

Wstęp do matematyki
Zestaw 3 – algebra zbiorów

1. Ile elementów mają następujące zbiory?

- (1) $\{1, 2, 3\}$.
- (2) $\{1, 2, 1\}$.
- (3) $\{1, 2, \{1\}\}$.
- (4) $\emptyset$.
- (5) $\{\emptyset\}$.
- (6) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \leq 7\}$.
- (7) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 4 \vee x^2 = 9\}$.

2. Jakie relacje inkluzji zachodzą pomiędzy następującymi zbiorami?

- (1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 4\}$.
- (2) $A = \emptyset$, $B = \{1, 2, 3\}$.
- (3) $A = \{\{1, 2\}, \{1\}, 2, \emptyset\}$, $B = \{\{1\}, 2, \{\emptyset\}\}$.
- (4) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y > 2\}$.
- (5) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0\}$.

3. Obliczyć $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$ dla następujących zbiorów A i B .

- (1) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$.
- (2) $A = \{\{1, 2\}, 3\}$, $B = \{1, 3, 4\}$.
- (3) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 3\}$.
- (4) $A = [0, 2]$, $B = [1, 4]$.

4. Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów A , B , C i D zachodzą następujące równości.

- (1) $A \cup (A \cap B) = A$.

$$(2) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

$$(3) (A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

$$(4) A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

$$(5) (A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D).$$

5. Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów A , B , C i D zachodzą następujące implikacje (równoważności).

$$(1) (A \subset B) \wedge (C \subset D) \Rightarrow (A \cap C \subset B \cap D).$$

$$(2) (A \subset B) \wedge (C \subset D) \Rightarrow (A \setminus D \subset B \setminus C).$$

$$(3) (A \subset B) \Leftrightarrow ((B \subset C) \Rightarrow ((C \setminus A) \cap (C \setminus B) = C \setminus B)).$$

6. Udowodnić, że $A \cup B$ jest najmniejszym zbiorem zawierającym jednocześnie A i B , tzn. jeśli X jest takim zbiorem, że A jest zawarte w X oraz B jest zawarte w X , to $A \cup B$ jest zawarte w X .

7. Wyliczyć $A \times B$ oraz $B \times A$ w dla następujących zbiorów A i B .

$$(1) A = \{0, 1\}, B = \{1, 2\}.$$

$$(2) A = \{0, (0, 0)\}, B = \{(0, (0, 0))\}.$$

$$(3) A = \emptyset, B = \{1, 2, 3\}.$$

8. Zaznaczyć w dwuwymiarowym układzie współrzędnych $A \times B$ dla następujących zbiorów A i B .

$$(1) A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}.$$

$$(2) A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \vee 2 < x \leq 3\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2 \vee 3 < x \leq 4\}.$$

9. Zaznaczyć w trójwymiarowym układzie współrzędnych $A \times B$ dla następujących zbiorów A i B .

$$(1) A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 1\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}.$$

$$(2) A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}.$$

$$(3) A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}, B = \{x \mid 0 < x\}.$$

10. Sprawdzić, czy dla dowolnych zbiorów A , B i C prawdziwe są równości.

$$(1) A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

$$(2) A \setminus (B \times C) = (A \setminus B) \times (A \setminus C).$$