

MATEMATYKA DYSKRETNA II
ZESTAW 3

1. Udowodnić, że jeśli $\mathcal{A} := \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{A}_m$ oraz $\mathcal{B} := \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{B}_m$ dla $\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m \in \mathbb{C}[[T]]$, $m \in \mathbb{N}$, to

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\mathcal{A}_m + \mathcal{B}_m) = \mathcal{A} + \mathcal{B} \quad \text{oraz} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} (\mathcal{A}_m \cdot \mathcal{B}_m) = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}.$$

2. Niech $\mathcal{A} = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n T^n$ oraz $\mathcal{A}_m := \sum_{n \in [0, m]} a_n T^n$, $m \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że jeśli $\mathcal{B}(0) = 0$ dla $\mathcal{B} \in \mathbb{C}[[T]]$, to istnieje $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{A}_m(\mathcal{B})$.

3. Udowodnić, że jeśli $\lim_{m \rightarrow \infty} \text{ldeg } \mathcal{A}_m = \infty$ dla $\mathcal{A}_m \in \mathbb{C}[[T]]$, $m \in \mathbb{N}$, to istnieje $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i \in [0, m]} \mathcal{A}_i$.

4. Udowodnić, że jeśli $\lim_{m \rightarrow \infty} \text{ldeg}(\mathcal{A}_m - 1) = \infty$ dla $\mathcal{A}_m \in \mathbb{C}[[T]]$, $m \in \mathbb{N}$, to istnieje $\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{i \in [0, m]} \mathcal{A}_i$.

5. Udowodnić, że jeśli $\mathcal{A} = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{A}_m$ dla $\mathcal{A}_m \in \mathbb{C}[[T]]$, $m \in \mathbb{N}$, to $\mathcal{A}' = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{A}'_m$.

6. Niech $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{C}[[T]]$.

(1) Udowodnić, że jeśli $\mathcal{C} := \mathcal{A} + \mathcal{B}$, to $\mathcal{C}' = \mathcal{A}' + \mathcal{B}'$.

(2) Udowodnić, że jeśli $\mathcal{C} := \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$, to $\mathcal{C}' = \mathcal{A}' \cdot \mathcal{B} + \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}'$.

(3) Udowodnić, że jeśli $\mathcal{B}(0) = 0$ oraz $\mathcal{C} := \mathcal{A}(\mathcal{B})$, to $\mathcal{C}' = \mathcal{A}'(\mathcal{B}) \cdot \mathcal{B}'$.

7. Udowodnić, że jeśli $\mathcal{A}(0) = 1 = \mathcal{B}(0)$ dla $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{C}[[T]]$, to

$$\ln(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}) = \ln \mathcal{A} + \ln \mathcal{B}.$$

8. Udowodnić, że jeśli $\mathcal{A}(0) = 1$ oraz $\mathcal{B} := \ln \mathcal{A}$ dla $\mathcal{A} \in \mathbb{C}[[T]]$, to

$$\mathcal{B}' = \frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}}.$$

9. Niech $\mathcal{A}_m \in \mathbb{C}[[T]]$, $m \in \mathbb{N}$, będą takie, że $\mathcal{A}_m(0) = 1$ dla każdego $m \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{m \rightarrow \infty} \text{ldeg}(\mathcal{A}_m - 1) = \infty$. Udowodnić, że jeśli $\mathcal{A} = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{A}_m$ to

$$\ln \mathcal{A} = \lim_{m \rightarrow \infty} \ln \mathcal{A}_m.$$

10. Niech $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \vdash n$, $i, j \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że $\lambda_i \geq j$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\tilde{\lambda}_j \geq i$.