

Metoda doprowadzania układu równań do postaci bazowej

Dany jest układ równań liniowych

$$Ax = b$$

oraz rozwiązanie bazowe y tego równania, gdzie A jest macierzą o n wierszach i m kolumnach, $n \leq m$, b jest wektorem kolumnowym rozmiaru n i y jest wektorem kolumnowym rozmiaru m . Aby doprowadzić powyższy układ do postaci bazowej względem y należy wykonać następujące kroki:

1. dla każdego $j = 1, \dots, m$, takiego, że $y_j \neq 0$, należy znaleźć $i \in \{1, \dots, n\}$ taki, że $a_{i,j} \neq 0$, oraz przekształcić układ $Ax = b$ tak, by $a_{i,j} = 1$ oraz $a_{k,j} = 0$, $k = 1, \dots, n$, $k \neq i$;
2. dla każdego $i = 1, \dots, n$, takiego, że $b_i = 0$ (w przekształconym układzie równań) należy znaleźć $j \in \{1, \dots, m\}$ takie, że $a_{i,j} \neq 0$, oraz przekształcić układ $Ax = b$ tak, by $a_{i,j} = 1$ oraz $a_{k,j} = 0$, $k = 1, \dots, n$, $k \neq i$;

Badanie kolejnego indeksu j w punkcie pierwszym można rozpocząć dopiero po zakończeniu przekształceń związanych z poprzednim indeksem. Analogiczna uwaga dotyczy indeksów i z punktu drugiego.

Dla przykładu rozważmy układ równań

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & & = & 1 \\ - & x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & & - & x_5 & = & 0 \end{array}$$

oraz jego rozwiązanie bazowe $y = [0, 0, 1, 0, 0]^{\text{tr}}$. Zauważmy, że jednym indeksem $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ takim, że $y_j \neq 0$ jest $j = 3$. Dla $i = 1$ mamy $a_{i,j} \neq 0$. Ponadto układ nasz spełnia już warunek $a_{1,3} = 1$, $a_{2,3} = 0$ i $a_{3,3} = 0$, zatem możemy pominąć pierwszy krok.

Ponieważ $b_2 = 0$, więc musimy znaleźć indeks $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ taki, że $a_{2,j} \neq 0$. Takim indeksem jest $j = 1$. Po wykonaniu przekształceń opisanych w punkcie drugim otrzymujemy układ

$$\begin{array}{rrrrrr} & x_2 & + & x_3 & & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & & + & x_4 & - & x_5 & = & 0 & . \\ 2x_2 & & & & - & x_4 & & & = & 0 \end{array}$$

Postępując podobnie dla $i = 3$ możemy wybrać $j = 4$ (co nie byłoby możliwe, gdybyśmy nie dokonali przekształcenia układu), w efekcie czego otrzymujemy układ równań

$$\begin{array}{rrrrrr} & x_2 & + & x_3 & & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & & - & x_5 & = & 0 & . \\ - & 2x_2 & & & + & x_4 & & & = & 0 \end{array}$$

Zauważmy, że nie możemy wybrać $j = 5$, mimo iż byłoby to możliwe gdybyśmy nie przekształcili układu.