzie współrzędnych oraz opisać podział zbioru $\mathbb{R}$ na klasy abstrakcji względem tej relacji.

2. Niech relacja $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ będzie zdefiniowana wzorem:

$$(x, y) \in \mathcal{R} \iff \cos x = \cos y \wedge \sin x = \sin y.$$

Polecenie jak wyżej.

3. Niech relacja $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ będzie zdefiniowana wzorem:

$$(x, y) \in \mathcal{R} \iff x^2 = y^2.$$

Polecenie jak wyżej oraz czy relacja $\mathcal{R}$ jest kongruencją, tzn. czy

$$(x, y) \in \mathcal{R} \wedge (x', y') \in \mathcal{R} \implies (x + x', y + y') \in \mathcal{R}?$$

4. Niech relacja $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ będzie określona wzorem:

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff |x| + |y| = |x'| + |y'|.$$

Czy jest to relacja równoważności? Jeśli tak, to opisać podział zbioru $\mathbb{R}^2$ na klasy abstrakcji względem tej relacji. Wybrać stosowne reprezentanty klas abstrakcji i opisać zbiór ilorazowy $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$.

5. Niech A będzie zbiorem 5-cio elementowym.

Ile jest relacji dwuargumentowych na zbiorze A ? Ile spośród nich jest zwrotnych oraz ile symetrycznych? Ile jest relacji równoważności na zbiorze A ?

6. Niech $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ będą relacjami równoważności na zbiorze X . Co można powiedzieć o relacjach $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ oraz $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$? Ustosunkuj się do rozumowania: *jeśli* $x \in X$,

to wybieramy $x' \in X$ taki, że $x \sim x'$. Z symetrii relacji $\sim$ wynika, że $x \sim x'$, zaś z przechodniości tej relacji mamy: $x \sim x' \wedge x' \sim x \implies x \sim x$, czyli $\sim$ jest zwrotna.

7. Dany jest podział zbioru $\mathbb{R}$ na odcinki domknięto-otwarte $[n, n+1)$ dla $n \in \mathbb{Z}$. Wskazać relację równoważności, której klasami abstrakcji są zbiory tego podziału.

8. Udowodnić, że relacja zdefiniowana na $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ wzorem:

$$a \equiv b \iff n \mid a - b$$

jest relacją równoważności. Opisać klasy abstrakcji tej relacji, czyli podział zbioru $\mathbb{Z}$ oraz przedstawić relację $\equiv$ jako podzbiór zbioru $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Wykazać, że relacja $\equiv$ jest kongruencją.

Zdefiniować działania dodawania i mnożenia na klasach abstrakcji oraz uzasadnić, dlaczego działania te można określić na reprezentantach, tj. wykazać że wyniki działań nie zależą od wyboru reprezentantów.

Kiedy klasa abstrakcji reprezentowana przez element a jest odwracalna? Dla jakich n wszystkie klasy abstrakcji różne od klasy będącej elementem neutralnym względem dodawania są odwracalne?

Zbuduj tabelkę działania w zbiorze ilorazowym $\mathbb{Z}/\equiv$ dla $n = 2, 3, 4$.

9. Dany jest podział zbioru $\mathbb{Z}$ na liczby parzyste i nieparzyste. Wskazać relację równoważności, której klasami abstrakcji są te zbiory.

10. Dzielimy płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ na pięć zbiorów, odpowiadających czterem ćwiartkom otwartym płaszczyzny oraz sumie mnogościowej osi OX i OY . Znaleźć relację równoważności, której klasami abstrakcji są te zbiory.