

Programowanie liniowe
Zestaw 3

1. Dokonać następujących przekształceń zadań programowania liniowego.

(a) $\max\{x_1 + x_2 + x_3 \mid x_1 - x_2 \leq 1, x_1 + x_3 \leq -1\} \mapsto \min\{cx \mid x \geq 0, Ax = b\}.$

(b) $\max\{x_1 + x_2 + x_3 \mid x_1 - x_2 = 1, x_1 + x_3 = 1, x_1, x_2 \geq 0\} \mapsto \max\{cx \mid Ax \leq b\}.$

2. Rozwiązać następujące problemy programowania liniowego.

(a) $\min\{x_1 + x_2 \mid x_1 + x_2 \leq 2, 2x_1 - x_2 \leq 1, x_1, x_2 \geq 0\}.$

(b) $\max\{x_1 + x_2 \mid x_1 + x_2 \leq 1, x_1 + 2x_2 \leq 2, 2x_1 + x_2 \leq 2\}.$

(c) $\max\{x_1 + x_2 \mid x_1 + x_2 \geq 1, x_1, x_2 \geq 0\}.$

3. Sformułować problemy dualne do problemów z poprzedniego zadania.

4. Sprowadzić do postaci $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax \leq b\}$ zbiór $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| + x_2 \leq 1, |x_2 - x_3| \leq 1\}.$

5. Sprawdzić, czy punkt x jest wierzchołkiem (ścianą wymiaru 0) wielościanu P .

(a) $P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 \leq 5, x_1 - x_3 \leq 0, x_2 + x_3 \leq 3, x_1 + x_2 \leq 3\},$
 $x = [1, 2, 1]^{\text{tr}}.$

(b) $P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 \leq 3, x_1 - x_2 + x_3 \leq 2, x_1 + x_2 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\},$
 $x = [1, 0, 1]^{\text{tr}}.$

6. Sprawdzić, czy półprosta wyznaczona przez wektor v jest krawędzią stożka C .

(a) $C = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 \leq 0, x_1 - x_2 \leq 0, x_2 - x_3 \leq 0\}, v = [0, 1, 1]^{\text{tr}}.$

(b) $C = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 + x_2 \leq 0, x_2 + x_3 \leq 0, x_3 \leq 0\},$
 $v = [1, -1, 0]^{\text{tr}}.$

7. Wyznaczyć wierzchołki wielościanu P oraz krawędzie stożka charakterystycznego wielościanu P . Rozwiązać problem programowania liniowego $\min\{f(x) \mid x \in P\}.$

- (a) $P = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 = 4, x_1, x_2 \geq 0\}, f(x) = x_1.$
- (b) $P = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 \leq 3, x_2 \geq 1, x_1 \geq 0\}, f(x) = x_2.$
- (c) $P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 \geq 0, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}, f(x) = x_2 + x_3.$

8. Rozwiązać problem programowania liniowego $\min\{f(x) \mid x \in P\}.$

- (a) $f(x) = x_1 + x_2 + x_3, P = \text{conv.hull}\{[0, 1, -3]^{\text{tr}}, [2, 1, 0]^{\text{tr}}, [-3, 0, 1]^{\text{tr}}, [1, 1, 1]^{\text{tr}}, [0, 0, 3]^{\text{tr}}\}.$
- (b) $f(x) = -x_1 + 2x_2, P = \text{conv.hull}\{[2, 2]^{\text{tr}}, [2, 0]^{\text{tr}}, [5, 0]^{\text{tr}}\} + \text{conv.cone}\{[1, 1]^{\text{tr}}, [2, 1]^{\text{tr}}\}.$
- (c) $f(x) = x_2 + x_3, P = \text{conv.hull}\{[2, 0, 1, 3]^{\text{tr}}, [3, 1, 0, 0]^{\text{tr}}, [0, 1, 1, 0]^{\text{tr}}\} + \text{conv.cone}\{[1, 3, 0, 2]^{\text{tr}}, [2, 0, 0, 1]^{\text{tr}}\} + \text{lin.hull}\{[0, 1, -1, 0]^{\text{tr}}\}.$

9. Wielościany z poprzedniego zadania zapisać w postaci $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ oraz wyznaczyć wszystkie ściany tych zbiorów.

10. Dla wielościanu znaleźć punkty $x^{(i)}, y^{(j)}, z^{(k)}$ takie, że $P = Q + C + L$, gdzie $Q = \text{conv.hull}\{x^{(i)}\}, C = \text{conv.cone}\{y^{(j)}\}, L = \text{lin.hull}\{z^{(k)}\}$ oraz $C \perp L$.

- (a) $P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 \geq 2, x_1 + x_3 \geq 2, x_2 + x_3 \geq 2, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}.$
- (b) $P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 \leq 2, x_1 + x_3 \leq 2, x_2 + x_3 \leq 2, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}.$
- (c) $P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 \geq 0, x_1 + x_3 \geq 1, x_1 + x_3 \leq 2\}.$