

Programowanie liniowe

Zestaw 1

Podzbiór $V \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy podprzestrzenią liniową, jeśli $0 \in V$ oraz dla dowolnych $v_1, v_2 \in V$ i $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mamy $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V$. Dla każdej podprzestrzeni liniowej $V \subseteq \mathbb{R}^n$ istnieje macierz $A \in \mathbb{M}(m, n)$ taka, że $x \in V$ wtedy i tylko wtedy gdy $Ax = 0$.

1. Udowodnić, że przekrój dowolnej niepustej rodziny podprzestrzeni liniowych w $\mathbb{R}^n$ jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^n$.

2. Udowodnić, że dla dowolnego zbioru $X \subset \mathbb{R}^n$ istnieje najmniejsza przestrzeń liniowa w $\mathbb{R}^n$ zawierająca zbiór X . Podprzestrzeń tę oznaczamy $\text{lin. hull } X$.

3. Udowodnić, że dla dowolnego niepustego zbioru $X \subset \mathbb{R}^n$ mamy równość $\text{lin. hull } X = \{\sum_{x \in X} \lambda_x x \mid \lambda_x \in \mathbb{R}, |\{x \in X \mid \lambda_x \neq 0\}| < \infty\}$.

4. Znaleźć macierz $A \in \mathbb{M}(m, 5)$ taką, że $\text{lin. hull } X = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid Ax = 0\}$, gdzie $X = \{[1, 1, 0, 0, 0]^{\text{tr}}, [1, 0, 0, 2, 0]^{\text{tr}}, [0, 0, -1, -1, -1]^{\text{tr}}\}$.

Podzbiór $X \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy wypukłym, jeśli dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ i $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ takich, że $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, mamy $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in X$.

5. Udowodnić, że każda podprzestrzeń liniowa w $\mathbb{R}^n$ jest zbiorem wypukłym.

6. Udowodnić, że następujące zbiory są wypukłe.

(a) $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$, gdzie $a \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$.

(b) $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^{\text{tr}} A x \leq r\}$, gdzie $A \in \mathbb{M}(n, n)$ jest symetryczną dodatnio określoną macierzą i $r > 0$.

(c) $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq y\}$, gdzie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą (tzn. $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$ dla $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$) i $y \in \mathbb{R}$.

7. Udowodnić, że zbiór $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > 1\}$ nie jest wypukły.

8. Udowodnić, że dla dowolnego zbioru $X \subset \mathbb{R}^n$ istnieje najmniejszy zbiór wypukły zawierający zbiór X . Zbiór ten oznaczamy $\text{conv. hull } X$ i nazywamy otoczką wypukłą zbioru X .

9. Udowodnić, że dla dowolnego niepustego zbioru $X \subset \mathbb{R}^n$ ma miejsce równość $\text{conv.hull } X = \{\sum_{x \in X} \lambda_x x \mid \lambda_x \geq 0, |\{x \in X \mid \lambda_x \neq 0\}| < \infty, \sum_{x \in X} \lambda_x = 1\}$.

10. Znaleźć otoczki wypukłe następujących zbiorów.

(a) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

(b) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$.

(c) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$.

11. Wyznaczyć punkty ekstremalne następujących zbiorów.

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2x \leq 2\}$.

Niepusty podzbiór $X \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy podprzestrzenią afiniczną, jeśli dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ oraz $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ takich, że $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ mamy $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in X$.

12. Udowodnić, że każda podprzestrzeń afiniczna w $\mathbb{R}^n$ jest zbiorem wypukłym.

13. Udowodnić, że podzbiór $X \subset \mathbb{R}^n$ jest podprzestrzenią afiniczną wtedy i tylko wtedy, gdy $X = x + V := \{x + v \mid v \in V\}$ dla pewnego $x \in \mathbb{R}^n$ oraz podprzestrzeni liniowej $V \subset \mathbb{R}^n$. Jeśli $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ oraz $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$ są podprzestrzeniami liniowymi, to $x_1 + V_1 = x_2 + V_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $V_1 = V_2$ oraz $x_1 - x_2 \in V_1$.

14. Udowodnić, że niepusty podzbiór $X \subset \mathbb{R}^n$ jest podprzestrzenią afiniczną wtedy i tylko wtedy, gdy $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$, $A \in \mathbb{M}(m, n)$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$.

15. Udowodnić, że dla dowolnego niepustego podzbioru $X \subset \mathbb{R}^n$ istnieje najmniejsza podprzestrzeń afiniczna $\text{aff.hull } X$ zawierająca zbiór X . Pokazać, że $\text{aff.hull } X = \{\sum_{x \in X} \lambda_x x \mid \lambda_x \in \mathbb{R}, |\{x \in X \mid \lambda_x \neq 0\}| < \infty, \sum_{i=1}^t \lambda_i = 1\}$.

16. Znaleźć $A \in \mathbb{M}(m, 5)$ oraz $b \in \mathbb{R}^m$ takie, że $\text{aff.hull } X = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid Ax = b\}$, gdzie $X = \{[1, 1, 0, 0, 0]^{\text{tr}}, [1, 0, 0, 2, 0]^{\text{tr}}, [0, 0, -1, -1, -1]^{\text{tr}}\}$