Wstęp do matematyki
Zestaw 2 – rachunek zdań

1. (1) Zdefiniować koniunkcję przy pomocy alternatywy i negacji.

(2) Zdefiniować alternatywę przy pomocy implikacji i negacji.

2. Udowodnić, że pomocy alternatywy i koniunkcji nie można zdefiniować implikacji.

3. Udowodnić, że następujące wyrażenia są tautologiami rachunku zdań.

(1) $p \Rightarrow p$.

(2) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p \wedge q)$.

(3) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$.

(4) $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$.

(5) $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$.

4. Sprawdzić, czy następujące wyrażenia są tautologiami rachunku zdań.

(1) $((p \vee q) \wedge \sim p) \Rightarrow q$.

(2) $((p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$.

(3) $p \Rightarrow ((\sim q \vee q) \Rightarrow r)$.

(4) $(((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (p \vee q \Rightarrow \sim r)) \Rightarrow p \wedge q \wedge r$.

(5) $((p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r) \vee (p \Rightarrow s)) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \vee r \vee s))$.

5. Dla jakich wartości n tautologią rachunku zdań jest wyrażenie

$$(\cdots(((p \Rightarrow p) \Rightarrow p) \Rightarrow p) \cdots) \Rightarrow p,$$

w którym p występuje n razy.

6. Czy prawdziwe są następujące zdania?

(1) Jeśli a jest liczbą pierwszą, to jeśli a nie jest liczbą pierwszą, to a jest równe 4.

(2) Jeśli figura A jest czworokątem i A ma wszystkie kąty równe, to z faktu, że A jest czworokątem wynika, że A ma wszystkie boki równe.

(3) Jeśli liczba a jest podzielna przez 3 i jest podzielna przez 5, to z faktu, że a nie jest podzielna przez 3 wynika, że a nie jest podzielna przez 5.

7. Sprawdzić, czy poniższe reguły są regułami dowodzenia.

(1) $\frac{\sim(p \Rightarrow q)}{p}$.

(2) $\frac{(p \vee q) \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$.

(3) $\frac{p \Rightarrow q, \sim p \Rightarrow q}{q}$.

8. Korzystając z prawdziwości wszystkich formuł postaci

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow P),\ (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)),$$

gdzie P, Q i R są dowolnymi formułami zdaniowymi, oraz reguły dowodzenia

$$\frac{P, P \Rightarrow Q}{Q},$$

udowodnić prawdziwość następujących formuł.

(1) $p \Rightarrow p$.

(2) $(q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$.

9. Sformułować i uzasadnić regułę dowodzenia, na podstawie której z założeń

$$|a| > |b| \Rightarrow a^2 > b^2,\ (c > 0 \wedge a^2 > b^2) \Rightarrow ca^2 > cb^2$$

wynika, że

$$(c > 0 \wedge |a| > |b|) \Rightarrow ca^2 > cb^2.$$