

MATEMATYKA DYSKRETNA II
ZESTAW 4

1. Udowodnić następujące własności wielomianów Gaussa.

- (a) $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$.
- (b) $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-m \end{bmatrix}$.
- (c) $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix} + T^{n-m} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}$.
- (d) $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} + T^m \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}$.
- (e) $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ jest wielomianem stopnia $(n-m)m$.
- (f) $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}(1) = \binom{n}{m}$.

2. Udowodnić, że ilość m -wymiarowych podprzestrzeni liniowych w $\mathbb{F}_q^n$, gdzie $\mathbb{F}_q$ jest ciałem o q elementach, jest równa $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}(q)$.

3. Udowodnić, że

$$\prod_{i=0}^{n-1} (1 + T^i) = \sum_{r=0}^n T^{\frac{r(r-1)}{2}} \cdot \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}.$$

4. Wyliczyć $p_n(1, l)$ i $p_n(2, l)$.

5. Wyliczyć $p'_n(n-2)$, gdzie $p'_n(k) := p_n(k) - p_n(k-1)$ oraz $p_n(k)$ oznacza ilość podziałów liczby n , dla których $h(\lambda) \leq k$.

6. Udowodnić, że

$$\frac{1}{k!} \binom{n-1}{k-1} \leq p'_n(k) \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

7. Udowodnić następujące równości.

- (a) $p'_{n+k}(k) = p_n(k)$.
- (b) $p'_{2n}(n) = p_n$.
- (c) $p'_n(k) = p'_{n-1}(k-1) + p'_{n-k}(k)$.

8. Udowodnić, że ilość podziałów liczby n na parzyste części równa się liczbie podziałów liczby n , w których każda liczba występuje parzystą ilość razy.

9. Niech $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ i $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ będą dwoma podziałami. Przez $\lambda + \mu$ oznaczać będziemy podział $(\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \dots)$, natomiast przez $\lambda \circ \mu$ podział otrzymany przez uporządkowanie ciągu $(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \dots)$. Udowodnić, że podziałem dualnym do podziału $\lambda + \mu$ jest podział $\tilde{\lambda} \circ \tilde{\mu}$.

10. Niech $\mathcal{P}$ oznacza funkcję generującą ciąg (p_n) , zaś $\mathcal{Q}$ funkcję generującą ciąg (q_n) . Udowodnić, że $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \cdot \mathcal{P}(T^2)$. Wykorzystać tę równość do udowodnienia wzoru

$$p_n = q_n + q_{n-2}p_1 + q_{n-4}p_2 + q_{n-6}p_3 + \dots$$

Uzasadnić powyższy wzór w bezpośredni sposób.