

Wstęp do matematyki

Zestaw 4. Odwzorowania

1. Zbadać, czy poniższe relacje są funkcjami:

(a) $\mathcal{R} = \{(x, y); (x - y)(x + y - 2) = 0\} \supseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$;

(b) $\mathcal{R} = \{(x, y); |x| = |y|\} \supseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$;

(c) $\mathcal{R} = \{(x, y); |x| = |y|\} \supseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$;

(d) $\mathcal{R} = \{(x, y); x^2 = y^2 \wedge xy > 0\} \supseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

(e) $\mathcal{R} = \{(x, (y, z)); x = y + z\} \supseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

2. Określić, które ze złożień $f \circ g$ oraz $g \circ f$ mają sens i podać dla nich wzory.

(a) $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + 2, x - y)$, $g(x, y) = (2y + 1, xy)$;

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2, 2x)$, $g(x, y) = (y - 1, 2x + y)$;

(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{dla } x < 0, \\ x + 1, & \text{dla } x \geq 0. \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -2x + 1, & \text{dla } x \leq 1, \\ x^2, & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

3. Zbadać własności funkcji $f : X \rightarrow Y$, znaleźć $f(A)$, $f^{-1}(B)$ oraz, o ile istnieje, funkcję odwrotną. W przykładach, w których funkcja odwrotna nie istnieje, znaleźć takie podzbiory dziedziny i przeciwdziedziny, by funkcja o tym samym wzorze była odwrotna i znaleźć funkcję odwrotną do niej.

(a) $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x(x - 2)$, $A = \{1, 2, 3\}$, $a = [0, 1]$, $B = \{0\}$, $B = [-2, 0]$;

(b) $X = (1, \infty)$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$, $A = (2, 3]$, $B = (-5, 1)$;

(c) $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = E(x) + 1$, gdzie $E(x)$ oznacza część całkowitą liczby x , $A = (-\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$, $B = \{2, 4\}$;

(d) $X = \mathbb{R}$, $Y = (-1, 1)$, $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $A = [-1, 2]$, $B = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$;

(e) $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x, y) = x - 2y$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 1\}$, $B = \{2\}$;

(f) $X = Y = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, $f(x, y, z) = (\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2})$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, \wedge y > 0 \wedge z > 0\}$, $B = \{(0, 0, 0)\}$.

4. Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów $A, B \subseteq X$ oraz funkcji $f : X \rightarrow Y$ zachodzą związki:

(a) $A \subseteq B \implies f(A) \subseteq f(B)$;

(b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

(c) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;

(d) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$;

Udowodnić, że dla funkcji różnowartościowej inkluzje można zastąpić równościami.

5. Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów $A, B \subseteq Y$ oraz funkcji $f : X \rightarrow Y$ zachodzą związki:

(a) $A \subseteq B \implies f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$;

(b) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;

(c) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;

(d) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

6. Niech $f : X \rightarrow Y$, $A \subseteq X$ oraz $B \subseteq Y$. Udowodnić, że $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ oraz $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Podać warunki dostateczne i konieczne na to, by inkluzje można było zastąpić równościami.