

Programowanie liniowe

Zestaw 2

Niepusty podzbiór $C \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy stożkiem, jeśli dla dowolnego $x \in C$ oraz $\lambda \geq 0$ mamy $\lambda x \in C$. Podzbiór $C \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy stożkiem wypukłym, jeśli jest on jednocześnie stożkiem i zbiorem wypukłym.

1. Udowodnić, że dla dowolnego zbioru $X \subset \mathbb{R}^n$ istnieje najmniejszy stożek $\text{cone } X$ zawierający zbiór X . Pokazać, że $\text{cone } X = \{0\}$, gdy $X = \emptyset$, oraz $\text{cone } X = \{\lambda x \mid \lambda \geq 0, x \in X\}$, gdy $X \neq \emptyset$.

2. Udowodnić, że suma mnogościowa niepustej rodziny stożków jest stożkiem.

3. Znaleźć wszystkie stożki w $\mathbb{R}$.

4. Udowodnić, że niepusty podzbiór $C \subset \mathbb{R}^n$ jest stożkiem wypukłym wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in C$ oraz $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ mamy $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C$.

5. Udowodnić, że dla dowolnego zbioru $X \subset \mathbb{R}^n$ istnieje najmniejszy stożek wypukły $\text{conv. cone } X$ zawierający zbiór X . Pokazać, że $\text{conv. cone } X = \{\sum_{x \in X} \lambda_x x \mid \lambda_x \geq 0, |\{x \in X \mid \lambda_x > 0\}| < \infty\}$.

6. Podać przykład stożka, który nie jest wypukły.

7. Podać przykład dwóch stożka wypukłych, których suma mnogościowa nie jest stożkiem wypukłym.

Wielościaniem nazywamy każdy zbiór postaci $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, $A \in \mathbb{M}(m, n)$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. Podzbiór $C \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy stożkiem wielościennym, jeśli C jest jednocześnie stożkiem i wielościaniem.

8. Udowodnić, że każdy wielościennik jest zbiorem wypukłym.

9. Udowodnić, że niepusty zbiór $C \subset \mathbb{R}^n$ jest stożkiem wielościennym, jeśli $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$ dla pewnej macierzy $A \in \mathbb{M}(m, n)$, $m \geq 1$.

10. Podać przykład stożka wypukłego, który nie jest wielościenny.

11. Udowodnić, że przekrój skończonej ilości stożków skończenie generowanych jest stożkiem skończenie generowanym.

12. Udowodnić, że suma algebraiczna skończonej ilości stożków wielościennych jest stożkiem wielościennym.

13. Znaleźć macierz $A \in \mathbb{M}(m, n)$ taką, że $\text{conv.cone } X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$.

(a) $n = 3$ i $X = \{[1, 1, 1]^{\text{tr}}, [1, 2, 3]^{\text{tr}}, [1, -1, 1]^{\text{tr}}, [0, 1, 1]^{\text{tr}}\}$.

(b) $n = 5$ i $X = \{[1, 1, 0, 0, 0]^{\text{tr}}, [1, 0, 0, 2, 0]^{\text{tr}}, [0, 0, -1, -1, -1]^{\text{tr}}\}$.

14. Znaleźć macierz $A \in \mathbb{M}(m, n)$ i $b \in \mathbb{R}^n$ takie, że $\text{conv.hull } X = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid Ax \leq b\}$.

(a) $n = 3$ i $X = \{[1, 0, 0]^{\text{tr}}, [1, 1, 1]^{\text{tr}}, [1, 2, 3]^{\text{tr}}, [1, -1, 1]^{\text{tr}}, [0, 1, 1]^{\text{tr}}\}$.

(b) $n = 5$ i $X = \{[1, 1, 0, 0, 0]^{\text{tr}}, [1, 0, 0, 2, 0]^{\text{tr}}, [0, 0, -1, -1, -1]^{\text{tr}}\}$.

15. Korzystając z algorytmu podanego w dowodzie głównego twierdzenia teorii nierówności liniowych sprawdzić, czy wektor v należy do stożka wypukłego generowanego przez wektory $a_1, \dots, a_k$.

(a) $v = [1, -1, 2]^{\text{tr}}, k = 4, a_1 = [1, -2, 2]^{\text{tr}}, a_2 = [1, 1, 0]^{\text{tr}}, a_3 = [-1, -2, 2]^{\text{tr}}, a_4 = [0, -1, 2]^{\text{tr}}$.

(b) $v = [1, -1, 2, -3]^{\text{tr}}, k = 4, a_1 = [1, -2, 2, -2]^{\text{tr}}, a_2 = [1, 1, 0, 0]^{\text{tr}}, a_3 = [-1, -2, 2, 1]^{\text{tr}}, a_4 = [0, -1, 2, 1]^{\text{tr}}$.

(c) $v = [3, 1, 0, -3]^{\text{tr}}, k = 4, a_1 = [1, -2, 2, -2]^{\text{tr}}, a_2 = [1, 1, 0, 0]^{\text{tr}}, a_3 = [-1, -2, 2, 1]^{\text{tr}}, a_4 = [0, -1, 2, 1]^{\text{tr}}$.