

GRZEGORZ BOBIŃSKI

**Wykład monograficzny  
Programowanie Liniowe i  
Całkowitoliczbowe**

Wydział Matematyki i Informatyki  
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu  
2012

# PROGRAMOWANIE LINIOWE I CAŁKOWITOLICZBOWE

## SPIS TREŚCI

|                                                                 |            |
|-----------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Notacja</b>                                                  | <b>1</b>   |
| <b>1 Podstawowe pojęcia i rezultaty</b>                         | <b>7</b>   |
| 1.1 Podstawowe pojęcia . . . . .                                | 7          |
| 1.2 Podstawowe twierdzenie nierówności liniowych . . . . .      | 25         |
| 1.3 Stożki, wielościany i polytopy . . . . .                    | 28         |
| 1.4 Lemat Farkasa . . . . .                                     | 37         |
| 1.5 Dualność w programowaniu liniowym . . . . .                 | 39         |
| 1.6 Zastosowanie: Maksymalny przepływ, minimalny przekrój . . . | 48         |
| <b>2 Struktura wielościanów</b>                                 | <b>52</b>  |
| 2.1 Układy zredukowane . . . . .                                | 52         |
| 2.2 Stożek charakterystyczny i wymiar . . . . .                 | 53         |
| 2.3 Ściany wielościanów . . . . .                               | 60         |
| 2.4 Ściany maksymalne . . . . .                                 | 65         |
| 2.5 Ściany minimalne . . . . .                                  | 74         |
| 2.6 Krawędzie i promienie ekstremalne . . . . .                 | 76         |
| 2.7 Promienie ekstremalne stożków ostrych . . . . .             | 81         |
| 2.8 Rozkład wielościanu . . . . .                               | 83         |
| 2.9 Zastosowanie: Macierze podwójnie stochastyczne . . . . .    | 87         |
| 2.10 Zastosowanie: Polytop skojarzeń . . . . .                  | 94         |
| <b>3 Biegunowość oraz wielościany blokujące i antyblokujące</b> | <b>104</b> |
| 3.1 Biegunowość . . . . .                                       | 104        |
| 3.2 Wielościany blokujące . . . . .                             | 110        |
| 3.3 Zastosowanie: Maksymalny przepływ i minimalny przekrój . .  | 119        |
| 3.4 Wielościany antyblokujące . . . . .                         | 125        |
| 3.5 Zastosowanie: Skojarzenia i kolorowania krawędzi . . . . .  | 137        |
| <b>4 Wstęp do programowania całkowitoliczbowego</b>             | <b>141</b> |
| 4.1 Otoczka całkowita . . . . .                                 | 141        |
| 4.2 Wielościany całkowite . . . . .                             | 146        |

## PROGRAMOWANIE LINIOWE I CAŁKOWITOLICZBOWE

|          |                                                                |            |
|----------|----------------------------------------------------------------|------------|
| 4.3      | Bazy Hilberta . . . . .                                        | 148        |
| 4.4      | Twierdzenie Doignona . . . . .                                 | 150        |
| <b>5</b> | <b>Podstawowe własności macierzy całkowicie unimodularnych</b> | <b>153</b> |
| 5.1      | Macierze całkowicie unimodularne . . . . .                     | 153        |
| 5.2      | Charakteryzacje macierzy całkowicie unimodularnych . . . . .   | 161        |

## PROGRAMOWANIE LINIOWE I CAŁKOWITOLICZBOWE

NOTACJA

ZAŁOŻENIE.

Przez cały wykład zakładamy, że  $I$ ,  $J$ ,  $K$  i  $L$  są zbiorami skończonymi.

OZNACZENIE.

Będziemy korzystać z następujących oznaczeń dla zbiorów liczbowych:

- symbolem  $\mathbb{Q}$  oznaczać będziemy zbiór liczb wymiernych,
- symbolem  $\mathbb{Q}_+$  oznaczać będziemy zbiór nieujemnych liczb wymiernych,
- symbolem  $\mathbb{Z}$  oznaczać będziemy zbiór liczb całkowitych,
- symbolem  $\mathbb{N}$  oznaczać będziemy zbiór nieujemnych liczb całkowitych,
- symbolem  $\mathbb{N}_+$  oznaczać będziemy zbiór dodatnich liczb całkowitych.

DEFINICJA.

$I$ -WEKTOREM nazywamy każdą funkcję ze zbioru  $I$  o wartościach w zbiorze liczb wymiernych.

OZNACZENIE.

Jeśli  $S$  jest podzbiorem zbioru liczb wymiernych, to przez  $S^I$  oznaczamy zbiór wszystkich  $I$ -wektorów  $x$  takich, że  $x(i) \in S$  dla wszystkich  $i \in I$ .

OZNACZENIE.

Jeśli  $i_0 \in I$ , to definiujemy  $I$ -wektor  $\mathbf{e}_{i_0}$  wzorem

$$\mathbf{e}_{i_0}(i) := \begin{cases} 1 & i = i_0, \\ 0 & i \neq i_0, \end{cases} \quad (i \in I).$$

DEFINICJA.

Jeśli  $I'$  jest podzbiorem zbioru  $I$ , to definiujemy  $I$ -wektor  $\mathbf{e}_{I'}$ , który nazywamy WEKTOREM CHARAKTERYSTYCZNYM PODZBIORU  $I'$ , wzorem

$$\mathbf{e}_{I'}(i) := \begin{cases} 1 & i \in I', \\ 0 & i \notin I', \end{cases} \quad (i \in I).$$

OZNACZENIE.

Jeśli  $x$  jest  $I$ -wektorem oraz  $I'$  jest podzbiorem zbioru  $I$ , to definiujemy  $I'$ -wektor  $x|_{I'}$  wzorem

$$x|_{I'}(i) := x(i) \quad (i \in I').$$

## PROGRAMOWANIE LINIOWE I CAŁKOWITOLICZBOWE

UMOWA.

Jeśli  $x$  jest  $I$ -wektorem oraz zbiór  $I$  jest podzbiorem zbioru  $J$ , to utożsamiamy wektor  $x$  z  $J$ -wektorem  $y$  danym wzorem

$$y(j) := \begin{cases} x(j) & j \in I, \\ 0 & j \notin I, \end{cases} \quad (j \in J).$$

W szczególności utożsamiamy przestrzeń  $\mathbb{Q}^I$  ze zbiorem  $\{y \in \mathbb{Q}^J : y|_{J \setminus I} = 0\}$ .

OZNACZENIE.

Jeśli  $\lambda$  jest liczbą wymierną i  $x$  jest  $I$ -wektorem, to definiujemy  $I$ -wektor  $\lambda \cdot x$  wzorem

$$(\lambda \cdot x)(i) := \lambda \cdot x(i) \quad (i \in I).$$

OZNACZENIE.

Jeśli  $x_1$  i  $x_2$  są  $I$ -wektorami, to definiujemy  $I$  wektor  $x_1 + x_2$  wzorem

$$(x_1 + x_2)(i) := x_1(i) + x_2(i) \quad (i \in I).$$

OZNACZENIE.

Jeśli  $x_0$  jest  $I$  wektorem oraz  $X$  jest podzbiorem przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to definiujemy zbiór  $x_0 + X$  wzorem

$$x_0 + X := \{x_0 + x : x \in X\}.$$

OZNACZENIE.

Jeśli  $X_1$  i  $X_2$  są podzbiórmi przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to definiujemy zbiór  $X_1 + X_2$  wzorem

$$X_1 + X_2 := \{x_1 + x_2 : x_1 \in X_1 \text{ i } x_2 \in X_2\}.$$

DEFINICJA.

Niech  $x_j, j \in J$ , będą  $I$ -wektorami.

Mówimy, że WEKTORY  $x_j, j \in J$ , SĄ LINIOWO NIEZALEŻNE, jeśli dla dowolnych liczb wymiernych  $\lambda_j, j \in J$ , z warunku

$$\sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j = 0$$

wynika, że  $\lambda_j = 0$  dla wszystkich  $j \in J$ .

Jeśli wektory  $x_j, j \in J$ , nie są liniowo niezależne, to mówimy, że są LINIOWO ZALEŻNE.

## PROGRAMOWANIE LINIOWE I CAŁKOWITOLICZBOWE

UWAGA (KONSEKWENCJA TWIERDZENIA STEINITZA O WYMIANIE).

Niech  $x_j$ ,  $j \in J$ , będą  $I$ -wektorami. Jeśli wektory  $x_j$ ,  $j \in J$ , są liniowo niezależne, to  $|J| \leq |I|$ .

DEFINICJA.

Jeśli  $x$  i  $y$  są  $I$ -wektorami, to definiujemy liczbę wymierną  $\langle x, y \rangle$ , którą nazywamy ILOCZYNEM SKALARNYM WEKTORÓW  $x$  I  $y$ , wzorem

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i \in I} x(i) \cdot y(i).$$

UWAGA.

Niech  $x_j$ ,  $j \in J$ , będą  $I$ -wektorami i oraz  $\lambda_j$ ,  $j \in J$ , są liczbami wymiernymi. Jeśli wektory  $x_j$ ,  $j \in J$ , są liniowo niezależne, to istnieje  $I$ -wektor  $y$  taki  $\langle x_j, y \rangle = \lambda_j$  dla każdego  $j \in J$ .

OZNACZENIE.

Jeśli  $x_1$  i  $x_2$  są  $I$ -wektorami, to piszemy  $x_1 \leq x_2$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x_1(i) \leq x_2(i)$  dla wszystkich  $i \in I$ .

DEFINICJA.

$I \times J$ -MACIERZĄ nazywamy każdą funkcję ze zbioru  $I \times J$  do zbioru liczb wymiernych.

OZNACZENIE.

Jeśli  $S$  jest podzbiorem zbioru liczb wymiernych, to przez  $\mathbb{M}_{I \times J}(S)$  oznaczamy zbiór wszystkich  $I \times J$ -macierzy  $A$  takich, że  $A(i, j) \in S$  dla wszystkich  $i \in I$  i  $j \in J$ .

OZNACZENIE.

Jeśli  $A$  jest  $I \times J$ -macierzą,  $I' \subseteq I$  i  $J' \subseteq J$ , to definiujemy  $I' \times J'$ -macierz  $A_{I', J'}$  wzorem

$$A_{I', J'}(i, j) := A(i, j) \quad (i \in I', j \in J').$$

DEFINICJA.

Jeśli  $A$  jest  $I \times J$ -macierzą, to definiujemy  $J \times I$ -macierz  $A^T$ , którą nazywamy MACIERZĄ TRANSPONOWANĄ MACIERZY  $A$ , wzorem

$$A^T(j, i) := A(i, j) \quad (j \in J, i \in I).$$

DEFINICJA.

Jeśli  $A$  jest  $I \times J$ -macierzą oraz  $i \in I$ , to definiujemy  $J$ -wektor  $A(i)$ , który nazywamy  $i$ -TYM WIERSZEM MACIERZY  $A$ , wzorem

$$A(i)(j) := A(i, j) \quad (j \in J).$$

## PROGRAMOWANIE LINIOWE I CAŁKOWITOLICZBOWE

DEFINICJA.

Jeśli  $A$  jest  $I \times J$ -macierzą oraz  $j \in J$ , to  $I$ -wektor  $A^T(j)$  nazywamy  $j$ -TĄ KOLUMNĄ MACIERZY  $A$ .

OZNACZENIE.

Jeśli  $\lambda$  jest liczbą wymierną i  $A$  jest  $I \times J$ -macierzą, to definiujemy  $I \times J$ -macierz  $\lambda \cdot A$  wzorem

$$(\lambda \cdot A)(i, j) := \lambda \cdot A(i, j) \quad (i \in I, j \in J).$$

OZNACZENIE.

Jeśli  $A$  jest  $I \times J$ -macierzą i  $x$  jest  $J$ -wektorem, to definiujemy  $I$ -wektor  $A \cdot x$  wzorem

$$(A \cdot x)(i) := \sum_{j \in J} A(i, j) \cdot x(j) \quad (i \in I).$$

OZNACZENIE.

Jeśli  $A_1$  i  $A_2$  są  $I \times J$ -macierzami, to definiujemy  $I \times J$ -macierz  $A_1 + A_2$  wzorem

$$(A_1 + A_2)(i, j) := A_1(i, j) + A_2(i, j) \quad (i \in I, j \in J).$$

OZNACZENIE.

Jeśli  $A$  jest  $I \times J$ -macierzą i  $B$  jest  $J \times K$ -macierzą, to definiujemy  $I \times K$ -macierz  $A \cdot B$  wzorem

$$(A \cdot B)(i, k) := \sum_{j \in J} A(i, j) \cdot B(j, k) \quad (i \in I, k \in K).$$

OZNACZENIE.

Definiujemy  $I \times I$ -macierz  $\text{Id}_I$  wzorem

$$\text{Id}_I(i_1, i_2) := \begin{cases} 1 & i_1 = i_2, \\ 0 & i_1 \neq i_2, \end{cases} \quad (i_1, i_2 \in I).$$

DEFINICJA.

Niech  $A$  będzie  $I \times J$ -macierzą. Macierz  $A$  nazywamy ODWRACALNĄ, jeśli istnieje  $J \times I$ -macierz  $B$  taka, że

$$A \cdot B = \text{Id}_I \quad \text{i} \quad B \cdot A = \text{Id}_J.$$

UWAGA.

Jeśli  $A$  jest  $I \times J$ -macierzą odwracalną, to  $|I| = |J|$ .

DEFINICJA.

Jeśli  $A$  jest  $I \times J$ -macierzą odwracalną, to MACIERZĄ ODWROTNĄ DO MACIERZY  $A$  nazywamy każdą  $J \times I$ -macierz  $B$  taką, że

$$A \cdot B = \text{Id}_I \quad \text{i} \quad B \cdot A = \text{Id}_J.$$

UWAGA.

Jeśli  $A$  jest  $I \times J$ -macierzą odwracalną oraz  $B_1$  i  $B_2$  są macierzami odwrotnymi do macierzy  $A$ , to  $B_1 = B_2$ .

OZNACZENIE.

Jeśli  $A$  jest  $I \times J$ -macierzą odwracalną, to przez  $A^{-1}$  oznaczamy macierz odwrotną do macierzy  $A$ .

DEFINICJA.

Jeśli  $A$  jest  $I \times J$ -macierzą, to definiujemy liczbę  $\text{rk } A$ , którą nazywamy RZĘDEM MACIERZY  $A$ , wzorem

$$\text{rk } A := \max\{|I'| : I' \subseteq I \text{ i wektory } A(i), i \in I', \text{ są liniowo niezależne}\}.$$

UWAGA.

Jeśli  $A$  jest  $I \times J$ -macierzą, to  $\text{rk } A = \text{rk } A^T$ .

UWAGA.

Jeśli  $A$  jest  $I \times J$ -macierzą i  $B$  jest  $J \times K$ -macierzą, to

$$\text{rk}(A \cdot B) \leq \max\{\text{rk } A, \text{rk } B\}.$$

UWAGA.

Jeśli  $A$  jest  $I \times J$ -macierzą, to macierz  $A$  jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|I| = \text{rk } A = |J|.$$

OZNACZENIE.

Przez  $\mathcal{S}(I)$  oznaczam zbiór permutacji zbioru  $I$ .

OZNACZENIE.

Przez  $\text{sign}$  oznaczamy jedyną funkcję  $f : \mathcal{S}(I) \rightarrow \{-1, 1\}$  taką, że funkcja  $f$  jest „na” i

$$f(\sigma_1 \circ \sigma_2) = f(\sigma_1) \cdot f(\sigma_2)$$

dla wszystkich permutacji  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}(I)$ .

DEFINICJA.

Jeśli  $A$  jest  $I \times I$ -macierzą, to definiujemy liczbę  $\det A$ , którą nazywamy WYZNACZNIKIEM MACIERZY  $A$ , wzorem

$$\det A := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(I)} \left( \text{sign } \sigma \cdot \prod_{i \in I} A(i, \sigma(i)) \right).$$

OZNACZENIE.

Jeśli  $|I| = |J|$ ,  $A$  jest  $I \times J$ -macierzą oraz  $\sigma : I \rightarrow J$  jest bijekcją, to definiujemy liczbę  $\det_{\sigma} A$  wzorem

$$\det_{\sigma} A := \det A_{\sigma},$$

gdzie  $A_{\sigma}$  jest  $I \times I$ -macierzą daną wzorem

$$A_{\sigma}(i_1, i_2) := A(i_1, \sigma(i_2)) \quad (i_1, i_2 \in I).$$

UWAGA.

Jeśli  $|I| = |J|$ ,  $A$  jest  $I \times J$ -macierzą oraz  $\sigma_1, \sigma_2 : I \rightarrow J$  są bijekcjami, to

$$\det_{\sigma_1} A := \text{sign}(\sigma_1 \circ \sigma_2) \cdot \det_{\sigma_2} A.$$

W szczególności

$$|\det_{\sigma_1} A| := |\det_{\sigma_2} A|.$$

OZNACZENIE.

Jeśli  $|I| = |J|$  i  $A$  jest  $I \times J$ -macierzą, to definiujemy liczbę  $|\det A|$  wzorem

$$|\det A| = |\det_{\sigma} A|,$$

gdzie  $\sigma : I \rightarrow J$  jest bijekcją.

UWAGA.

Jeśli  $|I| = |J|$  i  $A$  jest  $I \times J$ -macierzą, to macierz  $A$  jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy  $|\det A| \neq 0$ .

UWAGA.

Jeśli  $|I| = |J|$  i  $A \in \mathbb{M}_{I \times J}(\mathbb{Z})$ , to macierz  $A$  jest odwracalna i  $A^{-1} \in \mathbb{M}_{I \times J}(\mathbb{Z})$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $|\det A| = 1$ .

UWAGA.

Jeśli  $|I| = |J|$ ,  $A \in \mathbb{M}_{I \times J}(\mathbb{Z})$  i  $I'$  jest podzbiorem zbioru  $I$ , to

$$\gcd(|\det A_{I', J'}| : J' \subseteq J \text{ i } |J'| = |I'|) \mid |\det A|.$$

## 1. PODSTAWOWE POJĘCIA I REZULTATY

### 1.1. PODSTAWOWE POJĘCIA

#### DEFINICJA.

Podzbiór  $V$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  nazywamy PODPRZESTRZENIĄ LINIOWĄ, jeśli  $0 \in V$  i  $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in V$  dla wszystkich wektorów  $x_1, x_2 \in V$  oraz liczb wymiernych  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ .

#### LEMAT 1.1.

Jeśli  $V$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to

$$\sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j \in V$$

dla wszystkich wektorów  $x_j \in V$ ,  $j \in J$ , oraz liczb wymiernych  $\lambda_j$ ,  $j \in J$ .

#### DOWÓD.

Ćwiczenie. □

#### LEMAT 1.2.

Jeśli  $V_\gamma$ ,  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\Gamma \neq \emptyset$ , są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to zbiór  $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} V_\gamma$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ .

#### DOWÓD.

Ćwiczenie. □

#### WNIOSEK 1.3.

Jeśli  $X$  jest podzbiorem przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to istnieje najmniejsza podprzestrzeń liniowa przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  zawierająca zbiór  $X$ .

#### DOWÓD.

Ćwiczenie. □

#### DEFINICJA.

Jeśli  $X$  jest podzbiorem zbioru  $\mathbb{Q}^I$ , to najmniejszą podprzestrzeń liniową przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  zawierającą zbiór  $X$ , którą oznaczamy  $\text{lin. hull } X$ , nazywamy PODPRZESTRZENIĄ LINIOWĄ GENEROWANĄ PRZEZ ZBIÓR  $X$ .

#### STWIERDZENIE 1.4.

Jeśli  $x_j$ ,  $j \in J$ , są  $I$ -wektorami, to

$$\text{lin. hull}\{x_j : j \in J\} = \left\{ \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j : \lambda_j \in \mathbb{Q} \text{ dla wszystkich } j \in J \right\}.$$

#### DOWÓD.

Ćwiczenie. □

LEMAT 1.5.

Założmy, że  $I$ -wektory  $x_j, j \in J$ , są liniowo niezależne. Jeśli  $x$  jest  $I$ -wektorem takim, że wektory  $x, x_j, j \in J$ , są liniowo zależne, to istnieją liczby wymierne  $\lambda_j, j \in J$ , takie, że

$$x = \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j.$$

DOWÓD.

Ponieważ wektory  $x, x_j, j \in J$ , są liniowo zależne, więc istnieją liczby wymierne  $\mu, \mu_j, j \in J$ , takie, że

$$\mu \cdot x + \sum_{j \in J} \mu_j \cdot x_j = 0$$

i  $\mu \neq 0$  lub  $\mu_j \neq 0$  dla pewnego  $j \in J$ . Jeśli  $\mu = 0$ , to

$$\sum_{j \in J} \mu_j \cdot x_j = 0,$$

więc  $\mu_j = 0$  dla każdego  $j \in J$ , sprzeczność. Zatem  $\mu \neq 0$ , więc

$$x = \sum_{j \in J} -\frac{\mu_j}{\mu} \cdot x_j. \quad \square$$

DEFINICJA.

Niech  $V$  będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  i  $x_j, j \in J$ ,  $I$ -wektorami. Mówimy, że WEKTORY  $x_j, j \in J$ , TWORZĄ BAZĘ PODPRZESTRZENI  $V$  jeśli  $x_j \in V$  dla wszystkich  $j \in J$ , wektory  $x_j, j \in J$ , są liniowo niezależne oraz dla każdego wektora  $x \in V$  wektory  $x, x_j, j \in J$ , są liniowo zależne.

DEFINICJA.

Jeśli  $V$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to definiujemy liczbę  $\dim V$ , którą nazywamy WYMIAREM PODPRZESTRZENI  $V$ , wzorem

$$\dim V := \max\{|J| : \text{wektory } x_j, j \in J, \text{ tworzą bazę podprzestrzeni } V\}.$$

UWAGA.

Jeśli  $V$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  i  $I$ -wektory  $x_j, j \in J$ , tworzą bazę podprzestrzeni  $V$ , to  $\dim V = |J|$ .

DOWÓD.

Algebra liniowa.  $\square$

STWIERDZENIE 1.6.

Jeśli  $V$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  oraz wektory  $x_j, j \in J$ , tworzą bazę podprzestrzeni  $V$ , to

$$V = \text{lin. hull}\{x_j : j \in J\}.$$

Dowód.

Oczywiście  $\text{lin. hull}\{x_j : j \in J\} \subseteq V$ . Z drugiej strony, ustalmy  $x \in V$ . Z definicji bazy wynika, że wektory  $x_j, j \in J$ , są liniowo niezależne, ale wektory  $x, x_j, j \in J$ , są liniowo zależne. Korzystając z Lematu 1.5 wiemy, że istnieją liczby wymierne  $\lambda_j, j \in J$ , takie, że

$$x = \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j,$$

co kończy dowód na mocy Stwierdzenia 1.4. □

WNIOSEK 1.7.

Podzbiór  $V$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  jest podprzestrzenią liniową wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją  $I$ -wektory  $x_j, j \in J$ , takie, że

$$V = \text{lin. hull}\{x_j : j \in J\}.$$

Dowód.

Oczywiście jeśli istnieją  $I$ -wektory  $x_j, j \in J$ , takie, że

$$V = \text{lin. hull}\{x_j : j \in J\},$$

to zbiór  $V$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ . Załóżmy teraz, że zbiór  $V$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ . Jeśli wektory  $x_j, j \in J$ , tworzą bazę podprzestrzeni  $V$ , to

$$V = \text{lin. hull}\{x_j : j \in J\},$$

na mocy Stwierdzenia 1.6.

OZNACZENIE.

Jeśli  $X$  jest podzbiorem przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to definiujemy podzbiór  $X^\perp$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  wzorem

$$X^\perp := \{y \in \mathbb{Q}^I : \langle x, y \rangle = 0 \text{ dla wszystkich wektorów } x \in X\}.$$

LEMAT 1.8.

Jeśli  $X$  jest podzbiorem przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to zbiór  $X^\perp$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ .

Dowód.

Ćwiczenie. □

LEMAT 1.9.

Jeśli  $x_j, j \in J$ , są  $I$ -wektorami, to

$$(\text{lin. hull}\{x_j : j \in J\})^\perp = (\{x_j : j \in J\})^\perp.$$

Dowód.

Niech

$$V := \text{lin. hull}\{x_j : j \in J\} \quad \text{ i } \quad W := (\{x_j : j \in J\})^\perp.$$

Oczywiście  $V^\perp \subseteq W$ . Załóżmy teraz, że  $y \in W$  i ustalmy  $x \in V$ . Ze Stwierdzenia 1.4 wiemy, że istnieją liczby wymierne  $\lambda_j, j \in J$ , takie, że

$$x = \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j.$$

Wtedy

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j, y \right\rangle = \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot \langle x_j, y \rangle = 0.$$

Z dowolności wektora  $x$  wynika, że  $y \in V^\perp$ . □

LEMAT 1.10.

Jeśli  $V$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to

$$(V^\perp)^\perp = V.$$

Dowód.

Oczywiście  $V \subseteq (V^\perp)^\perp$ . Załóżmy teraz, że  $x \in (V^\perp)^\perp$  i ustalmy wektory  $x_j, j \in J$ , tworzące bazę podprzestrzeni  $V$ . Jeśli wektory  $x, x_j, j \in J$ , są liniowo niezależne, to istnieje  $I$ -wektor  $y$  taki, że  $\langle x, y \rangle = 1$  i  $\langle x_j, y \rangle = 0$  dla wszystkich  $j \in J$ . Ze Stwierdzenia 1.6 i Lematu 1.9 wynika, że  $y \in V^\perp$ , więc  $x \notin (V^\perp)^\perp$ , sprzeczność. Zatem wektory  $x, x_j, j \in J$ , są liniowo zależne. Korzystając z Lematu 1.5 otrzymujemy, że istnieją liczby wymierne  $\lambda_j, j \in J$ , takie, że

$$x = \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j.$$

Stwierdzenie 1.4 implikuje, że  $x \in \text{lin. hull}\{x_j : j \in J\}$ . Ponieważ  $\text{lin. hull}\{x_j : j \in J\} = V$  na mocy Stwierdzenia 1.6, więc  $x \in V$ .

STWIERDZENIE 1.11.

Podzbiór  $V$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  jest podprzestrzenią liniową wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje  $J \times I$ -macierz  $A$  taka, że

$$V = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x = 0\}.$$

UWAGA.

Jeśli  $A$  jest  $J \times I$ -macierzą, to

$$\{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x = 0\} = (\{A(j) : j \in J\})^\perp.$$

DOWÓD (STWIERDZENIA).

Jeśli

$$V = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x = 0\}$$

dla pewnej  $J \times I$ -macierzy  $A$ , to  $V$  jest podprzestrzenią liniową na mocy Lematu 1.8.

Założmy zatem, że  $V$  jest podprzestrzenią liniową. Z Lematu 1.8 wiemy, że zbiór  $V^\perp$  jest również podprzestrzenią liniową. Ustalmy wektory  $y_j$ ,  $j \in J$ , tworzące bazę podprzestrzeni  $V^\perp$ . Wtedy

$$V^\perp = \text{lin. hull}\{y_j : j \in J\}$$

na mocy Stwierdzenia 1.6. Stąd korzystając z Lematów 1.10 i 1.9 otrzymujemy, że

$$V = (V^\perp)^\perp = (\{y_j : j \in J\})^\perp. \quad \square$$

STWIERDZENIE 1.12.

(1) Jeśli  $x_j$ ,  $j \in J$ , są  $I$ -wektorami i

$$V := \text{lin. hull}\{x_j : j \in J\},$$

to  $\dim V = \text{rk } B$ , gdzie  $B$  jest  $J \times I$ -macierzą daną wzorem

$$B(j, i) := x_j(i) \quad (j \in J, i \in I).$$

(2) Jeśli  $A$  jest  $J \times I$ -macierzą i

$$V := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x = 0\},$$

to  $\dim V = |I| - \text{rk } A$ .

DOWÓD.

Algebra liniowa. □

DEFINICJA.

Podzbiór  $H$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  nazywamy PODPRZESTRZENIĄ AFINICZNĄ jeśli  $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in H$  dla wszystkich wektorów  $x_1, x_2 \in H$  oraz liczb wymiernych  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  takich, że  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ .

PRZYKŁAD.

Jeśli  $V$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to  $V$  jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ .

UWAGA.

Można pokazać, że podprzestrzeń afiniczną podprzestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  jest podprzestrzenią liniową wtedy i tylko wtedy, gdy należy do niej wektor 0.

LEMAT 1.13.

Jeśli  $H$  jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to

$$\sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j \in H$$

dla wszystkich wektorów  $x_j \in H$ ,  $j \in J$ , oraz liczb wymiernych  $\lambda_j$ ,  $j \in J$ , takich, że  $\sum_{j \in J} \lambda_j = 1$ .

DOWÓD.

Udowodnimy tezę przez indukcję ze względu na  $|J|$ . Zauważmy, że  $|J| \geq 1$ .

Założmy najpierw, że  $|J| = 1$  i ustalmy  $j_0 \in J$ . Wtedy  $\lambda_{j_0} = 1$ , więc jeśli  $x_{j_0} \in H$ , to  $\sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j = x_{j_0} \in H$ .

Założmy teraz, że  $|J| > 1$ . Ponieważ  $\sum_{j \in J} \lambda_j = 1$  i  $|J| > 1$ , więc istnieje  $j_0 \in J$  takie, że  $\lambda_{j_0} \neq 1$ . Ustalmy takie  $j_0$  i niech  $J' := J \setminus \{j_0\}$ . Ponieważ

$$\sum_{j \in J'} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_{j_0}} = 1,$$

więc

$$\sum_{j \in J'} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_{j_0}} \cdot x_j \in H$$

na mocy założenia indukcyjnego. Stąd

$$\sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j = \lambda_{j_0} \cdot x_{j_0} + (1 - \lambda_{j_0}) \cdot \sum_{j \in J'} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_{j_0}} \cdot x_j \in H. \quad \square$$

LEMAT 1.14.

Jeśli  $H_\gamma$ ,  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\Gamma \neq \emptyset$ , są podprzestrzeniami afinicznymi przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to zbiór  $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma$  jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ .

DOWÓD.

Ćwiczenie. □

WNIOSEK 1.15.

Jeśli  $X$  jest podzbiorem przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to istnieje najmniejsza podprzestrzeń afiniczna przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  zawierająca zbiór  $X$ .

DOWÓD.

Ćwiczenie. □

DEFINICJA.

Jeśli  $X$  jest podzbiorem przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to najmniejszą podprzestrzeń afiniczną przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  zawierającą zbiór  $X$ , którą oznaczamy  $\text{aff. hull } X$ , nazywamy PODPRZESTRZENIĄ AFINICZNĄ GENEROWANĄ PRZEZ ZBIÓR  $X$ .

STWIERDZENIE 1.16.

Jeśli  $x_j$ ,  $j \in J$ , są  $I$ -wektorami, to

$$\begin{aligned} \text{aff. hull}\{x_j : j \in J\} \\ = \left\{ \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j : \lambda_j \in \mathbb{Q} \text{ dla wszystkich } j \in J \text{ i } \sum_{j \in J} \lambda_j = 1 \right\}. \end{aligned}$$

DOWÓD.

Ćwiczenie. □

DEFINICJA.

Jeśli  $H$  jest niepustą podprzestrzenią afiniczną przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to definiujemy zbiór  $\text{lin. space } H$ , który nazywamy PRZESTRZENIĄ LINIOWOŚCI PODPRZESTRZENI  $H$ , wzorem

$$\text{lin. space } H := \{y \in \mathbb{Q}^I : x + y \in H \text{ dla wszystkich wektorów } x \in H\}.$$

LEMAT 1.17.

Jeśli  $V$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to

$$\text{lin. space } V = V.$$

DOWÓD.

Oczywiście  $V \subseteq \text{lin. space } V$ . Z drugiej strony, jeśli  $y \in \text{lin. space } V$ , to  $y = 0 + y \in V$ , gdyż  $0 \in V$ . □

LEMAT 1.18.

Jeśli  $H$  jest niepustą podprzestrzenią afiniczną przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to zbiór  $\text{lin. space } H$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ .

DOWÓD.

Oczywiście  $0 \in \text{lin. space } H$ . Ustalmy liczby wymierne  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  i wektory  $x_1, x_2 \in \text{lin. space } H$ . Jeśli  $x \in H$ , to

$$x + (\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) = \lambda_1 \cdot (x + x_1) + \lambda_2 \cdot (x + x_2) + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \cdot x.$$

Ponieważ  $x, x + x_1, x + x_2 \in H$  oraz

$$\lambda_1 + \lambda_2 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2) = 1,$$

więc  $x + (\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) \in H$  na mocy Lematu 1.13. Z dowolności wektora  $x$  wynika, że  $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in \text{lin. space } H$ .  $\square$

LEMAT 1.19.

Jeśli  $H$  jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  oraz  $x_1, x_2 \in H$ , to  $x_1 - x_2 \in \text{lin. space } H$ .

DOWÓD.

Ustalmy wektor  $x \in H$ . Wtedy

$$x + (x_1 - x_2) = 1 \cdot x + 1 \cdot x_1 + (-1) \cdot x_2.$$

Ponieważ  $x, x_1, x_2 \in H$  i  $1 + 1 + (-1) = 1$ , więc  $x + (x_1 - x_2) \in H$  na mocy Lematu 1.13. Z dowolności wektora  $x$  wynika, że  $x_1 - x_2 \in \text{lin. space } H$ .  $\square$

WNIOSEK 1.20.

Jeśli  $H$  jest podprzestrzenią afiniczną i  $x_0 \in H$ , to

$$H = x_0 + \text{lin. space } H.$$

DOWÓD.

Z definicji  $x_0 + \text{lin. space } H \subseteq H$ , podczas gdy z Lematu 1.19 wynika, że  $H \subseteq x_0 + \text{lin. space } H$  (dokładniej,  $(-x_0) + H \subseteq \text{lin. space } H$ ).  $\square$

DEFINICJA.

Jeśli  $H$  jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to definiujemy liczbę  $\dim H$ , którą nazywamy WYMIAREM PODPRZESTRZENI  $H$ , wzorem

$$\dim H := \begin{cases} -1 & H = \emptyset, \\ \dim \text{lin. space } H & H \neq \emptyset. \end{cases}$$

UWAGA.

Jeśli  $V$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to Lemat 1.17 implikuje, że wymiary podprzestrzeni  $V$  jako podprzestrzeni liniowej i podprzestrzeni afinicznej są takie same.

WNIOSEK 1.21.

Niech  $H$  będzie niepustym podzbiorem przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ . Wtedy  $H$  jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją  $I$ -wektor  $x_0$  oraz podprzestrzeń liniowa  $V$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  takie, że

$$H = x_0 + V.$$

Dowód.

Istnienie wektora  $x_0$  oraz podprzestrzeni  $V$  wynika natychmiast ze Wniosku 1.20. Załóżmy teraz, że  $H = x_0 + V$  dla pewnych  $I$ -wektora  $x_0$  oraz podprzestrzeni liniowej  $V$ . Pokażemy, że  $H$  jest podprzestrzenią afiniczną. Ustalmy wektory  $x_1, x_2 \in H$  oraz liczby wymierne  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  takie, że  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ . Wtedy istnieją wektory  $y_1, y_2 \in V$  takie, że

$$x_1 = x_0 + y_1 \quad \text{i} \quad x_2 = x_0 + y_2.$$

Stąd

$$\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 = x_0 + (\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2).$$

Ponieważ  $V$  jest podprzestrzenią liniową, więc  $\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 \in V$ . Stąd  $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in x_0 + V = H$ .  $\square$

WNIOSEK 1.22.

Niech  $H$  będzie niepustym podzbiorem przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ . Wtedy  $H$  jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją  $I$ -wektory  $x_0, y_j, j \in J$ , takie, że

$$H = x_0 + \text{lin. hull}\{y_j : j \in J\}.$$

Dowód.

Jeśli istnieją  $I$ -wektory  $x_0, y_j, j \in J$ , takie, że

$$H = x_0 + \text{lin. hull}\{y_j : j \in J\},$$

to zbiór  $H$  jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  na mocy Wniosku 1.21. Z drugiej strony, jeśli zbiór  $H$  jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to na mocy Wniosku 1.21 istnieją  $I$ -wektor  $x_0$  oraz podprzestrzeń liniowa  $V$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  takie, że

$$H = x_0 + V.$$

## PROGRAMOWANIE LINIOWE I CAŁKOWITOLICZBOWE

Korzystając ze Stwierdzenia 1.6 wiemy, że istnieją  $I$ -wektory  $y_j$ ,  $j \in J$ , takie, że

$$V = \text{lin. hull}\{y_j : j \in J\},$$

co kończy dowód. □

**FAKT 1.23.**

Niech  $H$  będzie podprzestrzenią afiniczną przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ . Jeśli

$$H = x_0 + V$$

dla  $I$ -wektora  $x_0$  oraz podprzestrzeni liniowej  $V$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to

$$V = \text{lin. space } H.$$

**Dowód.**

Pokażmy najpierw, że  $V \subseteq \text{lin. space } H$ . Załóżmy, że  $x \in V$  i ustalmy  $y \in H$ . Wtedy istnieje wektor  $z \in V$  taki, że  $y = x_0 + z$ . Stąd

$$y + x = x_0 + (x + z).$$

Ponieważ  $V$  jest podprzestrzenią liniową, więc  $x + z \in V$ . Stąd  $y + x \in x_0 + V = H$ . Z dowolności wektora  $y$  otrzymujemy, że  $x \in \text{lin. space } H$ .

Pokażemy teraz, że  $\text{lin. space } H \subseteq V$ . Załóżmy, że  $x \in \text{lin. space } H$ . Z definicji przestrzeni liniowości wynika, że  $x_0 + x \in H = x_0 + V$ , więc  $x \in V$ . □

**WNIOSEK 1.24.**

Jeśli  $x_0, y_j, j \in J$ , są  $I$ -wektorami i

$$H := x_0 + \text{lin. hull}\{y_j : j \in J\},$$

to  $\dim H = \text{rk } B$ , gdzie  $B$  jest  $J \times I$ -macierzą daną wzorem

$$B(j, i) := y_j(i) \quad (j \in J, i \in I).$$

**Dowód.**

Z definicji wiemy, że  $\dim H = \dim \text{lin. space } H$ . Z Faktu 1.23 wynika, że

$$\text{lin. space } H = \text{lin. hull}\{y_j : j \in J\},$$

zatem teza wynika ze Stwierdzenia 1.12(1). □

LEMAT 1.25.

Jeśli  $x_0, y_j, j \in J$ , są  $I$ -wektorami i

$$H := x_0 + \text{lin. hull}\{y_j : j \in J\},$$

to

$$H = \text{aff. hull}(\{x_0\} \cup \{x_0 + y_j : j \in J\}).$$

Dowód.

Przypomnijmy, że zbiór  $H$  jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  na mocy Wniosku 1.22. Ponieważ  $x_0 \in H$  oraz  $x_0 + y_j \in H$  dla każdego  $j \in J$ , więc

$$\text{aff. hull}(\{x_0\} \cup \{x_0 + y_j : j \in J\}) \subseteq H.$$

Założmy zatem, że  $x \in H$ . Ze Stwierdzenia 1.4 wiemy, że istnieją liczby wymierne  $\lambda_j, j \in J$ , takie, że

$$x = x_0 + \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot y_j.$$

Wtedy

$$x = \left(1 - \sum_{j \in J} \lambda_j\right) \cdot x_0 + \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot (x_0 + y_j),$$

więc  $x \in \text{aff. hull}(\{x_0\} \cup \{x_0 + y_j : j \in J\})$  na mocy Stwierdzenia 1.16.  $\square$

STWIERDZENIE 1.26.

Podzbiór  $H$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  jest podprzestrzenią afiniczną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją  $I$ -wektory  $x_j, j \in J$ , takie, że

$$H = \text{aff. hull}\{x_j : j \in J\}.$$

Dowód.

Oczywiście, jeśli  $H = \text{aff. hull}\{x_j : j \in J\}$  dla pewnych  $I$ -wektorów  $x_j, j \in J$ , to zbiór  $H$  jest podprzestrzenią afiniczną. Założmy teraz, że zbiór  $H$  jest podprzestrzenią afiniczną. Jeśli zbiór  $H$  jest pusty, to teza jest oczywista ( $J := \emptyset$ ), założmy zatem, że zbiór  $H$  jest niepusty. Z Wniosku 1.22 wiemy, że istnieją  $I$ -wektory  $x_0, y_j, j \in J$ , takie, że

$$H = x_0 + \text{lin. hull}\{y_j : j \in J\}.$$

Korzystając z Lematu 1.25 otrzymujemy wtedy, że

$$H = \text{aff. hull}(\{x_0\} \cup \{x_0 + y_j : j \in J\}),$$

co kończy dowód.  $\square$

LEMAT 1.27.

Jeśli  $x_j, j \in J$ , są  $I$ -wektorami i

$$H := \text{aff. hull}\{x_j : j \in J\},$$

to

$$H = x_{j_0} + \text{lin. hull}\{x_j - x_{j_0} : j \in J \setminus \{j_0\}\}$$

dla każdego  $j_0 \in J$ .

DOWÓD.

Ustalmy  $j_0 \in J$ . Korzystając z Wniosku 1.20 wystarczy udowodnić, że

$$\text{lin. hull}\{x_j - x_{j_0} : j \in J \setminus \{j_0\}\} = \text{lin. space } H.$$

Ponieważ zbiór  $\text{lin. space } H$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  na mocy Lematu 1.18, więc dla dowodu inkluzji

$$\text{lin. hull}\{x_j - x_{j_0} : j \in J \setminus \{j_0\}\} \subseteq \text{lin. space } H$$

wystarczy pokazać, że  $x_j - x_{j_0} \in \text{lin. space } H$  dla każdego  $j \in J \setminus \{j_0\}$ . To jest jednak prawdą na mocy Lematu 1.19.

Na zakończenie pokażemy, że

$$\text{lin. space } H \subseteq \text{lin. hull}\{x_j - x_{j_0} : j \in J \setminus \{j_0\}\}.$$

W tym celu ustalmy  $x \in \text{lin. space } H$ . Z definicji wiemy, że  $x_{j_0} + x \in H$ , zatem na mocy Stwierdzenia 1.16 istnieją liczby wymierne  $\lambda_j, j \in J$ , takie, że

$$x_{j_0} + x = \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j \quad \text{ i } \quad \sum_{j \in J} \lambda_j = 1.$$

Wtedy

$$x = \sum_{j \in J \setminus \{j_0\}} \lambda_j \cdot (x_j - x_{j_0}),$$

a więc  $x \in \text{lin. hull}\{x_j - x_{j_0} : j \in J \setminus \{j_0\}\}$  na mocy Stwierdzenia 1.4.  $\square$

STWIERDZENIE 1.28.

Jeśli  $x_j, j \in J$ , są  $I$ -wektorami i

$$H := \text{aff. hull}\{x_j : j \in J\},$$

to  $\dim H = \text{rk } B_{j_0}$  dla każdego  $j_0 \in J$ , gdzie  $B_{j_0}$  jest  $(J \setminus \{j_0\}) \times I$ -macierzą daną wzorem

$$B_{j_0}(j, i) := x_j(i) - x_{j_0}(i) \quad (j \in J \setminus \{j_0\}, i \in I).$$

Dowód.

Ustalmy  $j_0 \in J$ . Z Lematu 1.27 wiemy, że

$$H = x_{j_0} + \text{lin. hull}\{x_j - x_{j_0} : j \in J \setminus \{j_0\}\},$$

zatem teza wynika z Wniosku 1.24.  $\square$

LEMAT 1.29.

Jeśli  $A$  jest  $J \times I$ -macierzą,  $b$  jest  $J$ -wektorem i

$$H := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x = b\},$$

to podzbiór  $H$  jest podprzestrzenią afiniczną. Ponadto, jeśli  $H \neq \emptyset$ , to

$$\text{lin. space } H = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x = 0\}.$$

Dowód.

Dla dowodu pierwszej części ustalmy wektory  $x_1, x_2 \in H$  oraz liczby wymierne  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  takie, że  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ . Wtedy

$$A \cdot (\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) = \lambda_1 \cdot (A \cdot x_1) + \lambda_2 \cdot (A \cdot x_2) = \lambda_1 \cdot b + \lambda_2 \cdot b = b,$$

zatem podzbiór  $H$  jest podprzestrzenią afiniczną.

Dla dowodu równości

$$\text{lin. space } H = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x = 0\}.$$

ustalmy najpierw  $I$ -wektor  $x$  taki, że  $A \cdot x = 0$ . Aby uzasadnić, że  $x \in \text{lin. space } H$ , ustalmy wektor  $y \in H$ . Wtedy

$$A \cdot (y + x) = A \cdot y + A \cdot x = b + 0 = b,$$

a więc  $y + x \in H$ . Z dowolności wektora  $y$  wynika, że  $x \in \text{lin. space } H$ .

Założmy teraz, że  $x \in \text{lin. space } H$ . Ponieważ  $H \neq \emptyset$ , więc istnieje wektor  $y \in H$ . Z definicji przestrzeni liniowości  $y + x \in H$ . Wtedy

$$A \cdot y = A \cdot (y + x) - A \cdot x = b - b = 0,$$

co kończy dowód.  $\square$

STWIERDZENIE 1.30.

Podzbiór  $H$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  jest podprzestrzenią afiniczną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją  $J \times I$ -macierz  $A$  i  $J$ -wektor  $b$  takie, że

$$H = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x = b\}.$$

Dowód.

Jeśli

$$H = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x = b\}$$

dla  $J \times I$ -macierzy  $A$  i  $J$ -wektora  $b$ , to podzbiór  $H$  jest podprzestrzenią afiniczną na mocy Lematu 1.29. Załóżmy zatem, że podzbiór  $H$  jest podprzestrzenią afiniczną. Jeśli  $H = \emptyset$ , to teza jest oczywistą. Załóżmy zatem, że  $H \neq \emptyset$ . Wybierzmy wektor  $x_0 \in H$ . Ponieważ zbiór  $\text{lin. space } H$  jest podprzestrzenią liniową na mocy Lematu 1.18, więc na mocy Stwierdzenia 1.11 istnieje  $J \times I$ -macierz  $A$  taka, że

$$\text{lin. space } H = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x = 0\}.$$

Pokażemy, że

$$H = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x = b\},$$

gdzie  $b := A \cdot x_0$ .

Przypuśćmy najpierw, że  $x \in H$ . Ponieważ  $x - x_0 \in \text{lin. space } H$  na mocy Lematu 1.19, więc

$$A \cdot x = A \cdot (x - x_0) + A \cdot x_0 = 0 + b = b.$$

Założmy teraz, że  $x \in \mathbb{Q}^I$  i  $A \cdot x = b$ . Wtedy

$$A(x - x_0) = A \cdot x - A \cdot x_0 = b - b = 0,$$

więc  $x - x_0 \in \text{lin. space } H$ . Stąd  $x = x_0 + (x - x_0) \in H$ . □

STWIERDZENIE 1.31.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą,  $b$  jest  $J$  wektorem i

$$H := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x = b\}.$$

Jeśli  $H \neq \emptyset$ , to  $\dim H = |I| - \text{rk } A$ .

Dowód.

Z definicji

$$\dim H = \dim \text{lin. space } H.$$

Ponieważ

$$\text{lin. space } H = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x = 0\}$$

na mocy Lematu 1.29, więc teza wynika ze Stwierdzenia 1.12(2). □

DEFINICJA.

Podzbiór  $C$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  nazywamy STOŻKIEM (WYPUKŁYM), jeśli  $0 \in C$  i  $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in C$  dla wszystkich wektorów  $x_1, x_2 \in C$  oraz nieujemnych liczb wymiernych  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ .

DEFINICJA.

Podzbiór  $C$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  nazywamy STOŻKIEM WIELOŚCIENNYM, jeśli istnieje  $J \times I$ -macierz  $A$  taka, że

$$C = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq 0\}.$$

LEMAT 1.32.

Jeśli podzbiór  $C$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  jest stożkiem wielościennym, to podzbiór  $C$  jest stożkiem.

DOWÓD.

Ustalmy  $J \times I$ -macierz  $A$  taką, że

$$C = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq 0\}.$$

Ponieważ

$$A \cdot 0 = 0 \leq 0,$$

więc  $0 \in C$ . Ustalmy wektory  $x_1, x_2 \in C$  oraz liczby  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}_+$ . Wtedy

$$A \cdot (\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) = \lambda_1 \cdot (A \cdot x_1) + \lambda_2 \cdot (A \cdot x_2) \leq \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0,$$

więc  $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in C$ .

PRZYKŁAD.

Jeśli  $V$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to podzbiór  $V$  jest stożkiem wielościennym.

DOWÓD.

Wynika ze Stwierdzenia 1.11. □

LEMAT 1.33.

Jeśli  $C$  jest stożkiem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to

$$\sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j \in C$$

dla wszystkich wektorów  $x_j \in C$ ,  $j \in J$ , oraz nieujemnych liczb wymiernych  $\lambda_j$ ,  $j \in J$ .

DOWÓD.

Ćwiczenie.

□

LEMAT 1.34.

Jeśli  $C_\gamma$ ,  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\Gamma \neq \emptyset$ , są stożkami w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to zbiór  $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma$  jest stożkiem.

DOWÓD.

Ćwiczenie.

WNIOSEK 1.35.

Jeśli  $X$  jest podzbiorem przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to istnieje najmniejszy stożek w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  zawierający zbiór  $X$ .

DOWÓD.

Ćwiczenie.

□

DEFINICJA.

Jeśli  $X$  jest podzbiorem zbioru  $\mathbb{Q}^I$ , to najmniejszy stożek w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  zawierający zbiór  $X$ , którą oznaczamy  $\text{cone } X$ , nazywamy STOŻKIEM GENEROWANYM PRZEZ ZBIÓR  $X$ .

STWIERDZENIE 1.36.

Jeśli  $x_j$ ,  $j \in J$ , są  $I$ -wektorami, to

$$\text{cone}\{x_j : j \in J\} = \left\{ \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j : \lambda_j \in \mathbb{Q}_+ \text{ dla wszystkich } j \in J \right\}.$$

DOWÓD.

Ćwiczenie.

□

DEFINICJA.

Podzbiór  $C$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  nazywamy WYPUKŁYM, jeśli  $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in C$  dla wszystkich wektorów  $x_1, x_2 \in C$  oraz nieujemnych liczb wymiernych  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  takich, że  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ .

DEFINICJA.

Podzbiór  $P$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  nazywamy WIEŁOŚCIANEM, jeśli istnieją  $J \times I$ -macierz  $A$  i  $J$ -wektor  $b$  takie, że

$$P = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

LEMAT 1.37.

Jeśli podzbiór  $P$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  jest wielościanem, to podzbiór  $P$  jest wypukły.

Dowód.

Ustalmy  $J \times I$ -macierz  $A$  i  $J$ -wektor  $b$  takie, że

$$P = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Ustalmy wektory  $x_1, x_2 \in P$  oraz nieujemne liczby wymierne  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  takie, że  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ . Wtedy

$$A \cdot (\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) = \lambda_1 \cdot (A \cdot x_1) + \lambda_2 \cdot (A \cdot x_2) \leq \lambda_1 \cdot b + \lambda_2 \cdot b = b,$$

więc  $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in P$ .

PRZYKŁAD.

Jeśli  $H$  jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to podzbiór  $H$  jest wielościanem.

Dowód.

Wynika ze Stwierdzenia 1.30. □

FAKT 1.38.

Podzbiór  $C$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  jest stożkiem wielościennym wtedy i tylko wtedy, gdy jest stożkiem i wielościanem.

Dowód.

Oczywiście, jeśli podzbiór  $C$  jest stożkiem wielościennym, to jest stożkiem i wielościanem. Załóżmy zatem, że podzbiór  $C$  jest stożkiem i wielościanem. Wybierzmy  $J \times I$ -macierz  $A$  i  $J$ -wektor  $b$  takie, że

$$C = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Ponieważ  $0 \in C$ , więc  $b \geq 0$ . Gdyby istniały  $j \in J$  oraz wektor  $x_0 \in C$  takie, że  $\langle A(j), x_0 \rangle > 0$ , to ponieważ  $\lambda \cdot x_0 \in C$  dla każdej nieujemnej liczby wymiernej  $\lambda$ , więc

$$\infty = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\lambda \cdot \langle A(j), x_0 \rangle) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \langle A(j), \lambda \cdot x_0 \rangle \leq b(j),$$

sprzeczność. Stąd

$$C = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq 0\}$$

co kończy dowód. □

LEMAT 1.39.

Jeśli  $C$  jest podzbiorem wypukłym przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to

$$\sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j \in C$$

dla wszystkich wektorów  $x_j \in C$ ,  $j \in J$ , oraz nieujemnych liczb wymiernych  $\lambda_j$ ,  $j \in J$ , takich, że  $\sum_{j \in J} \lambda_j = 1$ .

Dowód.

Udowodnimy tezę przez indukcję ze względu na  $|J|$ . Zauważmy, że  $|J| \geq 1$ .

Założmy najpierw, że  $|J| = 1$  i ustalmy  $j_0 \in J$ . Wtedy  $\lambda_{j_0} = 1$ , więc jeśli  $x_{j_0} \in C$ , to  $\sum_{\lambda \in J} \lambda_j \cdot x_j = x \in C$ .

Założmy teraz, że  $|J| > 1$ . Ponieważ  $\sum_{j \in J} \lambda_j = 1$  i  $|J| > 1$ , więc istnieje  $j_0 \in J$  takie, że  $\lambda_{j_0} < 1$ . Ustalmy takie  $j_0$  i niech  $J' := J \setminus \{j_0\}$ . Ponieważ  $\frac{\lambda_j}{1-\lambda_{j_0}} \geq 0$  dla każdego  $j \in J'$  i

$$\sum_{j \in J'} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_{j_0}} = 1,$$

więc

$$\sum_{j \in J'} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_{j_0}} \cdot x_j \in C$$

na mocy założenia indukcyjnego. Stąd

$$\sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j = \lambda_{j_0} \cdot x_{j_0} + (1-\lambda_{j_0}) \cdot \sum_{j \in J'} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_{j_0}} \cdot x_j \in C. \quad \square$$

LEMAT 1.40.

Jeśli  $C_\gamma$ ,  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\Gamma \neq \emptyset$ , są podzbiorami wypukłymi przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to zbiór  $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma$  jest wypukły.

Dowód.

Ćwiczenie.  $\square$

WNIOSEK 1.41.

Jeśli  $X$  jest podzbiorem przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to istnieje najmniejszy podzbiór wypukły przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  zawierający zbiór  $X$ .

Dowód.

Ćwiczenie.  $\square$

DEFINICJA.

Jeśli  $X$  jest podzbiorem przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to najmniejszy podzbiór wypukły przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  zawierający zbiór  $X$ , którą oznaczamy  $\text{conv. hull } X$ , nazywamy ZBIOREM WYPUKŁYM GENEROWANYM PRZEZ ZBIÓR  $X$ .

STWIERDZENIE 1.42.

Jeśli  $x_j$ ,  $j \in J$ , są  $I$ -wektorami, to

$$\begin{aligned} \text{conv. hull}\{x_j : j \in J\} \\ = \left\{ \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j : \lambda_j \in \mathbb{Q}_+ \text{ dla wszystkich } j \in J \text{ i } \sum_{j \in J} \lambda_j = 1 \right\}. \end{aligned}$$

DOWÓD.

Ćwiczenie. □

DEFINICJA.

Podzbiór  $Q$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  nazywamy POLYTOPEM, jeśli istnieją  $I$ -wektory  $x_j, j \in J$ , takie, że

$$Q = \text{conv. hull}\{x_j : j \in J\}.$$

## 1.2. PODSTAWOWE TWIERDZENIE NIERÓWNOŚCI LINIOWYCH

LEMAT 1.43.

Niech  $x_j, j \in J$ , będą  $I$ -wektorami i  $x \in \text{cone}\{x_j : j \in J\}$ . Jeśli  $c \in \mathbb{Q}^I$  i  $\langle c, x_j \rangle \geq 0$  dla wszystkich  $j \in J$ , to  $\langle c, x \rangle \geq 0$ .

DOWÓD.

Na mocy Stwierdzenia 1.36 istnieją nieujemne liczby wymierne  $\lambda_j, j \in J$ , takie, że

$$x = \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j.$$

Wtedy

$$\langle c, x \rangle = \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot \langle c, x_j \rangle \geq 0. \quad \square$$

TWIERDZENIE 1.44 (PODSTAWOWE TWIERDZENIE NIERÓWNOŚCI LINIOWYCH).

Jeśli  $x_j, j \in J$ ,  $x$  są  $I$ -wektorami, to dokładnie jeden z poniższych warunków jest spełniony:

- (1) Istnieje podzbiór  $J'$  zbioru  $J$  taki, że wektory  $x_j, j \in J'$ , są liniowo niezależne i  $x \in \text{cone}\{x_j : j \in J'\}$ .
- (2) Istnieją  $I$ -wektor  $c$  oraz podzbiór  $J'$  zbioru  $J$  takie że
  - $\langle c, x \rangle < 0$ ,
  - $\langle c, x_j \rangle \geq 0$  dla wszystkich  $j \in J$ ,
  - $\langle c, x_j \rangle = 0$  dla wszystkich  $j \in J'$ ,
  - $|J'| = \dim \text{lin. hull}(\{x\} \cup \{x_j : j \in J\}) - 1$ ,
  - wektory  $x_j, j \in J'$ , są liniowo niezależne.

Dowód.

Pokażemy najpierw, że powyższe warunki wzajemnie się wykluczają. Istotnie, przypuśćmy, że  $x \in \text{cone}\{x_j : j \in J\}$ . Wtedy, jeśli  $c$  jest  $I$ -wektorem takim, że  $\langle c, x_j \rangle \geq 0$  dla każdego  $j \in J$ , to  $\langle c, x \rangle \geq 0$  na mocy Lematu 1.43.

Pokażemy teraz, że spełniony jest co najmniej jeden z powyższych warunków. Niech

$$V := \text{lin. hull}\{x_j : j \in J\}.$$

Jeśli  $x \notin V$ , to Stwierdzenie 1.11 implikuje, że istnieje  $I$ -wektor  $c$  taki, że  $\langle c, x \rangle < 0$  oraz  $\langle c, x_j \rangle = 0$  dla wszystkich  $j \in J$ . Wybierając zbiór  $J'$  tak, że wektory  $x_j, j \in J'$ , tworzą bazę podprzestrzeni  $V$ , otrzymujemy, że spełniony jest warunek (2).

Założmy zatem, że  $x \in V$ . Założmy również, że żaden z powyższych warunków nie jest spełniony. Pokażemy, że to założenie prowadzi do sprzeczności.

Ustalmy porządek liniowy  $\preceq$  w zbiorze  $J$ . Dla  $j_0 \in J$  definiujemy

$$j_0^{\leftarrow} := \{j \in J : j \prec j_0\} \quad \text{ i } \quad j_0^{\rightarrow} := \{j \in J : j \succ j_0\}.$$

Niech  $J_0$  będzie dowolnym podzbiorem zbioru  $J$  takim, że wektory  $x_j, j \in J_0$ , tworzą bazę podprzestrzeni  $V$ .

Ustalmy  $n \in \mathbb{N}$  i przypuśćmy, że podzbiór  $J_n$  taki, że wektory  $x_j, j \in J_n$ , tworzą bazę podprzestrzeni  $V$ , jest zdefiniowany. Na mocy Stwierdzeń 1.6 i 1.4 istnieją liczby wymierne  $\lambda_{n,j}, j \in J_n$ , takie, że

$$x = \sum_{j \in J_n} \lambda_{n,j} \cdot x_j.$$

Ponieważ nie jest spełniony warunek (1), więc na mocy Stwierdzenia 1.36 istnieje  $j \in J_n$  takie, że  $\lambda_{n,j} < 0$ . W szczególności, możemy zdefiniować  $j_n \in J_n$  wzorem

$$j_n := \min\{j \in J_n : \lambda_{n,j} < 0\}.$$

Wyberzmy  $I$ -wektor  $c_n$  taki, że  $\langle c_n, x_{j_n} \rangle = 1, \langle c_n, x_j \rangle = 0$  dla wszystkich  $j \in J_n \setminus \{j_n\}$ . Zauważmy, że

$$\langle c_n, x \rangle = \sum_{j \in J_n} \lambda_{n,j} \cdot \langle c_n, x_j \rangle = \lambda_{n,j_n} < 0.$$

Ponieważ warunek (2) nie jest spełniony, więc  $\langle c_n, x_j \rangle < 0$  dla pewnego  $j \in J_n$ , zatem możemy zdefiniować  $j'_n \in J$  wzorem

$$j'_n := \min\{j \in J : \langle c_n, x_j \rangle < 0\}.$$

Oczywiście  $j'_n \notin J_n$ . Kładziemy  $J_{n+1} := (J_n \setminus \{j_n\}) \cup \{j'_n\}$ . Zauważmy, że wektory  $x_j$ ,  $j \in J_{n+1}$ , tworzą bazę podprzestrzeni  $V$ , dzięki czemu możemy powyższy proces kontynuować. Ponieważ  $|J_{n+1}| = |J_n|$ , więc wystarczy pokazać, że wektory  $x_j$ ,  $j \in J_{n+1}$ , są liniowo niezależne. Przypuśćmy zatem, że istnieją liczby wymierne  $\mu_j$ ,  $j \in J_{n+1}$ , takie, że

$$\sum_{j \in J_{n+1}} \mu_j \cdot x_j = 0.$$

Wtedy

$$0 = \langle c_n, 0 \rangle = \left\langle c_n, \sum_{j \in J_{n+1}} \mu_j \cdot x_j \right\rangle = \sum_{j \in J_{n+1}} \mu_j \cdot \langle c_n, x_j \rangle = \mu_{j'_n}.$$

Stąd

$$\sum_{j \in J_{n+1} \setminus \{j'_n\}} \mu_j \cdot x_j = 0.$$

Ponieważ  $J_{n+1} \setminus \{j'_n\} = J_n \setminus \{j_n\} \subseteq J_n$  oraz wektory  $x_j$ ,  $j \in J_n$ , są liniowo niezależne, więc  $\mu_j = 0$  dla każdego  $j \in J_{n+1} \setminus \{j'_n\}$ .

Ponieważ istnieje tylko skończenie wiele podzbiorów zbioru  $J$ , więc istnieją  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  takie, że  $n_1 < n_2$  i  $J_{n_1} = J_{n_2}$ . Wybierzmy  $n_0 \in [n_1, n_2 - 1]$  takie, że

$$(*) \quad j_{n_0} = \max\{j_n : n \in [n_1, n_2 - 1]\}.$$

Ponieważ  $J_{n_1} = J_{n_2}$ , więc istnieje  $m_0 \in [n_1, n_2 - 1]$  taki, że  $j'_{m_0} = j_{n_0}$ . Jeśli  $j \in J_{n_0} \cap j_{n_0}^{\leftarrow}$ , to  $\lambda_{n_0, j} \geq 0$  (gdyż  $j \prec j_{n_0}$ ) i  $\langle c_{m_0}, x_j \rangle \geq 0$  (gdyż  $j \prec j'_{m_0}$ ). W szczególności,

$$\sum_{j \in J_{n_0} \cap j_{n_0}^{\leftarrow}} \lambda_{n_0, j} \cdot \langle c_{m_0}, x_j \rangle \geq 0.$$

Następnie,  $\lambda_{n_0, j_{n_0}} < 0$  oraz  $\langle c_{m_0}, x_{j_{n_0}} \rangle < 0$  (gdyż  $j_{n_0} = j'_{m_0}$ ), zatem

$$\lambda_{n_0, j_{n_0}} \cdot \langle c_{m_0}, x_{j_{n_0}} \rangle > 0.$$

Wreszcie, ze wzoru  $(*)$  wynika, że

$$J_{n_1} \cap j_{n_0}^{\rightarrow} \subseteq J_n \cap j_{n_0}^{\rightarrow} \subseteq J_{n_2} \cap j_{n_0}^{\rightarrow}$$

dla każdego  $n \in [n_1, n_2 - 1]$ , zatem równość  $J_{n_1} = J_{n_2}$  implikuje, że

$$J_{n_1} \cap j_{n_0}^{\rightarrow} = J_n \cap j_{n_0}^{\rightarrow}$$

dla każdego  $n \in [n_1, n_2 - 1]$ . W szczególności

$$J_{n_0} \cap j_{n_0}^{\rightarrow} = J_{n_1} \cap j_{n_0}^{\rightarrow} = J_{m_0} \cap j_{n_0}^{\rightarrow}.$$

Ponieważ  $j_{m_0} \leq j_{n_0}$  na mocy wzoru (\*), więc z wyboru wektora  $c_{m_0}$  wynika, że  $\langle c_{m_0}, x_j \rangle = 0$  dla każdego  $j \in J_{n_0} \cap j_{n_0}^{\rightarrow} = J_{m_0} \cap j_{n_0}^{\rightarrow} \subseteq J_{m_0} \setminus \{j_{m_0}\}$ . Stąd

$$\sum_{j \in J_{n_0} \cap j_{n_0}^{\rightarrow}} \lambda_{n_0, j} \cdot \langle c_{m_0}, x_j \rangle = 0.$$

W efekcie

$$\begin{aligned} 0 &> \langle c_{m_0}, x \rangle = \left\langle c_{m_0}, \sum_{j \in J_{n_0}} \lambda_{n_0, j} \cdot x_j \right\rangle \\ &= \sum_{j \in J_{n_0} \cap j_{n_0}^{\leftarrow}} \lambda_{n_0, j} \cdot \langle c_{m_0}, x_j \rangle + \lambda_{n_0, j_{n_0}} \cdot \langle c_{m_0}, x_{j_{n_0}} \rangle \\ &\quad + \sum_{j \in J_{n_0} \cap j_{n_0}^{\rightarrow}} \lambda_{n_0, j} \cdot \langle c_{m_0}, x_j \rangle > 0, \end{aligned}$$

co prowadzi do sprzeczności i kończy dowód.  $\square$

WNIOSEK 1.45 (CARATHÉODORY).

Jeśli  $x_j, j \in J$ , są  $I$ -wektorami i  $x \in \text{cone}\{x_j : j \in J\}$ , to istnieje podzbiór  $J'$  zbioru  $J$  taki, że wektory  $x_j, j \in J'$ , są liniowo niezależne oraz  $x \in \text{cone}\{x_j : j \in J'\}$ .

DOWÓD.

Przypuśćmy, że nie istnieje podzbiór  $J'$  zbioru  $J$  taki, że wektory  $x_j, j \in J'$ , są liniowo niezależne oraz  $x \in \text{cone}\{x_j : j \in J'\}$ . Na mocy Twierdzenia 1.44 istnieje  $I$ -wektor  $c$  taki, że  $\langle c, x \rangle < 0$  oraz  $\langle c, x_j \rangle \geq 0$  dla każdego  $j \in J$ . Wtedy  $x \notin \text{cone}\{x_j : j \in J\}$  na mocy Lematu 1.43, sprzeczność.  $\square$

### 1.3. STOŻKI, WIEŁOŚCIANY I POLYTOPY

LEMAT 1.46.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą i

$$V := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x = 0\}.$$

Jeśli  $c$  jest  $I$ -wektorem i  $\langle c, x \rangle = 0$  dla każdego wektora  $x \in V$ , to

$$c \in \text{lin. hull}\{A(j) : j \in J\}.$$

Dowód.

Ponieważ

$$\{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x = 0\} = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x = 0 \text{ i } \langle c, x \rangle = 0\},$$

więc

$$\dim \text{lin. hull}\{A(j) : j \in J\} = \dim \text{lin. hull}(\{A(j) : j \in J\} \cup \{c\}).$$

na mocy Stwierdzenia 1.12(2). Wykorzystując inkluzję

$$\text{lin. hull}\{A(j) : j \in J\} \subseteq \text{lin. hull}(\{A(j) : j \in J\} \cup \{c\})$$

otrzymujemy zatem, że

$$\text{lin. hull}\{A(j) : j \in J\} = \text{lin. hull}(\{A(j) : j \in J\} \cup \{c\}),$$

co kończy dowód. □

LEMAT 1.47.

Jeśli  $x_j$ ,  $j \in J$ , są  $I$ -wektorami i  $C := \text{cone}\{x_j : j \in J\}$ , to stożek  $C$  jest wielościenny.

Dowód.

Niech

$$V := \text{lin. hull}\{x_j : j \in J\}.$$

Na mocy Stwierdzenia 1.11 istnieje  $K \times I$ -macierz  $A$  taka, że

$$V = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x = 0\}.$$

Niech

$$\mathcal{J} := \{J' \subseteq J : |J'| = \dim V - 1 \\ \text{i wektory } x_j, j \in J', \text{ są liniowo niezależne}\}.$$

Jeśli  $J' \in \mathcal{J}$ , to  $I$ -wektor  $c$  nazywamy  $J'$ -krytycznym, jeśli  $\langle c, x_j \rangle = 0$  dla każdego  $j \in J'$  oraz istnieje  $j \in J$  taki, że  $\langle c, x_j \rangle \neq 0$ . Zauważmy, że dla każdego podzbioru  $J' \in \mathcal{J}$  istnieje wektor  $J'$ -krytyczny. Niech

$$\mathcal{J}_0 := \{J' \in \mathcal{J} : \text{istnieje } J'\text{-krytyczny } I\text{-wektor } c \text{ taki, że} \\ \langle c, x_j \rangle \geq 0 \text{ dla każdego } j \in J\}.$$

Dla każdego podzbioru  $J' \in \mathcal{J}_0$  ustalmy  $J'$ -krytyczny  $I$ -wektor  $c_{J'}$  taki, że  $\langle c_{J'}, x_j \rangle \geq 0$  dla każdego  $j \in J$ . Zauważmy, że

$$\text{lin. hull}\{x_j : j \in J'\} = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x = 0 \text{ i } \langle c_{J'}, x \rangle = 0\}$$

dla każdego  $J' \in \mathcal{J}_0$ . Istotnie, niech

$$V' := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x = 0 \text{ i } \langle c_{J'}, x \rangle = 0\}.$$

Oczywiście

$$\text{lin. hull}\{x_j : j \in J'\} \subseteq V'.$$

Z definicji wektora  $J'$ -krytycznego wynika, że  $V' \subset V$ , więc  $\dim V' \leq \dim V - 1$ . Ponieważ

$$\dim \text{lin. hull}\{x_j : j \in J'\} = \dim V - 1,$$

więc otrzymujemy tezę.

Niech

$$C' := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x = 0 \text{ i } \langle c_{J'}, x \rangle \geq 0 \text{ dla każdego podzbioru } J' \in \mathcal{J}_0\}.$$

Pokażemy, że  $C = C'$ . Inkluzja  $C \subseteq C'$  jest oczywista na mocy Lematu 1.43.

Założmy teraz, że  $x \in \mathbb{Q}^I \setminus C$ . Jeśli  $x \notin V$ , to oczywiście  $x \notin C'$ . Założmy zatem, że  $x \in V$ . Korzystając z Wniosku 1.45 wiemy, że  $x \notin \text{cone}\{x_j : j \in J'\}$  dla każdego podzbioru  $J \in \mathcal{J}$ . Z Twierdzenia 1.44 wynika zatem, że istnieją  $I$ -wektor  $c$  oraz podzbiór  $J' \in \mathcal{J}$  takie, że  $\langle c, x \rangle < 0$ ,  $\langle c, x_j \rangle \geq 0$  dla każdego  $j \in J$  oraz  $\langle c, x_j \rangle = 0$  dla każdego  $j \in J'$ . Wtedy  $J' \in \mathcal{J}_0$ . Z Lematu 1.46 otrzymujemy, że  $c \in \text{lin. hull}(\{c_{J'}\} \cup \{A(k) : k \in K\})$ . Ze Stwierdzenia 1.4 wynika, że istnieją liczby wymierne  $\lambda, \lambda_k, k \in K$ , takie, że

$$c = \lambda \cdot c_{J'} + \sum_{k \in K} \lambda_k \cdot A(k).$$

Wyberzmy  $j \in J$  taki, że  $\langle c_{J'}, x_j \rangle > 0$  (taki  $j$  istnieje, gdyż wektor  $c_{J'}$  jest  $J'$ -krytyczny). Ponieważ  $x_j \in V$ , więc

$$0 \leq \langle c, x_j \rangle = \lambda \cdot \langle c_{J'}, x_j \rangle + \sum_{k \in J} \lambda_k \cdot \langle A(k), x_j \rangle = \lambda \cdot \langle c_{J'}, x_j \rangle,$$

skąd  $\lambda \geq 0$ . Z drugiej strony wykorzystując założenie  $x \in V$  otrzymujemy, że

$$0 > \langle c, x \rangle = \lambda \cdot \langle c_{J'}, x \rangle + \sum_{k \in J} \lambda_k \cdot \langle A(k), x \rangle = \lambda \cdot \langle c_{J'}, x \rangle,$$

skąd  $\langle c_{J'}, x \rangle < 0$ , a więc  $x \notin C'$ . □

WNIOSEK 1.48 (FARKAS/MINKOWSKI/WEYL).

Podzbiór  $C$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  jest stożkiem wielościennym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją  $I$ -wektory  $x_j$ ,  $j \in J$ , takie, że

$$C = \text{cone}\{x_j : j \in J\}.$$

DOWÓD.

Z Lematu 1.47 wiemy, że jeśli istnieją  $I$ -wektory  $x_j$ ,  $j \in J$ , takie, że

$$C = \text{cone}\{x_j : j \in J\},$$

to stożek  $C$  jest wielościenny. Załóżmy zatem, że zbiór  $C$  jest stożkiem wielościennym. Z definicji istnieje  $K \times I$ -macierz  $A$  taka, że

$$C = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq 0\}.$$

Z Lematu 1.47 wiemy, że istnieją  $I$ -wektory  $x_j$ ,  $j \in J$ , takie, że

$$\text{cone}\{A(k) : k \in K\} = \{x \in \mathbb{Q}^I : \langle x_j, x \rangle \leq 0 \text{ dla każdego } j \in J\}.$$

Pokażemy, że  $C = \text{cone}\{x_j : j \in J\}$ . Inkluzja  $\text{cone}\{x_j : j \in J\} \subseteq C$  wynika natychmiast z Lematu 1.43. Załóżmy teraz, że  $y \in \mathbb{Q}^I \setminus \text{cone}\{x_j : j \in J\}$ . Korzystając z Lematu 1.47 wiemy, że istnieje  $I$ -wektor  $c$  taki, że  $\langle c, x_j \rangle \leq 0$  dla każdego  $j \in J$  oraz  $\langle c, y \rangle > 0$ . Pierwszy warunek implikuje, że  $c \in \text{cone}\{A(k) : k \in K\}$ , więc  $\langle c, x \rangle \leq 0$  dla wszystkich wektorów  $x \in C$  na mocy Lematu 1.43. Ponieważ  $\langle c, y \rangle > 0$ , więc oznacza to, że  $y \notin C$ , co kończy dowód.  $\square$

DEFINICJA.

Jeśli  $P$  jest niepustym wielościannem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to definiujemy podzbiór  $\text{char.cone } P$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , który nazywamy **STOŻKIEM CHARAKTERYSTYCZNYM WIELOŚCIANU**  $P$ , wzorem

$$\text{char.cone } P := \{y \in \mathbb{Q}^I : x + y \in P \text{ dla wszystkich wektorów } x \in P\}.$$

UWAGA.

Jeśli zbiór  $H$  jest niepustą podprzestrzenią afiniczną przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to

$$\text{char.cone } H = \text{lin. space } H.$$

LEMAT 1.49.

Jeśli  $P$  jest niepustym wielościannem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  oraz  $y \in \text{char.cone } P$ , to  $n \cdot y \in \text{char.cone } P$  dla każdej nieujemnej liczby całkowitej  $n$ .

Dowód.

Dowód będzie indukcyjny ze względu na  $n$ . Ponieważ  $x + 0 \cdot y = x$  dla każdego wektora  $x \in P$ , więc dla  $n = 0$  teza jest oczywista. Załóżmy zatem, że  $n > 0$  i ustalmy wektor  $x \in P$ . Z założenia indukcyjnego  $x + (n - 1) \cdot y \in P$ , więc

$$x + n \cdot y = (x + (n - 1) \cdot y) + y \in P.$$

Z dowolności wektora  $x$  wynika, że  $n \cdot y \in P$ . □

FAKT 1.50.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą,  $b$   $J$ -wektorem i

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Jeśli zbiór  $P$  jest niepusty, to

$$\text{char. cone } P = \{y \in \mathbb{Q}^I : A \cdot y \leq 0\}.$$

W szczególności, zbiór  $\text{char. cone } P$  jest stożkiem wielościanowym.

Dowód.

Niech

$$C := \{y \in \mathbb{Q}^I : A \cdot y \leq 0\}.$$

Założmy najpierw, że  $y \in C$  i ustalmy  $x \in P$ . Wtedy

$$A \cdot (x + y) = A \cdot x + A \cdot y \leq b + 0 = b,$$

więc  $x + y \in P$ . Z dowolności wektora  $x$  wynika, że  $y \in \text{char. cone } P$ .

Założmy teraz, że  $y \in \text{char. cone } P$  i wybierzmy wektor  $x \in P$ . Z Lematu 1.49 wiemy, że  $x + n \cdot y \in P$  dla każdej nieujemnej liczby całkowitej  $n$ , a więc

$$A \cdot (x + n \cdot y) \leq b$$

dla każdej nieujemnej liczby całkowitej  $n$ . Stąd

$$A \cdot y \leq \frac{1}{n} \cdot (b - A \cdot x)$$

dla każdej dodatniej liczby całkowitej  $n$ , a więc  $A \cdot y \leq 0$ , co kończy dowód. □

DEFINICJA.

Jeśli  $P$  jest niepustym wielościanem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to definiujemy podzbiór  $C_P$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I \times \mathbb{Q}$ , który nazywamy STOŻKIEM NAD WIELOŚCIANIEM  $P$ , wzorem

$$C_P := \left\{ (x, \lambda) \in \mathbb{Q}^I \times \mathbb{Q} : \right. \\ \left. \lambda = 0 \text{ i } x \in \text{char. cone } P \text{ lub } \lambda > 0 \text{ i } \frac{1}{\lambda} \cdot x \in P \right\}.$$

LEMAT 1.51.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą,  $b$   $J$ -wektorem i

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Jeśli wielościan  $P$  jest niepusty, to

$$C_P = \{(x, \lambda) \in \mathbb{Q}^I \times \mathbb{Q} : A \cdot x - \lambda \cdot b \leq 0 \text{ i } \lambda \geq 0\}.$$

W szczególności, zbiór  $C_P$  jest stożkiem wielościennym.

DOWÓD.

Niech

$$C := \{(x, \lambda) \in \mathbb{Q}^I \times \mathbb{Q} : A \cdot x - \lambda \cdot b \leq 0 \text{ i } \lambda \geq 0\}.$$

Założmy najpierw, że  $(x, \lambda) \in C_P$ . Jeśli  $\lambda = 0$ , to  $x \in \text{char. cone } P$ , więc

$$A \cdot x - \lambda \cdot b = A \cdot x \leq 0$$

na mocy Faktu 1.50. Z drugiej strony, jeśli  $\lambda \neq 0$ , to  $\lambda > 0$  i  $\frac{1}{\lambda} \cdot x \in P$ , więc

$$A \cdot x - \lambda \cdot b = \lambda \cdot \left( A \cdot \left( \frac{1}{\lambda} \cdot x \right) \right) - \lambda \cdot b \leq \lambda \cdot b - \lambda \cdot b = 0.$$

Założmy teraz, że  $(x, \lambda) \in C$ . Jeśli  $\lambda = 0$ , to

$$A \cdot x = A \cdot x - \lambda \cdot b \leq 0,$$

więc  $x \in \text{char. cone } P$  na mocy Faktu 1.50. Założmy zatem, że  $\lambda \neq 0$ . Wtedy  $\lambda > 0$  i

$$A \cdot \left( \frac{1}{\lambda} \cdot x \right) = \frac{1}{\lambda} \cdot (A \cdot x) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot b) = b,$$

zatem  $\frac{1}{\lambda} \cdot x \in P$ . □

LEMAT 1.52.

Jeśli  $P$  jest niepustym wielościanem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  oraz

$$C_P = \text{cone}\{(x_j, \lambda_j) : j \in J\}$$

dla wektorów  $x_j \in \mathbb{Q}^I$ ,  $j \in J$ , i liczb wymiernych  $\lambda_j$ ,  $j \in J$ , to

$$P = \text{conv.hull}\left\{\frac{1}{\lambda_j} \cdot x_j : j \in J \setminus J_0\right\} + \text{cone}\{x_j : j \in J_0\},$$

gdzie

$$J_0 := \{j \in J : \lambda_j = 0\}.$$

Dowód.

Niech

$$P' := \text{conv.hull}\left\{\frac{1}{\lambda_j} \cdot x_j : j \in J \setminus J_0\right\} + \text{cone}\{x_j : j \in J_0\}.$$

Założmy najpierw, że  $x \in P$ . Wtedy  $(x, 1) \in C_P$ , więc ze Stwierdzenia 1.36 wiemy, że istnieją nieujemne liczby wymierne  $\mu_j$ ,  $j \in J$ , takie, że

$$x = \sum_{j \in J} \mu_j \cdot x_j \quad \text{i} \quad 1 = \sum_{j \in J} \mu_j \cdot \lambda_j.$$

Zauważmy, że  $\lambda_j \geq 0$  dla każdego  $j \in J$ . Ponieważ

$$\sum_{j \in J \setminus J_0} \mu_j \cdot \lambda_j = 1$$

i

$$x = \sum_{j \in J \setminus J_0} \mu_j \cdot \lambda_j \cdot \left(\frac{1}{\lambda_j} \cdot x_j\right) + \sum_{j \in J_0} \mu_j \cdot x_j,$$

więc  $x \in P'$  na mocy Stwierdzeń 1.36 i 1.42.

Założmy teraz, że  $x \in P'$ . Na mocy Stwierdzeń 1.36 i 1.42 istnieją nieujemne liczby wymierne  $\mu_j$ ,  $j \in J$ , takie, że

$$\sum_{j \in J \setminus J_0} \mu_j = 1 \quad \text{i} \quad x = \sum_{j \in J \setminus J_0} \mu_j \cdot \left(\frac{1}{\lambda_j} \cdot x_j\right) + \sum_{j \in J} \mu_j \cdot x_j.$$

Wtedy

$$x = \sum_{j \in J \setminus J_0} \left(\mu_j \cdot \frac{1}{\lambda_j}\right) \cdot x_j + \sum_{j \in J} \mu_j \cdot x_j$$

i

$$1 = \sum_{j \in J \setminus J_0} \left( \mu_j \cdot \frac{1}{\lambda_j} \right) \cdot \lambda_j + \sum_{j \in J} \mu_j \cdot \lambda_j,$$

więc  $(x, 1) \in C_P$  na mocy Stwierdzenia 1.36.  $\square$

**WNIOSEK 1.53 (TWIERDZENIE O ROZKŁADZIE DLA WIEŁOŚCIANÓW).**

Podzbiór  $P$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  jest wielościanem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją polytop  $Q$  i stożek wielościenny  $C$  takie, że  $P = Q + C$ .

**Dowód.**

Przypuśćmy najpierw, że podzbiór  $P$  jest wielościanem. Jeśli  $P = \emptyset$ , to  $Q := \emptyset$  a jako stożek  $C$  możemy wziąć dowolny stożek w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ . Załóżmy zatem, że  $P \neq \emptyset$ . Z Lematu 1.51 wiemy, że zbiór  $C_P$  jest stożkiem wielościennym. Z Wniosku 1.48 wiemy zatem, że istnieją wektory  $(x_j, \lambda_j) \in \mathbb{Q}^I \times \mathbb{Q}$  takie, że

$$C_P = \text{cone}\{(x_j, \lambda_j) : j \in J\}.$$

Lemat 1.52 implikuje zatem, że  $P = Q + C$ , gdzie

$$Q := \text{conv. hull}\left\{\frac{1}{\lambda_j} \cdot x_j : j \in J \setminus J_0\right\} \quad \text{i} \quad C := \text{cone}\{x_j : j \in J_0\}.$$

Ponieważ zbiór  $C$  jest stożkiem wielościennym na mocy Wniosku 1.48, więc otrzymujemy pierwszą implikację.

Przypuśćmy teraz, że  $P = Q + C$  dla pewnych polytopu  $Q$  oraz stożka wielościennego  $C$ . Jeśli  $Q = \emptyset$ , to  $P = \emptyset$ , a więc zbiór  $P$  jest wielościanem. Załóżmy zatem, że  $Q \neq \emptyset$ . Z definicji polytopu oraz Wniosku 1.48 wynika, że istnieją  $I$ -wektory  $x_j$ ,  $j \in J$ , i  $y_k$ ,  $k \in K$ , takie, że

$$Q := \text{conv. hull}\{x_j : j \in J\} \quad \text{i} \quad C := \text{cone}\{y_k : k \in K\}.$$

Niech

$$C' := \text{cone}(\{(x_j, 1) : j \in J\} \cup \{(y_k, 0) : k \in K\}).$$

Z Wniosku 1.48 wiemy, że istnieją macierz  $L \times I$ -macierz  $A$  i  $L$ -wektor  $b$  takie, że

$$C' = \{(x, \lambda) \in \mathbb{Q}^I \times \mathbb{Q} : A \cdot x - \lambda \cdot b \leq 0 \text{ i } \lambda \geq 0\}.$$

Niech

$$P' := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Zauważmy, że wielościan  $P'$  jest niepusty. Istotnie, wybierzmy  $j_0 \in J$  (zbiór  $J$  jest niepusty, gdyż polytop  $Q$  jest niepusty). Z Lematu 1.51 wynika, że  $C' = C_{P'}$ . Z Lematu 1.52 otrzymujemy, że

$$P' = \text{conv. hull}\{x_j : j \in J\} + \text{cone}\{y_k : k \in K\} = P,$$

co kończy dowód.  $\square$

**WNIOSEK 1.54 (TWIERDZENIE O SKOŃCZONEJ BAZIE DLA POLYTOPÓW).**

Podzbiór  $Q$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  jest polytopem wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór  $Q$  jest ograniczonym wielościanem.

**Dowód.**

Założmy najpierw, że

$$Q = \text{conv. hull}\{x_j : j \in J\}$$

dla pewnych  $I$ -wektorów  $x_j$ ,  $j \in J$ , i ustalmy wektor  $x \in Q$ . Niech

$$N := \max\{\|x_j\| : j \in J\}.$$

Ze Stwierdzenia 1.42 wynika, że istnieją nieujemne liczby wymierne  $\lambda_j$ ,  $j \in J$ , takie, że

$$x = \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j \quad \text{i} \quad 1 = \sum_{j \in J} \lambda_j.$$

Wtedy

$$\|x\| \leq \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot \|x_j\| \leq \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot N = N,$$

zatem zbiór  $Q$  jest ograniczony. Ponadto  $Q = Q + \{0\}$ , więc zbiór  $Q$  jest wielościanem na mocy Wniosku 1.53, gdyż zbiór  $\{0\}$  jest stożkiem wielościennym.

Założmy teraz, że zbiór  $Q$  jest ograniczonym wielościanem. Jeśli zbiór  $Q$  jest pusty, to zbiór  $Q$  jest oczywiście polytopem. Założmy zatem, że zbiór  $Q$  jest niepusty. Z Wniosku 1.53 wiemy, że istnieją polytop  $Q'$  i stożek wielościenny  $C$  takie, że  $Q = Q' + C$ . Z założenia zbiór  $Q'$  jest niepusty. Wybierzmy wektor  $x_0 \in Q'$ . Jeśli istnieje niezerowy  $I$ -wektor  $x$  taki, że  $x \in C$ , to  $x_0 + \lambda \cdot x \in Q$  dla każdej nieujemnej liczby wymiernej  $\lambda$ . Ponieważ

$$\|x_0 + \lambda \cdot x\| \geq \lambda \cdot \|x\| - \|x_0\|,$$

więc otrzymujemy sprzeczność z założeniem ograniczoności wielościanu  $Q$ . Stąd  $C = \{0\}$ , a więc  $Q = Q'$ , zatem zbiór  $Q$  jest polytopem.  $\square$

#### 1.4. LEMAT FARKASA

WNIOSEK 1.55 (LEMAT FARKSA).

Jeśli  $A$  jest  $J \times I$ -macierzą i  $b$  jest  $J$ -wektorem, to istnieje  $I$ -wektor  $x$  taki, że  $x \geq 0$  i  $A \cdot x = b$ , wtedy i tylko wtedy, gdy  $\langle b, y \rangle \geq 0$  dla wszystkich  $J$ -wektorów  $y$  takich, że  $A^T \cdot y \geq 0$ .

Dowód.

Założmy najpierw, że istnieje  $I$ -wektor  $x$  taki, że  $x \geq 0$  i  $A \cdot x = b$ . Jeśli  $y$  jest  $J$ -wektorem takim, że  $A^T \cdot y \geq 0$ , to

$$\langle b, y \rangle = \langle A \cdot x, y \rangle = \langle x, A^T \cdot y \rangle \geq 0.$$

Założmy teraz, że nie istnieje  $I$ -wektor  $x$  taki, że  $x \geq 0$  i  $A \cdot x = b$ . Ze Stwierdzenia 1.36 wynika, że  $b \notin \text{cone}\{A^T(i) : i \in I\}$ , zatem na mocy Wniosku 1.48 istnieje  $J$ -wektor  $y$  taki, że  $\langle b, y \rangle < 0$  oraz  $\langle A^T(i), y \rangle \geq 0$  dla każdego  $i \in I$ , co kończy dowód.  $\square$

WNIOSEK 1.56.

Jeśli  $A$  jest  $J \times I$ -macierzą i  $b$  jest  $J$ -wektorem, to istnieje  $I$ -wektor  $x$  taki, że  $A \cdot x \leq b$ , wtedy i tylko wtedy, gdy  $\langle b, y \rangle \geq 0$  dla wszystkich  $J$ -wektorów  $y$  takich, że  $y \geq 0$  i  $A^T \cdot y = 0$ .

Dowód.

Niech  $I_1$  i  $I_2$  będą dwiema kopiami zbioru  $I$  (w szczególności, mamy bijekcje  $\sigma_1 : I_1 \rightarrow I$  i  $\sigma_2 : I_2 \rightarrow I$ , które indukują bijekcje  $\sigma_1 : \mathbb{Q}^{I_1} \rightarrow \mathbb{Q}^I$  i  $\sigma_2 : \mathbb{Q}^{I_2} \rightarrow \mathbb{Q}^I$ ) takimi, że zbiory  $I_1$ ,  $I_2$  i  $J$  są parami rozłączne. Niech  $L := J \cup I_1 \cup I_2$ . Definiujemy  $J \times L$ -macierz  $A'$  wzorem

$$A'(j, l) := \begin{cases} \text{Id}_J(j, l) & l \in J, \\ A(j, \sigma_1(l)) & l \in I_1, \\ -A(j, \sigma_2(l)) & l \in I_2, \end{cases} \quad (j \in J, l \in L),$$

tzn.

$$A' = \begin{bmatrix} \text{Id}_J & A & -A \end{bmatrix}.$$

Korzystając z Wniosku 1.55 wystarczy pokazać, że

- (1) istnieje  $I$ -wektor  $x$  taki, że  $A \cdot x \leq b$ , wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje  $L$ -wektor  $z$  taki, że  $z \geq 0$  i  $A' \cdot z = b$ , oraz
- (2) jeśli  $y$  jest  $J$ -wektorem, to  $y \geq 0$  i  $A^T \cdot y = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $A'^T \cdot y \geq 0$ .

Dla dowodu obserwacji (1) zauważmy, że jeśli  $x$  jest  $I$ -wektorem takim, że  $A \cdot x \leq b$ , to stosowny wektor  $z$  definiujemy wzorem

$$z(l) := \begin{cases} b(l) - \langle A(l), x(l) \rangle & l \in J, \\ \max\{x(\sigma_1(l)), 0\} & l \in I_1, \\ \max\{-x(\sigma_1(l)), 0\} & l \in I_2, \end{cases} \quad (l \in L),$$

tzn.  $z = (b - A \cdot x, \max\{x, 0\}, \max\{-x, 0\})$ . Z drugiej strony, jeśli  $z$  jest  $L$ -wektorem takim, że  $z \geq 0$  i  $A' \cdot z = b$ , to stosowny wektor  $x$  definiujemy wzorem

$$x := \sigma_1(z|_{I_1}) - \sigma_2(z|_{I_2}),$$

W obu powyższych dowodach wykorzystujemy, że

$$A' \cdot z = z|_J + A \cdot \sigma_1(z|_{I_1}) - A \cdot \sigma_2(z|_{I_2})$$

dla każdego  $L$ -wektora  $z$ .

Dla dowodu obserwacji (2) wystarczy zauważyć, że

$$\sigma_1((A'^T \cdot y)|_{I_1}) = A^T \cdot y, \quad \sigma_2((A'^T \cdot y)|_{I_2}) = -A^T \cdot y$$

i

$$(A'^T \cdot y)|_J = y$$

dla każdego  $J$ -wektora  $y$ . □

#### WNIOSEK 1.57.

Jeśli  $A$  jest  $J \times I$ -macierzą i  $b$  jest  $J$ -wektorem, to istnieje  $I$ -wektor  $x$  taki, że  $x \geq 0$  i  $A \cdot x \leq b$ , wtedy i tylko wtedy, gdy  $\langle b, y \rangle \geq 0$  dla wszystkich  $J$ -wektorów  $y$  takich, że  $y \geq 0$  i  $A^T \cdot y \geq 0$ .

#### DOWÓD.

Bez straty ogólności możemy założyć, że zbiory  $I$  i  $J$  są rozłączne. Niech  $L := J \cup I$ . Definiujemy  $J \times L$ -macierz  $A'$  wzorem

$$A'(j, l) := \begin{cases} \text{Id}_J(j, l) & l \in J, \\ A(j, l) & l \in I, \end{cases} \quad (j \in J, l \in L),$$

tzn.

$$A' = \begin{bmatrix} \text{Id}_J & A \end{bmatrix}.$$

Podobnie jak w dowodzie Wniosku 1.56 pokazujemy, że

## PROGRAMOWANIE LINIOWE I CAŁKOWITOLICZBOWE

- (1) istnieje  $I$ -wektor  $x$  taki, że  $x \geq 0$  i  $A \cdot x \leq b$ , wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje  $L$ -wektor  $z$  taki, że  $z \geq 0$  i  $A \cdot z = b$ , oraz
- (2) jeśli  $y$  jest  $J$ -wektorem, to  $y \geq 0$  i  $A^T \cdot y \geq 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $A'^T \cdot y \geq 0$ ,
- zatem teza wynika z Wniosku 1.55. □

### 1.5. DUALNOŚĆ W PROGRAMOWANIU LINIOWYM

LEMAT 1.58.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą,  $b$   $J$ -wektorem,  $c$   $I$ -wektorem,

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\} \quad \text{ i } \quad Q := \{y \in \mathbb{Q}_+^J : A^T \cdot y = c\}.$$

Jeśli

$$-\infty < \sup\{\langle c, x \rangle : x \in P\} < \infty,$$

to  $Q \neq \emptyset$ .

UMOWA.

Przez cały wykład przyjmujemy, że

$$\sup \emptyset := -\infty \quad \text{ i } \quad \inf \emptyset := \infty.$$

DOWÓD.

Ponieważ

$$\sup\{\langle c, x \rangle : x \in P\} > -\infty,$$

więc  $P \neq \emptyset$ . Wybierzmy wektor  $x_0 \in P$ . Korzystając z Wniosku 1.55 wiemy, że jeśli  $Q = \emptyset$ , to istnieje  $I$ -wektor  $x_1$  taki, że  $\langle c, x_1 \rangle < 0$  oraz  $A \cdot x_1 \geq 0$ . Wtedy  $x_0 - \lambda \cdot x_1 \in P$  dla każdej nieujemnej liczby wymiernej  $\lambda$  oraz

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \langle c, x_0 - \lambda \cdot x_1 \rangle = \infty,$$

co prowadzi do sprzeczności. □

LEMAT 1.59.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą,  $b$   $J$ -wektorem,  $c$   $I$ -wektorem,

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\} \quad \text{ i } \quad Q := \{y \in \mathbb{Q}_+^J : A^T \cdot y = c\}.$$

Jeśli

$$-\infty < \inf\{\langle y, b \rangle : y \in Q\} < \infty,$$

to  $P \neq \emptyset$ .

Dowód.

Ponieważ

$$\inf\{\langle y, b \rangle : y \in Q\} < \infty$$

więc  $Q \neq \emptyset$ . Wybierzmy wektor  $y_0 \in Q$ . Korzystając z Wniosku 1.56 wiemy, że jeśli  $P = \emptyset$ , to istnieje  $J$ -wektor  $y$  taki, że  $\langle b, y \rangle < 0$  oraz  $y \geq 0$  i  $A^T \cdot y = 0$ . Wtedy  $y_0 + \lambda \cdot y_0 \in Q$  dla każdej nieujemnej liczby wymiernej  $\lambda$  oraz

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \langle y_0 + \lambda \cdot y, b \rangle = -\infty,$$

co prowadzi do sprzeczności. □

WNIOSEK 1.60 (TWIERDZENIE O DUALNOŚCI DLA PROGRAMOWANIA LINIOWEGO).

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą,  $b$   $J$ -wektorem,  $c$   $I$ -wektorem,

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\} \quad \text{ i } \quad Q := \{y \in \mathbb{Q}_+^J : A^T \cdot y = c\}.$$

Jeśli  $P \neq \emptyset$  i  $Q \neq \emptyset$ , to

$$\max\{\langle c, x \rangle : x \in P\} = \min\{\langle y, b \rangle : y \in Q\}.$$

Dowód.

Jeśli  $x \in P$  i  $y \in Q$ , to

$$\langle c, x \rangle = \langle A^T \cdot y, x \rangle = \langle y, A \cdot x \rangle \leq \langle y, b \rangle,$$

zatem

$$\sup\{\langle c, x \rangle : x \in P\} \leq \inf\{\langle y, b \rangle : y \in Q\}.$$

Aby dokończyć dowód wystarczy zatem udowodnić, że istnieją wektory  $x \in P$  i  $y \in Q$  takie, że  $\langle c, x \rangle \geq \langle b, y \rangle$ .

Bez straty ogólności możemy założyć, że zbiory  $I$  oraz  $J$  są parami rozłączne. Niech  $I_1$  i  $I_2$  będą dwiema kopiami zbioru  $I$  oraz  $J_1$  i  $J_2$  będą dwiema kopiami zbioru  $J$  taki, że zbiory  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $J_1$  i  $J_2$  są parami rozłączne. Mamy bijekcje  $\sigma_1 : I_1 \rightarrow I$ ,  $\sigma_2 : I_2 \rightarrow I$ ,  $\tau_1 : J_1 \rightarrow J$  i  $\tau_2 : J_2 \rightarrow J$ , które indukują bijekcje  $\sigma_1 : \mathbb{Q}^{I_1} \rightarrow \mathbb{Q}^I$ ,  $\sigma_2 : \mathbb{Q}^{I_2} \rightarrow \mathbb{Q}^I$ ,  $\tau_1 : J_1 \rightarrow \mathbb{Q}^J$  i  $\tau_2 : J_2 \rightarrow \mathbb{Q}^J$ , odpowiednio. Wybierzmy  $*$   $\notin I_1 \cup I_2 \cup J_1 \cup J_2$ . Niech  $L := I \cup J$  i  $K := I_1 \cup I_2 \cup J_1 \cup J_2 \cup \{*\}$ .

Definiujemy  $K \times L$ -macierz  $A'$  wzorem

$$A'(k, l) := \begin{cases} A(l, \sigma_1(k)) & k \in I_1 \text{ i } l \in J, \\ -A(l, \sigma_2(k)) & k \in I_2 \text{ i } l \in J, \\ -\text{Id}_J(\tau_1(k), l) & k \in J_1 \text{ i } l \in J, \\ A(\tau_2(k), l) & k \in J_2 \text{ i } l \in I, \\ -c(l) & k = * \text{ i } l \in I, \\ b(l) & k = * \text{ i } l \in J, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases} \quad (k \in K, l \in L),$$

tzn.

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ 0 & -A^T \\ 0 & -\text{Id}_J \\ A & 0 \\ -c & b \end{bmatrix}.$$

Ponadto, definiujemy  $K$ -wektor  $b'$  wzorem

$$b'(k) := \begin{cases} c(\sigma_1(k)) & k \in I_1, \\ -c(\sigma_2(k)) & k \in I_2, \\ b(\tau_2(k)) & k \in J_2, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases} \quad (k \in K),$$

$b' = (c, -c, 0, b, 0)$ . Zauważmy, że istnieją wektory  $x \in P$  i  $y \in Q$  takie, że  $\langle c, x \rangle \geq \langle b, y \rangle$ , wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje  $L$ -wektor  $z$  taki, że  $A' \cdot z \leq b'$ . Korzystając z Wniosku 1.56 wystarczy zatem udowodnić, że jeśli  $s$  i  $t$  są  $I$ -wektorami,  $s, t \geq 0$ ,  $u$  i  $v$  są  $J$ -wektorami,  $u, v \geq 0$ ,  $\lambda$  jest nieujemną liczbą wymierną,

$$A^T \cdot v - \lambda \cdot c = 0 \quad \text{i} \quad A \cdot (s - t) - u + \lambda \cdot b = 0,$$

to

$$\langle c, s - t \rangle + \langle b, v \rangle \geq 0.$$

Ustalmy  $\lambda$ ,  $s$ ,  $t$ ,  $u$  i  $v$  jak wyżej. Jeśli  $\lambda > 0$ , to

$$b = \frac{1}{\lambda} \cdot (u - A \cdot (s - t)) \geq -\frac{1}{\lambda} \cdot A \cdot (s - t) \quad \text{i} \quad A^T \cdot v = \lambda \cdot c$$

więc

$$\begin{aligned}\langle b, v \rangle &\geq -\frac{1}{\lambda} \cdot \langle A \cdot (s - t), v \rangle = -\frac{1}{\lambda} \cdot \langle s - t, A^T \cdot v \rangle \\ &= -\frac{1}{\lambda} \cdot \langle s - t, \lambda \cdot c \rangle = -\langle c, s - t \rangle.\end{aligned}$$

Założmy teraz, że  $\lambda = 0$  i wybierzmy wektory  $x_0 \in P$  i  $y_0 \in Q$ . Ponieważ

$$A \cdot (s - t) = u \geq 0 \quad \text{i} \quad A^T \cdot v = 0$$

więc

$$\begin{aligned}\langle b, v \rangle &\geq \langle A \cdot x_0, v \rangle = \langle x_0, A^T \cdot v \rangle = \langle x_0, 0 \rangle = 0 \\ &\geq -\langle y_0, A^T \cdot (s - t) \rangle = -\langle A \cdot y_0, s - t \rangle = -\langle c, s - t \rangle,\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

UWAGA.

Z Twierdzenia o dualności dla programowania liniowego wynika, że jeśli zbiór  $P$  jest niepustym wielościanem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  oraz  $c$  jest  $I$ -wektorem takim, że

$$\sup\{\langle c, x \rangle : x \in P\} < \infty,$$

to istnieje wektor  $x_0 \in P$  taki, że

$$\langle c, x_0 \rangle = \max\{\langle c, x \rangle : x \in P\}.$$

TWIERDZENIE 1.61.

Niech  $A_{p,q}$  będzie  $J_p \times I_q$ -macierzą,  $p, q = 1, 2$ ,  $b_p$   $J_p$ -wektorem,  $p = 1, 2$ ,  $c_q$   $I_q$ -wektorem,  $q = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned}P &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Q}_+^{I_1} \times \mathbb{Q}_+^{I_2} : \\ &\quad A_{1,1} \cdot x_1 + A_{1,2} \cdot x_2 \leq b_1, A_{2,1} \cdot x_1 + A_{2,2} \cdot x_2 = b_2\}\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}Q &:= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{Q}_+^{J_1} \times \mathbb{Q}_+^{J_2} : \\ &\quad A_{1,1}^T \cdot y_1 + A_{2,1}^T \cdot y_2 = c_1, A_{1,2}^T \cdot y_1 + A_{2,2}^T \cdot y_2 \geq c_2\}.\end{aligned}$$

(1) Jeśli  $P \neq \emptyset$  i  $Q = \emptyset$ , to

$$\sup\{\langle c_1, x_1 \rangle + \langle c_2, x_2 \rangle : (x_1, x_2) \in P\} = \infty.$$

(2) Jeśli  $P = \emptyset$  i  $Q \neq \emptyset$ , to

$$\inf\{\langle y_1, b_1 \rangle + \langle y_2, b_2 \rangle : (y_1, y_2) \in Q\} = -\infty.$$

(3) Jeśli  $P \neq \emptyset$  i  $Q \neq \emptyset$ , to

$$\begin{aligned} \max\{\langle c_1, x_1 \rangle + \langle c_2, x_2 \rangle : (x_1, x_2) \in P\} \\ = \min\{\langle y_1, b_1 \rangle + \langle y_2, b_2 \rangle : (y_1, y_2) \in Q\}. \end{aligned}$$

Dowód.

Bez straty ogólności możemy założyć, zbiory  $I_1, I_2, J_1$  i  $J_2$  są parami rozłączne. Ustalmy kopię  $J'_2$  zbioru  $J_2$  rozłączną ze zbiorami  $J_1$  i  $J_2$  oraz bijekcję  $\tau : J'_2 \rightarrow J_2$ , która indukuje bijekcję  $\tau : \mathbb{Q}^{J'_2} \rightarrow \mathbb{Q}^{J_2}$ . Niech  $L := I_1 \cup I_2$  oraz  $K := I_2 \cup J_1 \cup J_2 \cup J'_2$ . Definiujemy  $L \times L$ -macierz  $A$  wzorem

$$A(k, l) := \begin{cases} -\text{Id}_{I_2}(k, l) & k, l \in I_2, \\ A_{p,q}(k, l) & k \in J_p, l \in I_q, p, q = 1, 2, \\ -A_{2,q}(\tau(k), l) & k \in J'_2, l \in I_q, q = 1, 2, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases} \quad (k \in K, l \in L),$$

tzn.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\text{Id}_{I_2} \\ A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ -A_{2,1} & -A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$P = \{x \in \mathbb{Q}^L : A \cdot x \leq b\},$$

gdzie  $b$  jest  $K$ -wektorem zdefiniowanym wzorem

$$b(k) := \begin{cases} b_p(k) & k \in J_p, p = 1, 2, \\ -b_2(\tau(k)) & k \in J'_2, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases} \quad (k \in K),$$

tzn.  $b = (0, b_1, b_2, -b_2)$ . Niech

$$Q' := \{y \in \mathbb{Q}_+^K : A^T \cdot y = c\},$$

gdzie  $c$  jest  $L$ -wektorem zdefiniowanym wzorem

$$c(l) := \begin{cases} c_p(l) & l \in I_p, p = 1, 2, \\ & (l \in L), \end{cases}$$

tzn.  $c = (c_1, c_2)$ .

Korzystając z Lematów 1.58 i 1.59 oraz Wniosku 1.60 wystarczy pokazać, że

$$\inf\{\langle y, b \rangle : y \in Q'\} = \inf\{\langle y_1, b_1 \rangle + \langle y_2, b_2 \rangle : (y_1, y_2) \in Q\}.$$

W tym celu definiujemy funkcję  $F : \mathbb{Q}^K \rightarrow \mathbb{Q}^{J_1} \times \mathbb{Q}^{J_2}$  wzorem

$$F(y) := (y|_{J_1}, y|_{J_2} - \tau(y|_{J'_2})) \quad (y \in \mathbb{Q}^K).$$

Łatwo sprawdzić, że  $F(Q') = Q$  oraz

$$\langle y, b \rangle = \langle y|_{J_1}, b_1 \rangle + \langle y|_{J_2} - \tau(y|_{J'_2}), b_2 \rangle$$

dla każdego  $K$ -wektora  $y$ , co kończy dowód. □

**FAKT 1.62.**

Niech  $A_{p,q}$  będzie  $J_p \times I_q$ -macierzą,  $p, q = 1, 2$ ,  $b_p$   $J_p$ -wektorem,  $p = 1, 2$ ,  $c_q$   $I_q$ -wektorem,  $q = 1, 2$ ,

$$P := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^{I_1} \times \mathbb{Q}_+^{I_2} : \\ A_{1,1} \cdot x_1 + A_{1,2} \cdot x_2 \leq b_1, A_{2,1} \cdot x_1 + A_{2,2} \cdot x_2 = b_2\}$$

i

$$Q := \{(y_1, y_2) \in \mathbb{Q}_+^{J_1} \times \mathbb{Q}^{J_2} : \\ A_{1,1}^T \cdot y_1 + A_{2,1}^T \cdot y_2 = c_1, A_{1,2}^T \cdot y_1 + A_{2,2}^T \cdot y_2 \geq c_2\}.$$

Jeśli  $(x'_1, x'_2) \in P$  i  $(y'_1, y'_2) \in Q$ , to następujące warunki są równoważne:

- (1)  $\langle c_1, x'_1 \rangle + \langle c_2, x'_2 \rangle = \max\{\langle c_1, x_1 \rangle + \langle c_2, x_2 \rangle : (x_1, x_2) \in P\}$  i  $\langle y'_1, b_1 \rangle + \langle y'_2, b_2 \rangle = \min\{\langle y_1, b_1 \rangle + \langle y_2, b_2 \rangle : (y_1, y_2) \in Q\}$ .
- (2)  $\langle c_1, x'_1 \rangle + \langle c_2, x'_2 \rangle = \langle y'_1, b_1 \rangle + \langle y'_2, b_2 \rangle$ .
- (3) Jeśli  $i \in I_2$  i  $x'_2(i) > 0$ , to

$$(A_{1,2}^T \cdot y'_1)(i) + (A_{2,2}^T \cdot y'_2)(i) = c_2(i).$$

Jeśli  $j \in J_1$  i  $y'_1(j) > 0$ , to

$$(A_{1,1} \cdot x'_1)(j) + (A_{1,2} \cdot x'_2)(j) = b_1(j).$$

Dowód.

(1)  $\Rightarrow$  (2): Z Twierdzenia 1.61 otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}\langle c_1, x'_1 \rangle + \langle c_2, x'_2 \rangle &= \max\{\langle c_1, x_1 \rangle + \langle c_2, x_2 \rangle : (x_1, x_2) \in P\} \\ &= \min\{\langle y_1, b_1 \rangle + \langle y_2, b_2 \rangle : (y_1, y_2) \in Q\} \\ &= \langle y'_1, b_1 \rangle + \langle y'_2, b_2 \rangle.\end{aligned}$$

(2)  $\Rightarrow$  (1): Oczywiście

$$\langle c_1, x'_1 \rangle + \langle c_2, x'_2 \rangle \leq \sup\{\langle c_1, x_1 \rangle + \langle c_2, x_2 \rangle : (x_1, x_2) \in P\}.$$

Z drugiej strony, korzystając z Twierdzenia 1.61 otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}\langle c_1, x'_1 \rangle + \langle c_2, x'_2 \rangle &= \langle y'_1, b_1 \rangle + \langle y'_2, b_2 \rangle \\ &\geq \inf\{\langle y_1, b_1 \rangle + \langle y_2, b_2 \rangle : (y_1, y_2) \in Q\} \\ &= \sup\{\langle c_1, x_1 \rangle + \langle c_2, x_2 \rangle : (x_1, x_2) \in P\}.\end{aligned}$$

Analogicznie pokazujemy, że

$$\langle y'_1, b_1 \rangle + \langle y'_2, b_2 \rangle = \min\{\langle y_1, b_1 \rangle + \langle y_2, b_2 \rangle : (y_1, y_2) \in Q\}.$$

(2)  $\Rightarrow$  (3): Definiujemy  $I_2$ -wektor  $c'_2$  wzorem

$$c'_2 := A_{1,2}^T \cdot y'_1 + A_{2,2}^T \cdot y'_2.$$

Zauważmy, że

$$\langle c'_2, x'_2 \rangle = \langle A_{1,2}^T \cdot y'_1, x'_2 \rangle + \langle A_{2,2}^T \cdot y'_2, x'_2 \rangle = \langle y'_1, A_{1,2} \cdot x'_2 \rangle + \langle y'_2, A_{2,2} \cdot x'_2 \rangle$$

Podobnie

$$\langle c_1, x'_1 \rangle = \langle y'_1, A_{1,1} \cdot x'_1 \rangle + \langle y'_2, A_{2,1} \cdot x'_1 \rangle.$$

W efekcie

$$\begin{aligned}\langle c'_2, x'_2 \rangle + \langle c_1, x'_1 \rangle &= \langle y'_1, A_{1,1} \cdot x'_1 + A_{1,2} \cdot x'_2 \rangle + \langle y'_2, A_{2,1} \cdot x'_1 + A_{2,2} \cdot x'_2 \rangle \\ &\leq \langle y'_1, b_1 \rangle + \langle y'_2, b_2 \rangle.\end{aligned}$$

Ustalmy  $i \in I_2$  takie, że  $x'_2(i) > 0$ . Oczywiście  $c'_2(i) \geq c_2(i)$ . Z drugiej strony

$$\begin{aligned}(c'_2(i) - c_2(i)) \cdot x'_2(i) &\leq \langle c'_2 - c_2, x'_2 \rangle = \langle c'_2, x'_2 \rangle - \langle c_2, x'_1 \rangle \\ &= \langle c'_2, x'_2 \rangle + \langle c_1, x'_1 \rangle - \langle y'_1, b_1 \rangle - \langle y'_2, b_2 \rangle \leq 0\end{aligned}$$

więc  $c'_2(i) \leq c_2(i)$ .

Analogicznie dowodzimy drugiej nierówności.

(3)  $\Rightarrow$  (2). Definiujemy zbiory  $I'_2$  i  $J'_1$  wzorami

$$I'_2 := \{i \in I_2 : x'_2(i) > 0\} \quad \text{ i } \quad J'_1 := \{j \in J_1 : y'_1(j) > 0\}.$$

Wtedy

$$\langle c_1, x'_1 \rangle + \langle c_2, x'_2 \rangle = \langle c_1, x'_1 \rangle + \langle (c_2)|_{I'_2}, (x'_2)|_{I'_2} \rangle$$

i

$$\langle y'_1, b_1 \rangle + \langle y'_2, b_2 \rangle = \langle (y'_1)|_{J'_1}, (b_1)|_{J'_1} \rangle + \langle y'_2, b_2 \rangle.$$

Z założenia

$$\begin{aligned} (c_2)|_{I'_2} &= (A_{1,2}^T)_{I'_2, J_1} \cdot y'_1 + (A_{2,2}^T)_{I'_2, J_2} \cdot y'_2 \\ &= ((A_{1,2})_{J_1, I'_2})^T \cdot y'_1 + ((A_{2,2})_{J_2, I'_2})^T \cdot y'_2 \end{aligned}$$

i

$$(b_1)|_{J'_1} = (A_{1,1})_{J'_1, I_1} \cdot x'_1 + (A_{1,2})_{J'_1, I_2} \cdot x'_2.$$

Stąd

$$\begin{aligned} \langle c_1, x'_1 \rangle + \langle (c_2)|_{I'_2}, (x'_2)|_{I'_2} \rangle &= \langle A_{1,1}^T \cdot y'_1, x'_1 \rangle + \langle A_{2,1}^T \cdot y'_2, x'_1 \rangle \\ &\quad + \langle ((A_{1,2})_{J_1, I'_2})^T \cdot y'_1, (x'_2)|_{I'_2} \rangle + \langle ((A_{2,2})_{J_2, I'_2})^T \cdot y'_2, (x'_2)|_{I'_2} \rangle \\ &= \langle y'_1, A_{1,1} \cdot x'_1 \rangle + \langle y'_2, A_{2,1} \cdot x'_1 \rangle \\ &\quad + \langle y'_1, (A_{1,2})_{J_1, I'_2} \cdot (x'_2)|_{I'_2} \rangle + \langle y'_2, (A_{2,2})_{J_2, I'_2} \cdot (x'_2)|_{I'_2} \rangle \\ &= \langle (y'_1)|_{J'_1}, (A_{1,1})_{J'_1, I_1} \cdot x'_1 \rangle + \langle y'_2, A_{2,1} \cdot x'_1 \rangle \\ &\quad + \langle (y'_1)_{J'_1}, (A_{1,2})_{J'_1, I_2} \cdot (x'_2)|_{I'_2} \rangle + \langle y'_2, (A_{2,2})_{J_2, I'_2} \cdot (x'_2)|_{I'_2} \rangle. \end{aligned}$$

Podobnie

$$\begin{aligned} \langle (y'_1)|_{J'_1}, (b_1)|_{J'_1} \rangle + \langle y'_2, b_2 \rangle &= \langle (y'_1)|_{J'_1}, (A_{1,1})_{J'_1, I_1} \cdot x'_1 \rangle + \langle (y'_1)_{J'_1}, (A_{1,2})_{J'_1, I_2} \cdot x'_2 \rangle \\ &\quad + \langle y'_2, A_{2,1} \cdot x'_1 \rangle + \langle y'_2, A_{2,2} \cdot x'_2 \rangle \\ &= \langle (y'_1)|_{J'_1}, (A_{1,1})_{J'_1, I_1} \cdot x'_1 \rangle + \langle (y'_1)_{J'_1}, (A_{1,2})_{J'_1, I_2} \cdot (x'_2)|_{I'_2} \rangle \\ &\quad + \langle y'_2, A_{2,1} \cdot x'_1 \rangle + \langle y'_2, (A_{2,2})_{J_2, I'_2} \cdot (x'_2)|_{I'_2} \rangle. \end{aligned}$$

Powyższe równości kończą dowód. □

WNIOSEK 1.63.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą,  $b$   $J$ -wektorem,  $c$   $I$ -wektorem i

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Jeśli  $x_0 \in P$ ,

$$\langle c, x_0 \rangle = \max\{\langle c, x \rangle : x \in P\}$$

i

$$J' := \{j \in J : \langle A(j), x_0 \rangle = b(j)\},$$

to istnieją nieujemne liczby wymierne  $\lambda_j$ ,  $j \in J'$ , takie, że

$$c = \sum_{j \in J'} \lambda_j \cdot A(j) \quad \text{i} \quad \langle c, x_0 \rangle = \sum_{j \in J'} \lambda_j \cdot b(j).$$

Dowód.

Niech

$$Q := \{y \in \mathbb{Q}_+^J : A^T \cdot y = c\}.$$

Z Twierdzenia 1.61 wynika, że istnieje wektor  $y_0 \in Q$  taki, że

$$\langle c, x_0 \rangle = \langle y_0, b \rangle.$$

Z Faktu 1.62 wiemy, że jeśli  $j \in J$  i  $y_0(j) > 0$ , to  $j \in J'$ . Zatem, jeśli zdefiniujemy liczby  $\lambda_j$ ,  $j \in J$ , wzorem

$$\lambda_j := y_0(j) \quad (j \in J'),$$

to

$$\sum_{j \in J'} \lambda_j \cdot A(j) = \sum_{j \in J} y_0(j) \cdot A(j) = A^T \cdot y_0 = c$$

i

$$\sum_{j \in J'} \lambda_j \cdot b(j) = \sum_{j \in J} y_0(j) \cdot b(j) = \langle y_0, b \rangle = \langle c, x_0 \rangle.$$

□

1.6. ZASTOSOWANIE: MAKSYMALNY PRZEPŁYW, MINIMALNY PRZEKRÓJ

OZNACZENIE.

Dla zbioru  $W$  wierzchołków w grafie skierowanym  $D = (V, A, s, t)$  definiujemy zbiory krawędzi  $\delta^-(W)$  i  $\delta^+(W)$  wzorami

$$\delta^-(W) := \{a \in A : s(a) \notin W \text{ i } t(a) \in W\}$$

i

$$\delta^+(W) := \{a \in A : s(a) \in W \text{ i } t(a) \notin W\}.$$

W szczególności, dla wierzchołka  $v$  grafu  $D$  definiujemy zbiory  $\delta^-(v)$  i  $\delta^+(v)$  wzorami

$$\delta^-(v) := \delta^-(\{v\}) \quad \text{i} \quad \delta^+(v) := \delta^+(\{v\}).$$

OZNACZENIE.

Jeśli  $x$  jest  $I$ -wektorem i  $I'$  jest podzbiorem zbioru  $I$ , to definiujemy liczbę wymierną  $x(I')$  wzorem

$$x(I') := \sum_{i \in I'} x(i).$$

DEFINICJA.

Jeśli  $u$  i  $v$  są różnymi wierzchołkami grafu skierowanego  $D = (V, A, s, t)$ , to PRZEPŁYWEM Z WIERZCHOŁKA  $u$  DO WIERZCHOŁKA  $v$  ( $u$ - $v$ -PRZEPŁYWEM) w grafie  $D$  nazywamy każdy  $A$ -wektor  $x$  taki, że  $x \geq 0$  i

$$x(\delta^+(w)) = x(\delta^-(w))$$

dla każdego wierzchołka  $w$  grafu  $D$  różnego do  $u$  i  $v$ . WARTOŚCIĄ przepływu  $x$  nazywamy liczbę

$$x(\delta^+(u)) - x(\delta^-(u)).$$

LEMAT 1.64.

Jeśli  $u$  i  $v$  są różnymi wierzchołkami grafu skierowanego  $D = (V, A, s, t)$  oraz  $x$  jest  $u$ - $v$ -przepływem, to

$$x(\delta^+(u)) - x(\delta^-(u)) = x(\delta^+(W)) - x(\delta^-(W))$$

dla każdego podzbioru  $W$  zbioru  $V$  takiego, że  $u \in W$  i  $v \notin W$ .

Dowód.

Wystarczy zauważyć, że

$$x(\delta^+(W)) - x(\delta^-(W)) = \sum_{w \in W} (x(\delta^+(w)) - x(\delta^-(w))). \quad \square$$

UWAGA.

Powyższy lemat implikuje w szczególności, że

$$x(\delta^+(u)) - x(\delta^-(u)) = x(\delta^-(v)) - x(\delta^+(v)),$$

gdyż

$$\delta^-(v) = \delta^+(V \setminus \{v\}) \quad \text{i} \quad \delta^+(v) = \delta^-(V \setminus \{v\}).$$

DEFINICJA.

Jeśli  $u$  i  $v$  są różnymi wierzchołkami grafu skierowanego  $D = (V, A, s, t)$ , to  $u$ - $v$ -PRZEKROJEM nazywamy każdy podzbiór  $C$  zbioru  $A$  taki, że dla każdej  $u$ - $v$ -drogi  $(u, a_1, \dots, a_n, v)$  istnieje  $i \in [1, n]$  takie, że  $a_i \in C$ .

LEMAT 1.65.

Niech  $u$  i  $v$  będą różnymi wierzchołkami grafu skierowanego  $D = (V, A, s, t)$  oraz niech  $c$  będzie  $A$ -wektorem takim, że  $c \geq 0$ . Jeśli

$$Q := \{(y, z) \in \mathbb{Q}_+^A \times \mathbb{Q}^V : y(a) \geq z(s(a)) - z(t(a)) \\ \text{dla każdej strzałki } a \in A \text{ oraz } z(u) = 1 \text{ i } z(v) = 0\},$$

to

$$\min\{\langle c, y \rangle : y \in Q\} = \min\{c(C) : C \text{ jest } u\text{-}v\text{-przekrojem w grafie } D\}.$$

Dowód.

Ustalmy najpierw  $u$ - $v$ -przekrój  $C$  i zdefiniujmy zbiór wierzchołków  $W$  wzorem

$$W := \{w \in V : \text{istnieje } u\text{-}w\text{-droga w grafie } D \setminus C\}.$$

Pokażemy, że jeśli  $y := \mathbf{e}_C$  i  $z := \mathbf{e}_W$ , to  $(y, z) \in Q$  i  $\langle c, y \rangle = c(C)$ , co zakończy dowód nierówności

$$\min\{\langle c, y \rangle : y \in Q\} \leq \min\{c(C) : C \text{ jest } u\text{-}v\text{-przekrojem w grafie } D\}.$$

Drugi z powyższych warunków jest oczywisty, więc pozostaje sprawdzić, czy  $(y, z) \in Q$ . Oczywiście  $y \geq 0$ ,  $z(u) = 1$  i  $z(v) = 0$  (w dowodzie tej ostatniej nierówności wykorzystujemy, że  $C$  jest  $u$ - $v$ -przekrojem). Ustalmy teraz krawędź  $a$  grafu  $D$ . Jeśli  $a \in C$ , to łatwo widać, że

$$y(a) = 1 \geq z(s(a)) \geq z(s(a)) - z(t(a)).$$

Założmy zatem, że  $a \notin C$ . Jeśli w grafie  $D \setminus C$  istnieje  $u$ - $z(s(a))$ -droga, to w grafie  $D \setminus C$  istnieje także  $u$ - $z(t(a))$ -droga, więc

$$y(a) = 0 = 1 - 1 = z(s(a)) - z(t(a)).$$

W przeciwnym wypadku,

$$y(a) = 0 = z(s(a)) \geq z(s(a)) - z(t(a)).$$

Dla dowodu nierówności

$$\min\{\langle c, y \rangle : y \in Q\} \geq \min\{c(C) : C \text{ jest } u\text{-}v\text{-przekrojem w grafie } D\}$$

wyberzmy wektory  $y_0 \in \mathbb{Q}^A$  i  $z_0 \in \mathbb{Q}^V$  takie, że  $(y_0, z_0) \in Q$  i

$$\langle c, y_0 \rangle = \min\{\langle c, y \rangle : (y, z) \in Q\}.$$

Niech

$$\begin{aligned} P := \{ & (x, \lambda_u, \lambda_v) \in \mathbb{Q}_+^A \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x \leq c, \\ & x(\delta^-(w)) = x(\delta^+(w)) \text{ dla każdego wierzchołka } w \in V \setminus \{u, v\}, \\ & \lambda_u = x(\delta^+(u)) - x(\delta^-(u)) \text{ i } \lambda_v = x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v))\} \end{aligned}$$

i wybierzmy  $A$ -wektor  $x_0$  oraz liczby wymierne  $\lambda'_u$  i  $\lambda'_v$  takie, że  $(x_0, \lambda'_u, \lambda'_v) \in P$  i

$$\lambda'_u = \max\{\lambda_u : (x, \lambda_u, \lambda_v) \in P\}.$$

Z Twierdzenia 1.61 wiemy, że

$$\lambda'_u = \langle c, y_0 \rangle.$$

Definiujemy podzbiór  $C$  zbioru  $A$  wzorem

$$C := \{a \in A : z_0(s(a)) \geq 1 \text{ i } z_0(t(a)) < 1\}.$$

Zauważmy, że  $C = \delta^+(W)$ , gdzie

$$W := \{w \in V : z_0(w) \geq 1\}.$$

Ponieważ  $z_0(u) = 1$  i  $z_0(v) = 0$ , więc zbiór  $C$  jest  $u$ - $v$ -przekrojem oraz  $u \in W$  i  $v \notin W$ . Jeśli  $a \in C$ , to

$$y_0(a) \geq z_0(s(a)) - z_0(t(a)) > 0,$$

więc  $x_0(a) = c(a)$  na mocy Faktu 1.62. Z drugiej strony, jeśli  $a \in \delta^-(W)$ , to

$$y_0(a) + z_0(t(a)) - z_0(s(a)) > 0 + 1 - 1 = 0,$$

więc  $x(a) = 0$  na mocy Faktu 1.62. Zatem

$$c(C) = x_0(C) = x_0(\delta^+(W)) - x_0(\delta^-(W)).$$

Korzystając z Lematu 1.64 otrzymujemy, że

$$c(C) = x_0(\delta^+(u)) - x_0(\delta^-(u)) = \lambda'_u = \langle c, y_0 \rangle,$$

co kończy dowód.  $\square$

**Twierdzenie 1.66** (Twierdzenie o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju).

Niech  $u$  i  $v$  będą różnymi wierzchołkami grafu skierowanego  $D = (V, A, s, t)$ . Jeśli  $c$  jest  $A$ -wektorem takim, że  $c \geq 0$ , to

$$\begin{aligned} \max\{x(\delta^+(u)) - x(\delta^-(u)) : x \text{ jest } u\text{-}v\text{-przepływem takim, że } x \leq c\} \\ = \min\{c(C) : \text{zbiór } C \text{ jest } u\text{-}v\text{-przekrojem w grafie } D\}. \end{aligned}$$

**Dowód.**

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \max\{x(\delta^+(u)) - x(\delta^-(u)) : x \text{ jest } u\text{-}v\text{-przepływem takim, że } x \leq c\} \\ = \max\{\lambda_u : (x, \lambda_u, \lambda_v) \in P\}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} P := \{(x, \lambda_u, \lambda_v) \in \mathbb{Q}_+^A \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x \leq c, \\ x(\delta^-(w)) = x(\delta^+(w)) \text{ dla każdego wierzchołka } w \in V \setminus \{u, v\}, \\ \lambda_u = x(\delta^+(u)) - x(\delta^-(u)) \text{ i } \lambda_v = x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v))\} \end{aligned}$$

Z Twierdzenia 1.61 wiemy, że

$$\max\{\lambda_u : (x, \lambda_u, \lambda_v) \in P\} = \min\{\langle c, y \rangle : y \in Q\},$$

gdzie

$$\begin{aligned} Q := \{(y, z) \in \mathbb{Q}_+^A \times \mathbb{Q}^V : y(a) \geq z(s(a)) - z(t(a)) \\ \text{dla każdej strzałki } a \in A \text{ oraz } z(u) = 1 \text{ i } z(v) = 0\}. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\min\{\langle c, y \rangle : y \in Q\} = \min\{c(C) : C \text{ jest } u\text{-}v\text{-przekrojem w grafie } D\}$$

na mocy Lematu 1.65, to kończy dowód.  $\square$

## 2. STRUKTURA WIEŁOŚCIANÓW

### 2.1. UKŁADY ZREDUKOWANE

DEFINICJA.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą i niech  $b$  będzie  $J$ -wektorem. Parę  $(A, b)$  nazywamy ZREDUKOWANĄ, jeśli

$$\{x \in \mathbb{Q}^I : A_{J', I} \cdot x \leq b|_{J'}\} \neq \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}$$

dla każdego właściwego podzbioru  $J'$  zbioru  $J$ .

OZNACZENIE.

Jeśli  $A$  jest  $J \times I$ -macierzą,  $b$  jest  $J$ -wektorem i

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\},$$

to definiujemy podzbiory  $E(A, b)$  i  $F(A, b)$  zbioru  $J$  wzorami

$$E(A, b) := \{j \in J : \langle A(j), x \rangle = b(j) \text{ dla wszystkich wektorów } x \in P\}$$

oraz

$$F(A, b) := J \setminus E(A, b).$$

FAKT 2.1.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą, niech  $b$  będzie  $J$ -wektorem i

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Jeśli  $F(A, b) \neq \emptyset$ , to istnieje wektor  $x \in P$  taki, że

$$\langle A(j), x \rangle < b(j)$$

dla każdego indeksu  $j \in F(A, b)$ .

DOWÓD.

Bezpośrednio z definicji wynika, że dla każdego indeksu  $j \in F(A, b)$  istnieje wektor  $x_j \in P$  taki, że  $\langle A(j), x_j \rangle < b(j)$ . Wtedy teza zachodzi dla wektora  $x$  zdefiniowanego wzorem

$$x := \frac{1}{|F(A, b)|} \cdot \sum_{j \in F(A, b)} x_j. \quad \square$$

## 2.2. STOŻEK CHARAKTERYSTYCZNY I WYMIAR

### LEMAT 2.2.

Jeśli  $P$  jest niepustym wielościanem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to

$$\text{char. cone } P = \{y \in \mathbb{Q}^I : x + \lambda \cdot y \in P \text{ dla wszystkich wektorów } x \in P \text{ oraz nieujemnych liczb wymiernych } \lambda\}.$$

### DOWÓD.

Niech

$$C := \{y \in \mathbb{Q}^I : x + \lambda \cdot y \in P \text{ dla wszystkich wektorów } x \in P \text{ oraz nieujemnych liczb wymiernych } \lambda\}.$$

Inkluzja  $C \subseteq \text{char. cone } P$  jest oczywista. Dla dowodu inkluzji  $\text{char. cone } P \subseteq C$  wybierzmy macierz  $J \times I$ -macierz  $A$  i  $J$ -wektor  $b$  takie, że

$$P = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Ustalmy wektory  $y \in \text{char. cone } P$  i  $x \in P$  oraz nieujemną liczbę wymierną  $\lambda$ . Wiemy, że  $A \cdot x \leq b$  i (wobec Faktu 1.50)  $A \cdot y \leq 0$ . Stąd

$$A \cdot (x + \lambda \cdot y) = A \cdot x + \lambda \cdot (A \cdot y) \leq b + \lambda \cdot 0 = b,$$

zatem  $x + \lambda \cdot y \in P$ . Z dowolności wektora  $x$  i liczby  $\lambda$  wynika, że  $y \in C$ .  $\square$

### FAKT 2.3.

Jeśli  $P$  jest niepustym wielościanem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to

$$\text{char. cone } P = \{y \in \mathbb{Q}^I : \text{istnieje wektor } x \in P \text{ taki, że } x + \lambda \cdot y \in P \text{ dla wszystkich nieujemnych liczb wymiernych } \lambda\}.$$

### DOWÓD.

Niech

$$C := \{y \in \mathbb{Q}^I : \text{istnieje wektor } x \in P \text{ taki, że } x + \lambda \cdot y \in P \text{ dla wszystkich nieujemnych liczb wymiernych } \lambda\}.$$

Inkluzja  $\text{char. cone } P \subseteq C$  wynika natychmiast z Lematu 2.2.

Dla dowodu inkluzji  $C \subseteq \text{char. cone } P$  wybierzmy  $J \times I$ - macierz  $A$  i  $J$ -wektor  $b$  takie, że

$$P = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Jeśli  $y \in \mathbb{Q}^I \setminus \text{char. cone } P$ , to korzystając z Faktu 1.50 otrzymujemy, że istnieje indeks  $j \in J$  taki, że  $\langle A(j), y \rangle > 0$ . Wtedy

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \langle A(j), x + \lambda \cdot y \rangle = \infty$$

dla każdego wektora  $x \in \mathbb{Q}^I$ . W szczególności, dla każdego wektora  $x \in P$  istnieje nieujemna liczba wymierna  $\lambda$  taka, że

$$\langle A(j), x + \lambda \cdot y \rangle > b(j).$$

Stąd dla każdego wektora  $x \in P$  istnieje nieujemna liczba wymierna  $\lambda$  taka, że  $x + \lambda \cdot y \notin P$ , zatem  $y \notin C$ .  $\square$

FAKT 2.4.

Niech  $P$  będzie niepustym wielościanem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ . Jeśli  $P = Q + C$  dla polytopu  $Q$  oraz stożka wielościennego  $C$ , to  $C = \text{char. cone } P$ .

DOWÓD.

Inkluzja  $C \subseteq \text{char. cone } P$  jest oczywista. Dla dowodu inkluzji  $\text{char. cone } P \subseteq C$  wybierzmy  $J \times I$ -macierz  $A$  taką, że

$$C = \{y \in \mathbb{Q}^I : A \cdot y \leq 0\},$$

i załóżmy, że  $y \in \mathbb{Q}^I \setminus C$ . Wtedy istnieje indeks  $j \in J$  taki, że  $\langle A(j), y \rangle > 0$ . W konsekwencji

$$(*) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \langle A(j), x + \lambda \cdot y \rangle = \infty$$

dla każdego wektora  $x \in P$ . Z drugiej strony, ponieważ zbiór  $Q$  jest polytopem, więc istnieje liczba wymierna  $\beta$  taka, że  $\langle A(j), x \rangle \leq \beta$  dla wszystkich wektorów  $x \in Q$ . Wykorzystując równość  $P = Q + C$  otrzymujemy zatem, że  $\langle A(j), x \rangle \leq \beta$  dla wszystkich wektorów  $x \in P$ . W połączeniu z równością  $(*)$  oznacza to, że dla każdego wektora  $x \in P$  istnieje nieujemna liczba wymierna  $\lambda$  taka, że  $x + \lambda \cdot y \notin P$ . Wykorzystując Fakt 2.3 otrzymujemy, że  $y \notin \text{char. cone } P$ .  $\square$

WNIOSEK 2.5.

Jeśli  $C$  jest stożkiem wielościnnym, to  $\text{char. cone } C = C$ .

DOWÓD.

Wiemy, że  $C = 0 + C$  oraz zbiór  $0$  jest polytopem, więc teza wynika natychmiast z Faktu 2.4.  $\square$

FAKT 2.6.

Jeśli  $P$  jest niepustym wielościanem, to wielościan  $P$  jest polytopem wtedy i tylko wtedy, gdy  $\text{char. cone } P = 0$ .

Dowód.

Przypuśćmy najpierw, że wielościan  $P$  jest polytopem. Ponieważ  $P = P + 0$ , więc  $\text{char. cone } P = 0$  na mocy Faktu 2.4.

Założmy teraz, że  $\text{char. cone } P = 0$ . Z Wniosku 1.53 wiemy, że  $P = Q + C$  dla pewnych polytopu  $Q$  oraz stożka wielościennego  $C$ . Z Faktu 2.4 wynika, że  $C = \text{char. cone } P = 0$ , zatem  $P = Q + 0 = Q$ , a więc wielościan  $P$  jest polytopem.  $\square$

DEFINICJA.

Jeśli  $P$  jest niepustym wielościanem, to definiujemy podzbiór lin. space  $P$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , który nazywamy PRZESTRZENIĄ LINIOWOŚCI WIELOŚCIANU  $P$ , wzorem

$$\text{lin. space } P := \text{char. cone } P \cap (-\text{char. cone } P).$$

UWAGA.

Jeśli  $H$  jest niepustą podprzestrzenią afiniczną, to

$$\text{char. cone } H = -\text{char. cone } H.$$

Dowód.

Z Lematu 1.18 wynika, że zbiór  $\text{char. cone } H$  jest podprzestrzenią liniową, co kończy dowód.  $\square$

FAKT 2.7.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą, niech  $b$  będzie  $J$ -wektorem i

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Jeśli  $P \neq \emptyset$ , to

$$\text{lin. space } P = \{y \in \mathbb{Q}^I : A \cdot y = 0\}.$$

W szczególności, zbiór  $\text{lin. space } P$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ .

Dowód.

Pierwsza część wynika natychmiast z Faktu 1.50. Dla dowodu drugiej części korzystamy ze Stwierdzenia 1.11.  $\square$

WNIOSEK 2.8.

Jeśli  $P$  jest niepustym wielościanem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to

$$\text{lin. space } P = \{y \in \mathbb{Q}^I : x + \lambda \cdot y \in P \text{ dla wszystkich}$$

$$\begin{aligned} & \text{wektorów } x \in P \text{ oraz liczb wymiernych } \lambda \} \\ & = \{y \in \mathbb{Q}^I : \text{istnieje wektor } x \in P \text{ taki, że} \\ & \quad x + \lambda \cdot y \in P \text{ dla wszystkich liczb wymiernych } \lambda\}. \end{aligned}$$

Dowód.

Powyższe równości wynikają natychmiast z Lematu 2.2 oraz Faktu 2.3, odpowiednio.  $\square$

LEMAT 2.9.

Niech  $P$  będzie wielościanem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ . Jeśli  $V$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  i  $P \cap V \neq \emptyset$ , to

$$\text{lin. space}(P \cap V) = (\text{lin. space } P) \cap V.$$

Dowód.

Udowodnimy najpierw, że  $\text{lin. space}(P \cap V) \subseteq (\text{lin. space } P) \cap V$ . Załóżmy, że  $y \in \text{lin. space}(P \cap V)$ , i wybierzmy wektor  $x \in P \cap V$ . Wtedy  $x + \lambda \cdot y \in P \cap V$  dla każdej liczby wymiernej  $\lambda$  na mocy Wniosku 2.8. W szczególności  $y \in \text{lin. space } P$  na mocy Wniosku 2.8. Ponadto  $y = (x + y) - x$ , więc  $y \in V$ , gdyż  $x + y, x \in V$  i zbiór  $V$  jest podprzestrzenią liniową.

Założmy teraz, że  $y \in (\text{lin. space } P) \cap V$ , i ustalmy wektor  $x \in P \cap V$ . Ponieważ  $x \in P$  i  $y \in \text{lin. space } P$ , więc  $x + y, x - y \in P$ . Ponadto, z warunku  $x, y \in V$  wynika, że  $x + y, x - y \in V$ . Ostatecznie,  $x + y, x - y \in P \cap V$ , a więc  $y \in \text{lin. space}(P \cap V)$ .  $\square$

DEFINICJA.

Niepusty wielościan  $P$  nazywamy OSTRYM, jeśli  $\text{lin. space } P = 0$ .

STWIERDZENIE 2.10.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą, niech  $b$  będzie  $J$ -wektorem i

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Jeśli  $P \neq \emptyset$ , to wielościan  $P$  jest ostry wtedy i tylko wtedy, gdy  $\text{rk } A = |I|$ .

Dowód.

Z Faktu 2.7 wiemy, że

$$\text{lin. space } P = \{y \in \mathbb{Q}^I : A \cdot y = 0\}.$$

Ponieważ,  $\text{lin. space } P = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\dim \text{lin. space } P = 0$ , więc teza wynika ze Stwierdzenia 1.12(2).  $\square$

LEMAT 2.11.

Jeśli  $P$  jest niepustym polytopem, to wielościan  $P$  jest ostry.

DOWÓD.

Z Faktu 2.6 wiemy, że  $\text{char. cone } P = 0$ , co kończy dowód.  $\square$

LEMAT 2.12.

Jeśli  $P$  jest niepustym wielościanem, to

$$\text{lin. space}(\text{char. cone } P) = \text{lin. space } P.$$

W szczególności, wielościan  $P$  jest ostry wtedy i tylko wtedy, gdy stożek  $\text{char. cone } P$  jest wielościanem ostrym.

DOWÓD.

Ponieważ zbiór  $\text{char. cone } P$  jest stożkiem wielościennym na mocy Faktu 1.50, więc

$$\text{char. cone}(\text{char. cone } P) = \text{char. cone } P,$$

na mocy Wniosku 2.5, co kończy dowód.  $\square$

LEMAT 2.13.

Jeśli  $P$  jest niepustym wielościanem, to

$$P = P \cap (\text{lin. space } P)^\perp + \text{lin. space } P.$$

DOWÓD.

Oczywiście  $P \cap (\text{lin. space } P)^\perp \subseteq P$ , więc

$$P \cap (\text{lin. space } P)^\perp + \text{lin. space } P \subseteq P.$$

Z drugiej strony, jeśli  $x \in P$ , to istnieją wektory  $x_1 \in (\text{lin. space } P)^\perp$  i  $x_2 \in \text{lin. space } P$  takie, że  $x = x_1 + x_2$ . Ponieważ  $x \in P$  i  $x_2 \in \text{lin. space } P$ , więc  $x_1 = x - x_2 \in P$ , co kończy dowód.  $\square$

WNIOSEK 2.14.

Jeśli  $P$  jest niepustym wielościanem, to wielościan  $P \cap (\text{lin. space } P)^\perp$  jest ostry.

DOWÓD.

Zauważmy, że Lemat 2.13 implikuje, iż  $P \cap (\text{lin. space } P)^\perp \neq \emptyset$ . Korzystając z Lematu 2.9 mamy, że

$$\text{lin. space}(P \cap (\text{lin. space } P)^\perp) = (\text{lin. space } P) \cap (\text{lin. space } P)^\perp = 0,$$

co kończy dowód.  $\square$

FAKT 2.15.

Niech  $P$  będzie niepustym wielościanem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ .

- (1) Istnieją przestrzeń liniowa  $V$  oraz wielościan ostry  $Q$  zwarty w przestrzeni  $V^\perp$  takie, że  $P = Q + V$ .
- (2) Jeśli  $P = Q + V$  dla podprzestrzeni liniowej  $V$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  oraz wielościanu ostrego  $Q$  zwanego w przestrzeni  $V^\perp$ , to

$$Q = P \cap (\text{lin. space } P)^\perp \quad \text{ i } \quad V = \text{lin. space } P.$$

Dowód.

- (1) Niech

$$Q := P \cap (\text{lin. space } P)^\perp \quad \text{ i } \quad V := \text{lin. space } P.$$

Wtedy  $P = Q + V$  na mocy Lematu 2.13. Ponadto zbiór  $V$  jest podprzestrzenią liniową przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  na mocy Faktu 2.7 oraz zbiór  $Q$  jest wielościanem ostrym na mocy Wniosku 2.14.

- (2) Przypuśćmy, że  $P = Q + V$  dla podprzestrzeni liniowej  $V$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  oraz wielościanu ostrego  $Q$  zawartego w  $V^\perp$ .

Pokażemy najpierw, że  $P \cap V^\perp = Q$ . Inkluzja  $Q \subseteq P \cap V^\perp$  jest oczywista. Załóżmy zatem, że  $x \in P \cap V^\perp$ . Wtedy istnieją wektory  $x_1 \in Q$  i  $x_2 \in V$  takie, że  $x = x_1 + x_2$ . Ponieważ  $x_2 = x - x_1$  i  $x, x_1 \in V^\perp$ , więc  $x_2 \in V^\perp$ , gdyż zbiór  $V^\perp$  jest podprzestrzenią liniową na mocy Lematu 1.8. Stąd  $x_2 \in V \cap V^\perp = 0$ , a więc  $x = x_1 \in Q$ .

Pokażemy teraz, że  $\text{lin. space } P = V$ . Inkluzja  $V \subseteq \text{lin. space } P$  wynika natychmiast z równości  $P = Q + V$ . Z drugiej strony, załóżmy, że  $y \in \text{lin. space } P$ . Wtedy istnieją wektory  $y_1 \in V$  i  $y_2 \in V^\perp$  takie, że  $y = y_1 + y_2$ . Jeśli  $x \in Q$  i  $\lambda \in \mathbb{Q}$ , to  $x + \lambda \cdot y_2 \in V^\perp$ . Jednocześnie,  $y_2 = y - y_1 \in \text{lin. space } P$ , więc  $x + \lambda \cdot y_2 \in P$ . Stąd  $x + \lambda \cdot y_2 \in P \cap V^\perp$ , więc korzystając z dowolności wektora  $x$  i liczby  $\lambda$  wynika, że  $y_2 \in \text{lin. space } Q = 0$  na mocy Wniosku 2.8. Ostatecznie  $y = y_1 \in V$ , co kończy dowód.  $\square$

FAKT 2.16.

Jeśli  $A$  jest  $J \times I$ -macierzą,  $b$  jest  $J$ -macierzą i

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\},$$

to

$$\text{aff. hull } P = \{x \in \mathbb{Q}^I : A_{E(A,b),I} \cdot x = b|_{E(A,b)}\}.$$

Dowód.

Niech

$$H := \{x \in \mathbb{Q}^I : A_{E(A,b),I} \cdot x = b|_{E(A,b)}\}.$$

Ponieważ zbiór  $H$  jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  na mocy Stwierdzenia 1.30, więc inkluzja  $\text{aff.hull } P \subseteq H$  jest oczywista. Załóżmy teraz, że  $x \in H$ . Jeśli  $x \in P$ , to oczywiście  $x \in \text{aff.hull } P$ . Załóżmy zatem, że  $x \notin P$ . To w szczególności oznacza, że  $F(A, b) \neq \emptyset$ , więc z Faktu 2.1 wynika, że istnieje wektor  $y \in P$  taki, że  $\langle A(j), y \rangle < b(j)$  dla każdego indeksu  $j \in F(A, b)$ . Wtedy istnieje dodatnia liczba wymierna  $\lambda$  taka, że jeśli

$$z := \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y,$$

to  $z \in P$ . Istotnie, wystarczy, aby dla każdego indeksu  $j \in F(A, b)$  liczba  $\lambda$  spełniała warunek

$$\langle A(j), x - y \rangle \cdot \lambda \leq b(j) - \langle A(j), y \rangle,$$

co jest możliwe, gdyż

$$b(j) - \langle A(j), y \rangle > 0$$

dla każdego indeksu  $j \in F(A, b)$ . Ponieważ

$$x = \frac{1}{\lambda} \cdot z + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \cdot y,$$

więc  $x \in \text{aff.hull } P$ . □

DEFINICJA.

Jeśli  $P$  jest wielościanem, to definiujemy liczbę  $\dim P$ , którą nazywamy WYMIAREM WIELOŚCIANU  $P$ , wzorem

$$\dim P = \dim \text{aff.hull } P.$$

FAKT 2.17.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą, niech  $b$  będzie  $J$ -wektorem i

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Jeśli  $P \neq \emptyset$ , to

$$\dim P = |I| - \text{rk } A_{E(A,b), I}.$$

DOWÓD.

Z Faktu 2.16 wiemy, że

$$\text{aff.hull } P = \{x \in \mathbb{Q}^I : A_{E(A,b)} \cdot x = b|_{E(A,b)}\},$$

zatem teza wynika natychmiast ze Stwierdzenia 1.31 (zauważmy, że założenie  $P \neq \emptyset$  implikuje, że  $\text{aff.hull } P \neq \emptyset$ ). □

### 2.3. ŚCIANY WIEŁOŚCIANÓW

DEFINICJA.

Jeśli  $P$  jest wielościanem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to ŚCIANĄ WIEŁOŚCIANU  $P$  nie-pusty każdy podzbiór  $F$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  taki, że

$$F = \{x \in P : \langle c, x \rangle = \max\{\langle c, x' \rangle : x' \in P\}\}$$

dla pewnego  $I$ -wektora  $c$ .

FAKT 2.18.

Jeśli  $F$  jest ścianą wielościanu  $P$  w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to zbiór  $F$  jest wielościanem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ .

DOWÓD.

Oczywiste. □

LEMAT 2.19.

Jeśli  $F$  jest ścianą wielościanu  $P$ , to  $\text{lin. space } F \subseteq \text{lin. space } P$ .

DOWÓD.

Ustalmy wektor  $y \in \text{lin. space } F$ . Z Wniosku 2.8 wiemy, że istnieje wektor  $x_0 \in F$  taki, że  $x_0 + \lambda \cdot y \in F$  dla każdej liczby wymiernej  $\lambda$ . Ponieważ  $F \subseteq P$ , więc korzystając ponownie z Wniosku 2.8 otrzymujemy, że  $y \in \text{lin. space } P$ . □

FAKT 2.20.

Jeśli  $P$  jest wielościanem ostrym, to każda ściana wielościanu  $P$  jest wielościanem ostrym.

DOWÓD.

Ustalmy ścianę  $F$  wielościanu  $P$ . Z Faktu 2.18 wiemy, że zbiór  $F$  jest wielościanem. Z definicji zbiór  $F$  jest niepusty. Wreszcie, z Lematu 2.19 wynika, że  $\text{lin. space } F \subseteq \text{lin. space } P = \{0\}$ , co kończy dowód. □

LEMAT 2.21.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą, niech  $b$  będzie  $J$ -wektorem i

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Jeśli  $J'$  jest podzbiorem zbioru  $J$  oraz

$$F := \{x \in P : A_{J', I} \cdot x = b|_{J'}\},$$

to

$$F = \{x \in P : \langle c, x \rangle = \delta\},$$

gdzie

$$c := \sum_{j \in J'} A(j) \quad \text{i} \quad \delta := \sum_{j \in J'} b(j).$$

Ponadto, jeśli  $F \neq \emptyset$ , to

$$\delta = \max\{\langle c, x' \rangle : x' \in P\}.$$

W szczególności, jeśli  $F \neq \emptyset$ , to zbiór  $F$  jest ścianą wielościanu  $P$ .

Dowód.

Oczywistym jest, że jeśli  $x \in P$ , to

$$\langle c, x \rangle = \sum_{j \in J'} \langle A(j), x \rangle \leq \sum_{j \in J'} b(j) = \delta.$$

Ponadto, jeśli  $x \in F$ , to podobny rachunek pokazuje, że  $\langle c, x \rangle = \delta$ . Wreszcie, jeśli  $x \in P \setminus F$ , to istnieje indeks  $j \in J'$  taki, że  $\langle A(j), x \rangle < b(j)$ , zatem analogicznie jak powyżej pokazujemy, że  $\langle c, x \rangle < \delta$ .  $\square$

FAKT 2.22.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą, niech  $b$  będzie  $J$ -wektorem i

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Jeśli  $F$  jest niepustym podzbiorem przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to zbiór  $F$  jest ścianą wielościanu  $P$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podzbiór  $J'$  zbioru  $J$  taki, że

$$F = \{x \in P : A_{J',I} \cdot x = b|_{J'}\}.$$

Dowód.

Jeśli istnieje podzbiór  $J'$  zbioru  $J$  taki, że

$$F = \{x \in P : A_{J',I} \cdot x = b|_{J'}\},$$

to z Lematu 2.21 natychmiast wynika, że zbiór  $F$  jest ścianą wielościanu  $P$ .

Założmy zatem, że zbiór  $F$  jest ścianą wielościanu  $P$ . Wybierzmy  $I$ -wektor  $c$  taki, że

$$F = \{x \in P : \langle c, x \rangle = \max\{\langle c, x' \rangle : x' \in P\}\}.$$

Niech

$$\delta := \max\{\langle c, x' \rangle : x' \in P\} \quad \text{i} \quad Q := \{y \in \mathbb{Q}_+^J : A^T \cdot y = c\}.$$

Korzystając z Wniosku 1.60 wiemy, że istnieje wektor  $y_0 \in Q$  taki, że  $\langle y_0, b \rangle = \delta$ , oraz niech

$$J' := \{j \in J : y_0(j) > 0\}.$$

Z Faktu 1.62 wynika natychmiast, że

$$F \subseteq \{x \in P : A_{J',I} \cdot x = b|_{J'}\}.$$

Z drugiej strony, jeśli  $x$  jest  $I$ -wektorem takim, że  $A_{J',I} \cdot x = b|_{J'}$ , to

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle &= \langle A^T \cdot y_0, x \rangle = \langle y_0, A \cdot x \rangle = \langle (y_0)|_{J'}, A_{J',I} \cdot x \rangle \\ &= \langle (y_0)|_{J'}, b|_{J'} \rangle = \langle y_0, b \rangle = \delta, \end{aligned}$$

a więc

$$\{x \in P : A_{J',I} \cdot x = b|_{J'}\} \subseteq F. \quad \square$$

**WNIOSEK 2.23.**

Jeśli  $F_1$  i  $F_2$  są ścianami wielościanu  $P$  i  $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ , to zbiór  $F_1 \cap F_2$  jest ścianą wielościanu  $P$ .

**Dowód.**

Wyberzmy  $J \times I$ -macierz  $A$  oraz  $J$ -wektor  $b$  takie, że

$$P = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Z Faktu 2.22 wiemy, że istnieją podzbiory  $J_1$  i  $J_2$  zbioru  $J$  takie, że

$$F_1 = \{x \in P : A_{J_1,I} \cdot x = b|_{J_1}\} \quad \text{ i } \quad F_2 = \{x \in P : A_{J_2,I} \cdot x = b|_{J_2}\}.$$

Wtedy

$$F_1 \cap F_2 = \{x \in P : A_{J_1 \cup J_2, I} \cdot x = b|_{J_1 \cup J_2}\},$$

więc zbiór  $F_1 \cap F_2$  jest ścianą wielościanu  $P$  na mocy Faktu 2.22.  $\square$

**WNIOSEK 2.24.**

Jeśli  $C$  jest stożkiem wielościennym w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  oraz  $G$  jest ścianą stożka  $C$ , to istnieje  $I$ -wektor  $c$  taki, że

$$G = \{x \in C : \langle c, x \rangle = 0\} \quad \text{ i } \quad \max\{\langle c, x \rangle : x \in C\} = 0.$$

Dowód.

Wyberzmy  $J \times I$ -macierz  $A$  taką, że

$$C = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq 0\}.$$

Z Faktu 2.22 wynika, że istnieje podzbiór  $J'$  zbioru  $J$  taki, że

$$G = \{x \in C : A_{J',I} \cdot x = 0\}.$$

Zatem teza wynika natychmiast z Lematu 2.21.  $\square$

FAKT 2.25.

Jeśli zbiór  $C$  jest stożkiem wielościnnym w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to każda ściana stożka  $C$  jest stożkiem wielościnnym.

Dowód.

Natychmiast z Wniosku 2.24.  $\square$

WNIOSEK 2.26.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą, niech  $b$  będzie  $J$ -wektorem i

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Jeśli  $F$  jest niepustym podzbiorem przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to zbiór  $F$  jest ścianą wielościanu  $P$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podzbiór  $J'$  zbioru  $F(A, b)$  taki, że

$$F = \{x \in P : A_{J',I} \cdot x = b|_{J'}\}.$$

Dowód.

Jeśli istnieje podzbiór  $J'$  zbioru  $F(A, b)$  taki, że

$$F = \{x \in P : A_{J',I} \cdot x = b|_{J'}\},$$

to zbiór  $F$  jest ścianą wielościanu  $P$  na mocy Faktu 2.22.

Założmy teraz, że zbiór  $F$  jest ścianą wielościanu  $P$ . Z Faktu 2.22 wiemy, że istnieje podzbiór  $J_0$  zbioru  $J$  taki, że

$$F = \{x \in P : A_{J_0,I} \cdot x = b|_{J_0}\}.$$

Jeśli  $J' := J_0 \cap F(A, b)$ , to  $J' \subseteq F(A, b)$  i

$$F = \{x \in P : A_{J',I} \cdot x = b|_{J'}\},$$

gdyż  $\langle A(j), x \rangle = b(j)$  dla każdego wektora  $x \in P$  oraz każdego indeksu  $j \in J \setminus F(A, b)$ .

FAKT 2.27.

Niech  $P$  będzie wielościanem.

- (1) Wielościan  $P$  ma skończenie wiele ścian.
- (2) Jeśli  $F$  jest ścianą wielościanu  $P$  i  $F'$  jest podzbiorem zbioru  $F$ , to zbiór  $F'$  jest ścianą wielościanu  $F$  wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór  $F'$  jest ścianą wielościanu  $P$ .

Dowód.

Korzystając z Faktu 2.22 dla każdej ściany  $F$  wielościanu  $P$  istnieje podzbiór  $J_F$  zbioru  $J$  taki, że

$$F = \{x \in P : A_{J_F, I} \cdot x = b|_{J_F}\}.$$

Zauważmy, że wtedy

$$F = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b \text{ i } A_{J_F, I} \cdot x = b|_{J_F}\}.$$

- (1) Niech  $\mathcal{F}$  będzie zbiorem ścian wielościanu  $P$ . Definiujemy funkcję  $\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{P}(J)$ , gdzie  $\mathcal{P}(J)$  jest zbiorem podzbiorów zbioru  $J$ , wzorem

$$\Phi(F) := J_F \quad (F \in \mathcal{F}).$$

Funkcja  $\Phi$  jest oczywiście różnowartościowa. Istotnie, jeśli  $\Phi(F_1) = \Phi(F_2)$  dla ścian  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ , to  $J_{F_1} = J_{F_2}$ , więc

$$F_1 = \{x \in P : A_{J_{F_1}, I} \cdot x = b|_{J_{F_1}}\} = \{x \in P : A_{J_{F_2}, I} \cdot x = b|_{J_{F_2}}\} = F_2.$$

Ponieważ zbiór  $\mathcal{P}(J)$  jest skończony, więc także zbiór  $\mathcal{F}$  jest skończony.

- (2) Przypomnijmy, że zbiór  $F$  jest wielościanem na mocy Faktu 2.18.

Założmy najpierw, że zbiór  $F'$  jest ścianą wielościanu  $F$ . Korzystając z Lematu 2.26 wiemy, że istnieje podzbiór  $J'$  zbioru  $J \setminus J_F$  taki, że

$$F' = \{x \in F : A_{J', I} \cdot x = b|_{J'}\}.$$

Wtedy

$$F' = \{x \in P : A_{J_F \cup J', I} \cdot x = b|_{J_F \cup J'}\},$$

więc zbiór  $F$  jest ścianą wielościanu  $P$  na mocy Faktu 2.22.

Założmy teraz, że zbiór  $F'$  jest ścianą wielościanu  $P$ . Wybierzmy  $I$ -wektor  $c$  taki, że

$$(*) \quad F' = \{x \in P : \langle c, x \rangle = \delta\},$$

gdzie

$$(**) \quad \delta := \max\{\langle c, x \rangle : x \in P\}.$$

Wtedy

$$F' = \{x \in F : \langle c, x \rangle = \delta\} \quad \text{ i } \quad \delta = \max\{\langle c, x \rangle : x \in F\},$$

co kończy dowód.

Istotnie, inkluzja

$$F' \subseteq \{x \in F : \langle c, x \rangle = \delta\}$$

jest natychmiastową konsekwencją inkluzji  $F' \subseteq F$  i równości (\*). Podobnie, inkluzja  $F \subseteq P$  i równość (\*) implikują, że

$$\{x \in F : \langle c, x \rangle = \delta\} \subseteq F'.$$

Podobnie, nierówność

$$\max\{\langle c, x \rangle : x \in F\} \leq \delta$$

wynika natychmiast z równości (\*\*) i inkluzji  $F \subseteq P$ . Z drugiej strony, ponieważ zbiór  $F'$  jest ścianą wielościanu  $P$ , więc zbiór  $F'$  jest niepusty, zatem istnieje wektor  $x_0 \in F'$ . Wtedy  $x_0 \in F$  (gdyż  $F' \subseteq F$ ) oraz  $\langle c, x_0 \rangle = \delta$  (na mocy równości (\*)), więc że

$$\delta \leq \max\{\langle c, x \rangle : x \in F\}. \quad \square$$

## 2.4. ŚCIANY MAKSYMALNE

DEFINICJA.

Ścianę  $F$  wielościanu  $P$  nazywamy MAKSYMALNĄ, jeśli  $F \neq P$  oraz nie istnieje ściana  $F'$  wielościanu  $P$  taka, że  $F \subset F' \subset P$ .

LEMAT 2.28.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą, niech  $b$  będzie  $J$ -wektorem i

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Założmy, że para  $(A, b)$  jest zredukowana.

(1) Jeśli  $j \in F(A, b)$ , to

$$\{x \in P : \langle A(j), x \rangle = b(j)\} \neq \emptyset.$$

(2) Jeśli  $j, j' \in F(A, b)$  i  $j' \neq j$ , to

$$\{x \in P : \langle A(j), x \rangle = b(j)\} \not\subseteq \{x \in P : \langle A(j'), x \rangle = b(j')\}.$$

Dowód.

Ustalmy indeks  $j \in F(A, b)$ . Wtedy  $F(A, b) \neq \emptyset$ , więc z Faktu 2.1 wynika, że istnieje wektor  $x_1 \in P$  taki, że  $\langle A(j'), x_1 \rangle < b(j)$  dla każdego indeksu  $j' \in F(A, b)$ . Niech  $J' := J \setminus \{j\}$ . Ponieważ para  $(A, b)$  jest zredukowana, więc istnieje wektor  $x_2 \in \mathbb{Q}^I$  taki, że  $A_{J', I} \cdot x_2 \leq b|_{J'}$  i  $\langle A(j), x_2 \rangle > b(j)$ . Definiujemy liczbę  $\lambda$  oraz  $I$ -wektor  $x_0$  wzorami

$$\lambda := \frac{b(j) - \langle A(j), x_1 \rangle}{\langle A(j), x_2 \rangle - \langle A(j), x_1 \rangle} \quad \text{i} \quad x_0 = (1 - \lambda) \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2.$$

Ponieważ

$$\langle A(j), x_1 \rangle < b(j) < \langle A(j), x_2 \rangle,$$

więc  $0 < \lambda < 1$ . Stąd łatwo wywnioskować, że  $A_{J', I} \cdot x_0 \leq b|_{J'}$ , gdyż  $A_{J', I} \cdot x_1 \leq b|_{J'}$  i  $A_{J', I} \cdot x_2 \leq b|_{J'}$ . Ponadto bezpośrednim rachunkiem można sprawdzić, że  $\langle A(j), x_0 \rangle = b(j)$ . W szczególności,

$$x_0 \in \{x \in P : \langle A(j), x \rangle = b(j)\}.$$

Założmy teraz, że  $j' \in F(A, b)$  i  $j' \neq j$ . Wtedy  $\langle A(j'), x_1 \rangle < b(j)$ , więc łatwo widzieć, że  $\langle A(j'), x_0 \rangle < b(j)$ , gdyż  $1 - \lambda > 0$ . W szczególności,

$$x_0 \notin \{x \in P : \langle A(j'), x \rangle = b(j')\}. \quad \square$$

TWIERDZENIE 2.29.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą, niech  $b$  będzie  $J$ -wektorem i

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Jeśli para  $(A, b)$  jest zredukowana, to przyporządkowanie

$$F(A, b) \ni j \mapsto \{x \in P : \langle A(j), x \rangle = b(j)\} \subseteq P$$

indukuje bijekcję pomiędzy zbiorem  $F(A, b)$  a zbiorem ścian maksymalnych wielościanu  $P$ .

Dowód.

Dla każdego indeksu  $j \in F(A, b)$  definiujemy zbiór  $F_j \subseteq \mathbb{Q}^I$  wzorem

$$F_j := \{x \in P : \langle A(j), x \rangle = b(j)\}.$$

Niech  $\mathcal{F}_{\max}$  będzie zbiorem ścian maksymalnych wielościanu  $P$ . Pokażemy najpierw, że jeśli  $j \in F(A, b)$ , to  $F_j \in \mathcal{F}_{\max}$ .

Ustalmy indeks  $j \in F(A, b)$ . Z Lematu 2.28(1) wynika, że  $F_j \neq \emptyset$ , więc z Wniosku 2.26 wynika, że zbiór  $F_j$  jest ścianą wielościanu  $P$ . Ponadto,  $F_j \neq P$ , gdyż  $j \notin E(A, b)$ . Przypuśćmy teraz, że istnieje ściana  $F$  wielościanu  $P$  taka, że  $F_j \subset F$ . Z Faktu 2.22 wiemy, że istnieje podzbiór  $J'$  zbioru  $J$  taki, że

$$F = \{x \in P : A_{J', I} \cdot x = b|_{J'}\}.$$

Zauważmy, że  $j \notin J'$ , gdyż  $F \not\subseteq F_j$ . Zatem jeśli istnieje indeks  $j' \in J'$  taki, że  $j' \in F(A, b)$ , to  $j' \neq j$ , co prowadzi do sprzeczności, gdyż  $F_j \not\subseteq F_{j'}$  na mocy Lematu 2.28(2). Stąd  $J' \subseteq E(A, b)$ , a więc  $F = P$ .

Możemy zatem zdefiniować funkcję  $\Phi : F(A, b) \rightarrow \mathcal{F}_{\max}$  wzorem

$$\Phi(j) := F_j \quad (j \in F(A, b)).$$

Z Lematu 2.28(2) wynika, że funkcja  $\Phi$  jest różnowartościowa. Dla zakończenia dowodu wystarczy więc pokazać, że dla każdej ściany maksymalnej  $F$  wielościanu  $P$  istnieje indeks  $j \in F(A, b)$  taki, że  $F = F_j$ .

Ustalmy ścianę maksymalną  $F$  wielościanu  $P$ . Z Wniosku 2.26 wiemy, że istnieje podzbiór  $J'$  zbioru  $F(A, b)$  taki, że

$$F = \{x \in P : A_{J', I} \cdot x = b|_{J'}\}.$$

Oczywiście  $J' \neq \emptyset$  (gdyż  $F \neq P$ ). Wybierzmy indeks  $j \in J'$ . Wtedy  $F \subseteq F_j$  i  $F_j \neq P$  (gdyż  $j \notin E(A, b)$ ), więc z maksymalności ściany  $F$  wynika, że  $F = F_j$ .  $\square$

**FAKT 2.30.**

Jeśli  $F$  jest ścianą właściwą wielościanu  $P$  w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to istnieją ściany maksymalne  $F_k$ ,  $k \in K$ ,  $K \neq \emptyset$ , wielościanu  $P$  takie, że

$$F = \bigcap_{k \in K} F_k.$$

**Dowód.**

Wybierzmy  $J \times I$ -macierz  $A$  i  $J$ -wektor  $b$  takie, że

$$P = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}$$

i para  $(A, b)$  jest zredukowana. Z Wniosku 2.26 wiemy, że istnieje podzbiór  $K$  zbioru  $F(A, b)$  taki, że

$$F = \{x \in P : A_{K, I} \cdot x = b|_K\}.$$

Ponieważ  $F$  jest ścianą właściwą, to  $K \neq \emptyset$ . Wtedy

$$F = \bigcap_{k \in K} F_k,$$

gdzie

$$F_k := \{x \in P : \langle A(k), x \rangle = b(k)\} \quad (k \in K).$$

Z Twierdzenia 2.29 wiemy, że zbiór  $F_k$  jest ścianą maksymalną wielościanu  $P$  dla każdego indeksu  $k \in K$ , co kończy dowód.  $\square$

FAKT 2.31.

Wielościan  $P$  w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  nie ma ścian właściwych wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór  $P$  jest przestrzenią afiniczną.

Dowód.

Przypuśćmy najpierw, że wielościan  $P$  nie ma ścian właściwych i wybierzmy parę zredukowaną  $(A, b)$  taką, że  $A$  jest  $J \times I$ -macierzą,  $b$  jest  $J$ -wektorem i

$$P = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Ponieważ wielościan  $P$  nie ma ścian właściwych, więc nie ma on również ścian maksymalnych, zatem z Twierdzenia 2.29 wynika, że  $F(A, b) = \emptyset$ . Wtedy  $E(A, b) = J$ , zatem

$$P = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x = b\},$$

a więc zbiór  $P$  jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  na mocy Stwierdzenia 1.30.

Założmy teraz, że zbiór  $P$  jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ . Korzystając ze Stwierdzenia 1.30 wiemy, że istnieje  $J \times I$ -macierz  $A$  i  $J$ -wektor  $b$  takie, że

$$P = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\},$$

para  $(A, b)$  jest zredukowana i  $E(A, b) = J$ . Wtedy  $F(A, b) = \emptyset$ , więc wielościan  $P$  nie ma ścian maksymalnych na mocy Twierdzenia 2.29. Korzystając dodatkowo z Faktu 2.30 otrzymujemy, że wielościan  $P$  nie ma ścian właściwych.  $\square$

LEMAT 2.32.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą, niech  $b$  będzie  $J$ -wektorem i

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Jeśli para  $(A, b)$  jest zredukowana,  $j_0 \in F(A, b)$  i

$$F := \{x \in P : \langle A(j_0), x \rangle = b(j_0)\},$$

to

$$\text{aff. hull } F = \{x \in \mathbb{Q}^I : A_{E(A,b) \cup \{j_0\}, I} \cdot x = b|_{E(A,b) \cup \{j_0\}}\}.$$

DOWÓD.

Lemat 2.28(2) implikuje, że jeśli  $j \in J$ , to  $\langle A(j), x \rangle = b(j)$  dla wszystkich wektorów  $x \in F$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $j \in E(A, b) \cup \{j_0\}$ , zatem teza wynika z Faktu 2.16.

FAKT 2.33.

Jeśli  $F$  jest ścianą maksymalną wielościanu  $P$ , to  $\dim F = \dim P - 1$ .

DOWÓD.

Wybierzmy  $J \times I$ -macierz  $A$  oraz  $J$ -wektor  $b$  takie, że

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}$$

i para  $(A, b)$  jest zredukowana. Na mocy Twierdzenia 2.29 istnieje indeks  $j_0 \in F(A, b)$  taki, że

$$F = \{x \in P : \langle A(j_0), x \rangle = b(j_0)\}.$$

Korzystając z Lematu 2.32 wiemy, że

$$\text{aff. hull } F = \{x \in \mathbb{Q}^I : A_{E(A,b) \cup \{j_0\}, I} \cdot x = b|_{E(A,b) \cup \{j_0\}}\},$$

zatem ze Stwierdzenia 1.31 wynika, że

$$\dim F = \dim \text{aff. hull } F = |I| - \text{rk } A_{E(A,b) \cup \{j_0\}, I}.$$

Ponieważ  $A(j_0) \notin \text{lin. hull}\{A(j) : j \in E(A, b)\}$ , gdyż  $j_0 \notin E(A, b)$ , więc

$$\text{rk } A_{E(A,b) \cup \{j_0\}, I} = \text{rk } A_{E(A,b)} + 1.$$

Korzystając z Faktu 2.17 otrzymujemy zatem, że

$$\dim F = |I| - \text{rk } A_{E(A,b)} - 1 = \dim P - 1. \quad \square$$

WNIOSEK 2.34.

Jeśli  $F$  jest ścianą właściwą wielościanu  $P$ , to  $\dim F < \dim P$ .

Dowód.

Z Faktu 2.30 wynika, że istnieje ściana maksymalna  $F'$  wielościanu  $P$  taka, że  $F \subseteq F'$ . Korzystając z Faktu 2.33 otrzymujemy zatem, że

$$\dim F \leq \dim F' = \dim P - 1 < \dim P. \quad \square$$

STWIERDZENIE 2.35.

Jeśli  $F$  jest ścianą wielościanu  $P$  wymiaru  $\dim P - 2$ , to

$$\#\{F' \subseteq P : F' \text{ jest ścianą maksymalną wielościanu } P \text{ i } F' \subseteq F\} = 2.$$

W szczególności, ściana  $F$  jest przekrojem dwóch ścian maksymalnych wielościanu  $P$ .

Dowód.

Zauważmy, że druga część tezy wynika natychmiast z pierwszej i Faktu 2.30.

Wyberzmy  $J \times I$ -macierz  $A$  oraz  $J$ -wektor  $b$  takie, że

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}$$

i para  $(A, b)$  jest zredukowana. Dla każdego indeksu  $j \in F(A, b)$  definiujemy ścianę maksymalną  $F_j$  wielościanu  $P$  wzorem

$$F_j := \{x \in P : \langle A(j), x \rangle = b(j)\}.$$

Definiujemy podzbiór  $J_0$  zbioru  $F(A, b)$  wzorem

$$J_0 := \{j \in F(A, b) : F \subseteq F_j\}.$$

Korzystając z Twierdzenia 2.29 wystarczy pokazać, że  $|J_0| = 2$ . Zauważmy, że

$$F = \bigcap_{j \in J_0} F_j$$

na mocy Faktu 2.30. Ponieważ  $\dim F = \dim P - 2$ , więc Fakt 2.33 implikuje, że  $|J_0| \geq 2$ .

Zanim udowodnimy, że  $|J_0| \leq 2$ , pokażemy, że jeśli  $j_1, j_2 \in J_0$  i  $j_1 \neq j_2$ , to

$$(*) \quad \text{aff. hull } F = \text{aff. hull } F_{j_1} \cap \text{aff. hull } F_{j_2}.$$

Inkluzja

$$\text{aff. hull } F \subseteq \text{aff. hull } F_{j_1} \cap \text{aff. hull } F_{j_2}$$

jest oczywista, gdyż  $F \subseteq F_1$  i  $F \subseteq F_2$ . Przypomnijmy, że na mocy Lematu 2.32

$$(**) \quad \text{aff. hull } F_j = \{x \in \mathbb{Q}^I : A_{E(A,b) \cup \{j\}, I} \cdot x = b|_{E(A,b) \cup \{j\}}\}$$

dla każdego indeksu  $j \in F(A, b)$ . Lemat 2.28(2) implikuje, że podprzestrzeń  $\text{aff. hull } F_{j_1} \cap \text{aff. hull } F_{j_2}$  jest właściwą podprzestrzenią przestrzeni  $\text{aff. hull } F_{j_1}$ . Korzystając z Faktu 2.33 wynika więc, że mamy następujący ciąg nierówności

$$\begin{aligned} \dim P - 2 &= \dim \text{aff. hull } F \leq \dim(\text{aff. hull } F_{j_1} \cap \text{aff. hull } F_{j_2}) \\ &\leq \dim \text{aff. hull } F_{j_1} - 1 = \dim P - 2, \end{aligned}$$

zatem

$$\dim \text{aff. hull } F = \dim(\text{aff. hull } F_{j_1} \cap \text{aff. hull } F_{j_2}),$$

a więc

$$\text{aff. hull } F = \text{aff. hull } F_{j_1} \cap \text{aff. hull } F_{j_2}.$$

Przypuśćmy teraz, że  $|J_0| > 2$  i wybierzmy parami różne indeksy  $j_0, j_1, j_2 \in J_0$ . Korzystając z równości (\*) i inkluzji  $F \subseteq F_0$ ,  $F \subseteq F_1$  oraz  $F \subseteq F_2$  otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \text{aff. hull } F_{j_1} \cap \text{aff. hull } F_{j_2} &= \text{aff. hull } F \\ &\subseteq \text{aff. hull } F_{j_0} \cap \text{aff. hull } F_{j_1} \cap \text{aff. hull } F_{j_2} \\ &\subseteq \text{aff. hull } F_{j_1} \cap \text{aff. hull } F_{j_2}, \end{aligned}$$

więc

$$\text{aff. hull } F_{j_1} \cap \text{aff. hull } F_{j_2} = \text{aff. hull } F_{j_0} \cap \text{aff. hull } F_{j_1} \cap \text{aff. hull } F_{j_2}.$$

Korzystając z równości (\*\*) otrzymujemy więc, że istnieją liczby wymierne  $\lambda_j$ ,  $j \in E(A, b) \cup \{j_1, j_2\}$  takie, że

$$A(j_0) = \sum_{j \in E(A,b) \cup \{j_1, j_2\}} \lambda_j \cdot A(j) \quad \text{i} \quad b(j_0) = \sum_{j \in E(A,b) \cup \{j_1, j_2\}} \lambda_j \cdot b(j).$$

Jeśli  $\lambda_{j_1} \geq 0$  i  $\lambda_{j_2} \geq 0$ , to

$$P = \{x \in \mathbb{Q}^I : A_{J \setminus \{j_0\}, I} \cdot x \leq b|_{J \setminus \{j_0\}}\},$$

sprzeczność z założeniem, że para  $(A, b)$  jest zredukowana. Jeśli  $\lambda_{j_1} > 0$  i  $\lambda_{j_2} \leq 0$ , to

$$P = \{x \in \mathbb{Q}^I : A_{J \setminus \{j_1\}, I} \cdot x \leq b|_{J \setminus \{j_1\}}\},$$

ponownie sprzeczność. Analogicznie dochodzimy do sprzeczności, gdy  $\lambda_{j_1} \leq 0$  i  $\lambda_{j_2} > 0$ . Na zakończenie zauważmy, że jeśli  $\lambda_{j_1} < 0$  i  $\lambda_{j_2} \leq 0$ , to  $j_1 \in E(A, b)$ , sprzeczność, i dualnie, jeśli  $\lambda_{j_1} \leq 0$  i  $\lambda_{j_2} < 0$ , to  $j_2 \in E(A, b)$ , sprzeczność.  $\square$

DEFINICJA.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą i niech  $b$  będzie  $J$ -wektorem. Parę  $(A, b)$  nazywamy NIERÓWNOŚCIOWO ZREDUKOWANĄ, jeśli

$$\{x \in \mathbb{Q}^I : A_{J \setminus \{j\}, I} \cdot x \leq b|_{J \setminus \{j\}}\} \neq \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}$$

dla każdego indeksu  $j \in F(A, b)$ .

LEMAT 2.36.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą, niech  $b$  będzie  $J$ -wektorem i

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Jeśli para  $(A, b)$  jest nierównościowo zredukowana, to przyporządkowanie

$$F(A, b) \ni j \mapsto \{x \in P : \langle A(j), x \rangle = b(j)\} \subseteq P$$

indukuje bijekcję pomiędzy zbiorem  $F(A, b)$  a zbiorem ścian maksymalnych wielościanu  $P$ .

DOWÓD.

Ponieważ para  $(A, b)$  jest nierównościowo zredukowana, więc istnieje podzbiór  $J'$  zbioru  $J$  taki, że  $F(A, b) \subseteq J'$ , para  $(A_{J', I}, b|_{J'})$  jest zredukowana oraz

$$P = \{x \in \mathbb{Q}^I : A_{J', I} \cdot x \leq b|_{J'}\}.$$

Ponieważ  $F(A_{J', I}, b|_{J'}) = F(A, b) \cap J' = F(A, b)$ , więc teza wynika z Twierdzenia 2.29.  $\square$

TWIERDZENIE 2.37.

Jeśli  $A$  jest  $J \times I$ -macierzą i  $b$  jest  $J$ -wektorem, to para  $(A, b)$  jest nierównościowo zredukowana wtedy i tylko wtedy, gdy

- (1) dla każdego indeksu  $j \in F(A, b)$  istnieje  $I$ -wektor  $x$  taki, że  $A \cdot x \leq b$  i  $\langle A(j), x \rangle = b(j)$ ,
- (2) dla dowolnych indeksów  $j_1, j_2 \in F(A, b)$  takich, że  $j_1 \neq j_2$ , istnieje  $I$ -wektor  $x$  taki, że  $A \cdot x \leq b$ ,  $\langle A(j_1), x \rangle = b(j_1)$  i  $\langle A(j_2), x \rangle < b(j_2)$ .

Dowód.

Definiujemy wielościan  $P$  w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  wzorem

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Dla każdego indeksu  $j \in J$  definiujemy podzbiór  $F_j$  zbioru  $P$  wzorem

$$F_j := \{x \in P : \langle A(j), x \rangle = b(j)\}.$$

Musimy pokazać, że para  $(A, b)$  jest nierównościowo zredukowana wtedy i tylko wtedy, gdy  $F_j \neq \emptyset$  dla każdego indeksu  $j \in F(A, b)$  oraz  $F_{j_1} \not\subseteq F_{j_2}$  dla dowolnych indeksów  $j_1, j_2 \in F(A, b)$  takich, że  $j_1 \neq j_2$ .

Założmy najpierw, że para  $(A, b)$  jest nierównościowo zredukowana. Korzystając z Lematu 2.36 wiemy, że jeśli  $j \in F(A, b)$ , to zbiór  $F_j$  jest ścianą (maksymalną) wielościanu  $P$ , a więc w szczególności  $F_j \neq \emptyset$ . Ustalmy teraz indeksy  $j_1, j_2 \in F(A, b)$  takie, że  $j_1 \neq j_2$ . Korzystając ponownie z Lematu 2.36 wiemy, że zbiory  $F_{j_1}$  i  $F_{j_2}$  są dwiema różnymi ścianami maksymalnymi wielościanu  $P$ , a więc w szczególności  $F_{j_1} \not\subseteq F_{j_2}$ .

Założmy teraz, że para  $(A, b)$  nie jest nierównościowo zredukowana, i wybierzmy podzbiór  $J'$  zbioru  $J$  taki, że para  $(A_{J', I}, b|_{J'})$  jest zredukowana. Ponieważ para  $(A, b)$  nie jest nierównościowo zredukowana, więc istnieje indeks  $j_1 \in F(A, b)$  taki, że  $j_1 \notin J'$ . Fakt 2.22 implikuje, że  $F_{j_1} = \emptyset$  lub zbiór  $F_{j_1}$  jest ścianą wielościanu  $P$ . W pierwszym przypadku dowód jest zakończony, natomiast w drugim przypadku wiemy, że  $F_{j_1} \neq P$ , gdyż  $j_1 \in F(A, b)$ . Korzystając z Faktu 2.30 otrzymujemy, że istnieje ściana maksymalna  $F$  wielościanu  $P$  taka, że  $F_{j_1} \subseteq F$ . Korzystając z Twierdzenia 2.29 otrzymujemy, że istnieje indeks  $j_2 \in F((A_{J', I}, b|_{J'})) = J' \cap F(A, b)$  taki, że  $F = F_{j_2}$ , co kończy dowód, gdyż warunek  $j_2 \in J'$  implikuje, że  $j_1 \neq j_2$ .  $\square$

WNIOSEK 2.38.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą, niech  $b$  będzie  $J$ -wektorem i

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Jeśli  $\dim P = |I|$  i  $A(j) \neq 0$  dla każdego indeksu  $j \in J$ , to para  $(A, b)$  jest zredukowana wtedy i tylko wtedy, gdy

- (1) dla każdego indeksu  $j \in J$  istnieje  $x \in P$  taki, że  $\langle A(j), x \rangle = b(j)$ ,
- (2) dla dowolnych indeksów  $j_1, j_2 \in J$  takich, że  $j_1 \neq j_2$ , istnieje wektor  $x \in P$  taki, że  $\langle A(j_1), x \rangle = b(j_1)$  i  $\langle A(j_2), x \rangle < b(j_2)$ .

Dowód.

Ponieważ  $\dim P = |I|$  (a więc w szczególności  $P \neq \emptyset$ ), więc  $\text{rk } A_{E(A, b), I} =$

0 na mocy Faktu 2.17. Ponieważ  $A(j) \neq 0$  dla każdego indeksu  $j \in J$ , więc  $E(A, b) = \emptyset$ , zatem  $F(A, b) = J$ . W szczególności, para  $(A, b)$  jest zredukowana wtedy i tylko wtedy, gdy jest nierównościowo zredukowana, zatem teza wynika natychmiast z Twierdzenia 2.37.  $\square$

## 2.5. ŚCIANY MINIMALNE

### DEFINICJA.

Ścianę  $F$  wielościanu  $P$  nazywamy MINIMALNĄ, jeśli nie istnieje ściana  $F'$  wielościanu  $P$  taka, że  $F' \subset F$ .

### FAKT 2.39.

Ściana  $F$  wielościanu  $P$  jest minimalna wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór  $F$  jest podprzestrzenią afiniczną.

### DOWÓD.

Z Faktu 2.27(2) wynika, że zbiór  $F$  jest ścianą minimalną wielościanu  $P$  wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór  $F$  traktowany jako wielościan (co jest możliwe dzięki Faktowi 2.18) nie ma ścian właściwych. Zatem teza wynika z Faktu 2.31.  $\square$

### TWIERDZENIE 2.40 (HOFFMAN/KRUSKAL).

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą, niech  $b$  będzie  $J$ -wektorem i

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Zbiór  $F$  jest ścianą minimalną wielościanu  $P$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $F \neq \emptyset$ ,  $F \subseteq P$  i istnieje podzbiór  $J'$  zbioru  $J$  taki, że

$$F = \{x \in \mathbb{Q}^I : A_{J', I} \cdot x = b|_{J'}\}.$$

### DOWÓD.

Jeśli zbiór  $F$  spełnia powyższe warunki, to jest ścianą minimalną wielościanu  $P$  na mocy Faktów 2.22 i 2.39.

Założmy teraz, że zbiór  $F$  jest ścianą minimalną wielościanu  $P$ . Wtedy oczywiście  $F \neq \emptyset$  i  $F \subseteq P$ . Ponadto, na mocy Faktu 2.22 istnieją podzbiory  $J'$  i  $J''$  zbioru  $J$  takie, że  $J' \cap J'' = \emptyset$  i

$$F = \{x \in \mathbb{Q}^I : A_{J', I} \cdot x = b|_{J'} \text{ i } A_{J'', I} \cdot x \leq b|_{J''}\}.$$

Wyberzmy podzbiory  $J'$  i  $J''$  tak, aby liczba  $|J''|$  była najmniejsza możliwa. Korzystając z Lematu 2.36 otrzymujemy wtedy, że istnieje bijekcja pomiędzy zbiorem  $J''$  a zbiorem ścian maksymalnych wielościanu  $F$ . Ponieważ zbiór  $F$  jest ścianą minimalną wielościanu  $P$ , więc z Faktu 2.27(2) wynika, że wielościan  $F$  nie ma ścian właściwych, a więc także ścian maksymalnych. Stąd  $J'' = \emptyset$ , co kończy dowód.  $\square$

WNIOSEK 2.41.

Jeśli zbiór  $G$  jest ścianą minimalną stożka wielościennego  $C$ , to

$$G = \text{lin. space } C.$$

Dowód.

Z Twierdzenia 2.40 i Faktu 2.7 wynika natychmiast, że  $\text{lin. space } C \subseteq G$ . Z drugiej strony, Fakt 2.22 implikuje, że zbiór  $\text{lin. space } C$  jest ścianą stożka  $C$ , co kończy dowód wobec definicji ściany minimalnej.  $\square$

LEMAT 2.42.

Jeśli  $F$  jest ścianą wielościanu  $P$ , to  $\text{lin. space } F = \text{lin. space } P$ .

Dowód.

Wyberzmy  $J \times I$ -macierz  $A$  oraz  $J$ -wektor  $b$  takie, że

$$P = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Z Faktu 2.7 wiemy, że

$$\text{lin. space } P = \{y \in \mathbb{Q}^I : A \cdot y = 0\}.$$

Z drugiej strony, z Faktu 2.22 wiemy, że istnieje podzbiór  $J'$  zbioru  $J$  taki, że

$$F = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b \text{ i } A_{J',I} \cdot x = b|_{J'}\}.$$

Korzystając ponownie z Faktu 2.7 otrzymujemy, że

$$\text{lin. space } F = \{y \in \mathbb{Q}^I : A \cdot y = 0 \text{ i } A_{J',I} \cdot y = 0\},$$

co kończy dowód.  $\square$

FAKT 2.43.

Jeśli zbiór  $F$  jest ścianą minimalną wielościanu  $P$ , to istnieje wektor  $x_0$  taki, że

$$F = x_0 + \text{lin. space } P.$$

W szczególności  $\dim F = \dim \text{lin. space } P$ .

Dowód.

Wyberzmy wektor  $x_0 \in F$ . Korzystając z Faktu 2.39 i Wniosku 1.20 wiemy, że

$$F = x_0 + \text{lin. space } F.$$

Ponieważ  $\text{lin. space } F = \text{lin. space } P$  na mocy Lematu 2.42, więc otrzymujemy tezę.  $\square$

WNIOSEK 2.44.

Jeśli  $P$  jest wielościanem, to dla każdej liczby całkowitej  $d$  takiej, że

$$\dim \text{lin. space } P \leq d \leq \dim P,$$

istnieje ściana  $F$  wielościanu  $P$  taka, że  $\dim F = d$ .

Dowód.

Jeśli  $d = \dim P$ , to teza jest oczywista (bierzemy  $F = P$ ).

Przypuśćmy zatem, że  $d < \dim P$  oraz załóżmy, że istnieje ściana  $F'$  wielościanu  $P$  taka, że  $\dim F' = d + 1$ . Ponieważ  $d + 1 > d \geq \dim \text{lin. space } P$ , więc ściana  $F'$  nie jest minimalna na mocy Faktu 2.43. Z Faktu 2.27(2) wynika zatem, że istnieją ściany właściwe, a więc na mocy Faktu 2.30 także ściany maksymalne, wielościanu  $F'$ . Wybierzmy ścianę maksymalną  $F$  wielościanu  $F'$ . Wtedy zbiór  $F$  jest ścianą wielościanu  $P$  na mocy Faktu 2.27(2) oraz

$$\dim F = \dim F' - 1 = d$$

na mocy Faktu 2.33, co kończy dowód.  $\square$

DEFINICJA.

WIERZCHOŁKIEM WIELOŚCIANU  $P$  nazywamy każdy wektor  $x \in P$  taki, że zbiór  $\{x\}$  jest ścianą wielościanu  $P$ .

FAKT 2.45.

- (1) Wektor  $x$  jest wierzchołkiem wielościanu  $P$  wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór  $\{x\}$  jest ścianą minimalną wielościanu  $P$ .
- (2) Wielościan  $P$  posiada wierzchołki wtedy i tylko wtedy, gdy jest ostry.

Dowód.

Pierwsza część jest oczywista. Korzystając z pierwszej części i Faktu 2.43 natychmiast otrzymujemy, że wielościan  $P$  posiada wierzchołki wtedy i tylko wtedy, gdy  $|\text{lin. space } P| = 1$ , a więc  $\dim \text{lin. space } P = 0$ , tzn. wielościan  $P$  jest ostry.  $\square$

UWAGA.

W przypadku, gdy ściana minimalna składa się tylko z jednego punktu, będziemy także nazywać tę ścianę wierzchołkiem.

## 2.6. KRAWĘDZIE I PROMIENIE EKSTREMALNE

FAKT 2.46.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą, niech  $b$  będzie  $J$ -wektorem i

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Jeśli  $F$  jest ścianą wielościanu  $P$  wymiaru  $\dim \text{lin. space } P + 1$ , to istnieje podzbiór  $J'$  zbioru  $J$  oraz indeksy  $j_1, j_2 \in J \setminus J'$  takie, że  $\text{rk } A_{J',I} = \text{rk } A - 1$  i

$$F = \{x \in \mathbb{Q}^I : A_{J',I} \cdot x = b|_{J'}, \langle A(j_1), x \rangle \leq b(j_1) \text{ i } \langle A(j_2), x \rangle \leq b(j_2)\}.$$

Dowód.

Ponieważ zbiór  $F$  jest ścianą wielościanu  $F$ , więc z Faktu 2.22 wynika, że istnieją podzbiory  $J'$  i  $J''$  zbioru  $J$  takie, że  $J' \cap J'' = \emptyset$  i

$$F = \{x \in \mathbb{Q}^I : A_{J',I} \cdot x = b|_{J'} \text{ i } A_{J'',I} \cdot x \leq b|_{J''}\}.$$

Wyberzmy podzbiory  $J'$  i  $J''$  tak, aby liczba  $2 \cdot |J''| + |J'|$  była najmniejsza możliwa. Pokażemy, że  $|J''| \leq 2$ .

Dla każdego indeksu  $j \in J''$  definiujemy zbiór  $F_j$  wzorem

$$F_j := \{x \in F : \langle A(j), x \rangle = b(j)\}.$$

Z wyboru zbiorów  $J'$  i  $J''$  oraz Twierdzenia 2.29 wynika, że zbiory  $F_j$ ,  $j \in J''$ , są parami różnymi ścianami maksymalnymi wielościanu  $F$ . W szczególności, Fakt 2.33 implikuje, że

$$\dim F_j = \dim F - 1 = \dim \text{lin. space } P$$

dla każdego indeksu  $j \in J''$ . To z kolei oznacza, że

$$(*) \quad \text{rk } A_{J' \cup \{j\},I} = \text{rk } A$$

dla każdego indeksu  $j \in J''$ . Istotnie, jeśli  $j \in J''$ , to

$$\text{aff. hull } F_j = \{x \in \mathbb{Q}^I : A_{J' \cup \{j\},I} \cdot x = b|_{J' \cup \{j\}}\}$$

na mocy Lematu 2.32. Podobnie,

$$\text{lin. space } P = \{y \in \mathbb{Q}^I : A \cdot y = 0\}$$

na mocy Faktu 2.7. Korzystając ze Stwierdzenia 1.31 i Stwierdzenia 1.12(2) otrzymujemy zatem, że

$$\begin{aligned} |I| - \text{rk } A_{J' \cup \{j\},I} &= \dim \text{aff. hull } F_j = \dim F_j \\ &= \dim \text{lin. space } P = |I| - \text{rk } A. \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że

$$(**) \quad \text{rk } A_{J'} = \text{rk } A - 1.$$

Istotnie z wyboru zbiorów  $J'$  i  $J''$  i Faktu 2.17 wynika, że

$$\dim F = |I| - \text{rk } A_{J'},$$

a więc korzystając ponownie ze Stwierdzenia 1.12(2) otrzymujemy, że

$$|I| - \text{rk } A_{J'} = \dim F = \dim \text{lin. space } P + 1 = |I| - \text{rk } A + 1.$$

Z równości  $(*)$  i  $(**)$  wynika w szczególności, że jeśli  $j_1, j_2 \in J''$ , to istnieją liczby wymierne  $\lambda, \mu_j, j \in J'$ , takie, że

$$A(j_1) = \lambda \cdot A(j_2) + \sum_{j \in J'} \mu_j \cdot A(j)$$

i  $\lambda \neq 0$ .

Pokażemy, że jeśli  $\lambda$  i  $\mu_j, j \in J'$ , są liczbami wymiernymi takimi, że

$$(\natural) \quad A(j_1) = \lambda \cdot A(j_2) + \sum_{j \in J'} \mu_j \cdot A(j),$$

to  $\lambda < 0$ . Istotnie, przypuśćmy, że  $\lambda > 0$  i wybierzmy wektory  $x_1$  i  $x_2$  takie, że  $x_1 \in F_{j_1} \setminus F_{j_2}$  i  $x_2 \in F_{j_2} \setminus F_{j_1}$  (takie wektory istnieją, gdyż zbiory  $F_{j_1}$  i  $F_{j_2}$  są różnymi ścianami maksymalnymi wielościanu  $F$ ). Z Lematu 2.21 wiemy, że  $\langle A(j_1), x_2 \rangle < b(j_1)$ . Korzystając z przedstawienia  $(\natural)$  otrzymujemy zatem, że

$$(\dagger) \quad \lambda \cdot b(j_2) + \sum_{j \in J'} \mu_j \cdot b(j) < b(j_1).$$

Z drugiej strony przedstawienie  $(\natural)$  implikuje, że

$$\lambda \cdot A(j_2) = A(j_1) - \sum_{j \in J'} \mu_j \cdot A(j),$$

więc

$$(\ddagger) \quad b(j_1) - \sum_{j \in J'} \mu_j \cdot b(j) < \lambda \cdot b(j_2),$$

gdyż  $\langle A(j_2), x_1 \rangle < b(j_2)$  na mocy Lematu 2.21 (w tym miejscu wykorzystujemy założenie  $\lambda > 0$ ). Dodając stronami nierówności  $(\dagger)$  i  $(\ddagger)$  otrzymujemy, że

$$b(j_1) + \lambda \cdot b(j_2) < b(j_1) + \lambda \cdot b(j_2),$$

sprzeczność.

Przypuśćmy teraz, że  $|J''| > 2$  i wybierzmy parami różne indeksy  $j_0, j_1, j_2 \in J''$ . Z wcześniejszych rozważań wiemy, że istnieją liczby wymierne  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_{1,j}, \mu_{2,j}, j \in J'$ , takie, że  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ ,

$$A(j_1) = \lambda_1 \cdot A(j_0) + \sum_{j \in J''} \mu_{1,j} \cdot A(j)$$

i

$$A(j_2) = \lambda_2 \cdot A(j_0) + \sum_{j \in J''} \mu_{2,j} \cdot A(j).$$

Wtedy

$$A(j_2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot A(j_1) + \sum_{j \in J''} \left( \mu_{2,j} - \frac{\mu_{1,j}}{\lambda_1} \right) \cdot A(j)$$

i  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$ , sprzeczność. □

WNIOSEK 2.47.

Jeśli  $F$  jest ścianą wielościanu  $P$  wymiaru  $\dim \text{lin. space } P + 1$ , to

$$\#\{F' : F' \text{ jest ścianą minimalną wielościanu } P \text{ i } F' \subseteq F\} \leq 2.$$

Dowód.

Z Faktu 2.46 i Twierdzenia 2.29 natychmiast wynika, że

$$\#\{F' : F' \text{ jest ścianą maksymalną wielościanu } F\} \leq 2.$$

Wystarczy zatem pokazać, że zbiór  $F'$  jest ścianą minimalną wielościanu  $P$  taką, że  $F' \subseteq F$ , wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór  $F'$  jest ścianą maksymalną wielościanu  $F$ . Zauważmy jednak, że Fakt 2.43 implikuje, że ściany minimalne wielościanu  $P$  są to dokładnie ściany wielościanu  $P$  wymiaru  $\dim \text{lin. space } P$ . Podobnie z Faktu 2.33 i Wniosku 2.34 wynika, że ściany maksymalne wielościanu  $F$  to ściany wielościanu  $F$  wymiaru  $\dim \text{lin. space } P$ . Ponieważ z Faktu 2.27(2) wiemy, że ściany wielościanu  $F$  to ściany wielościanu  $P$  zawarte w zbiorze  $F$ , powyższe obserwacje kończą dowód. □

DEFINICJA.

Ściany minimalne  $F_1$  i  $F_2$  wielościanu  $P$  nazywamy SĄSIEDNIMI, jeśli istnieje ściana  $F$  wielościanu  $P$  wymiaru  $\dim \text{lin. space } P + 1$  taka, że  $F_1 \subseteq F$  i  $F_2 \subseteq F$ .

DEFINICJA.

ODCINKIEM nazywamy każdy zbiór postaci  $\text{conv. hull}\{x_1, x_2\}$ , gdzie  $x_1$  i  $x_2$  są dwoma różnymi  $I$ -wektorami.

DEFINICJA.

PÓŁPROSTĄ nazywamy każdy zbiór postaci  $x + \text{cone}\{v\}$ , gdzie  $x$  i  $v$  są dwoma  $I$ -wektorami takimi, że  $v \neq 0$ .

STWIERDZENIE 2.48.

Jeśli  $P$  jest wielościanem ostrym wymiaru 1, to zbiór  $P$  jest albo odcinkiem albo półprostą.

DOWÓD.

Z Faktu 2.45(2) wynika, że ściany minimalne wielościanu  $P$  są wierzchołkami. Wybierzmy wierzchołek  $x_0$  wielościanu  $P$ . Ponieważ  $\dim P = 1 > 0$ , więc  $P \neq \{x_0\}$ . Wybierzmy wektor  $x_1 \in P$  taki, że  $x_1 \neq x_0$ , i zdefiniujmy wektor  $v$  wzorem  $v := x_1 - x_0$ . Ponieważ

$$x_0 + \text{lin. hull}\{v\} = \text{aff. hull}\{x_0, x_1\} \subseteq \text{aff. hull } P$$

na mocy Stwierdzenia 1.16 i

$$\dim(x_0 + \text{lin. hull}\{v\}) = 1 = \dim P,$$

na mocy Wniosku 1.24, więc

$$P \subseteq \text{aff. hull } P = x_0 + \text{lin. hull}\{v\}.$$

Ponieważ  $x_0$  jest wierzchołkiem wielościanu  $P$ , więc można wywnioskować, że  $P \subseteq x_0 + \text{cone}\{v\}$ . Z wypukłości zbioru  $P$  wynika, że jeśli  $P \neq x_0 + \text{cone}\{v\}$ , to zbiór  $P$  jest odcinkiem.  $\square$

WNIOSEK 2.49.

Jeśli  $F$  jest ścianą wymiaru  $\dim \text{lin. space } P + 1$  wielościanu  $P$ , to

$$F = Q + \text{lin. space } P,$$

gdzie zbiór  $Q$  jest odcinkiem lub półprostą.

DOWÓD.

Korzystając z Lematu 2.42 wiemy, że

$$\text{lin. space } F = \text{lin. space } P.$$

Wykorzystując teraz Faktu 2.15 otrzymujemy, że istnieje wielościan ostry  $Q$  taki, że  $Q \subseteq (\text{lin. space } P)^\perp$  i

$$F = Q + \text{lin. space } P.$$

Ponieważ  $\dim F = \dim \text{lin. space } P + 1$ , więc  $\dim Q = 1$ , zatem teza wynika ze Stwierdzenia 2.48.  $\square$

DEFINICJA.

Jeśli  $F$  jest ścianą wielościanu  $P$  i  $\dim F = 1$ , to ścianę  $F$  nazywamy KRAWĘDZIĄ, jeśli zbiór  $F$  jest odcinkiem, lub PROMIENIEM (EKSTREMALNYM), jeśli zbiór  $F$  jest półprostą.

## 2.7. PROMIENIE EKSTREMALNE STOŻKÓW OSTRYCH

DEFINICJA.

Ścianę  $G$  stożka wielościennego  $C$  nazywamy MINIMALNĄ ŚCIANĄ WŁAŚCIWĄ, jeśli  $G \neq \text{lin. space } C$  oraz nie istnieje ściana  $G'$  stożka  $G$  taka, że  $G' \subset G$  i  $G' \neq \text{lin. space } C$ .

LEMAT 2.50.

Ściana  $G$  stożka wielościennego  $C$  jest minimalną ścianą właściwą wtedy i tylko wtedy, gdy  $\dim G = \dim \text{lin. space } C + 1$ .

DOWÓD.

Założmy najpierw, że  $\dim G = \dim \text{lin. space } C + 1$  i przypuśćmy, że  $G'$  jest ścianą stożka  $G$  taką, że  $G' \subset G$ . Z Wniosku 2.34 wiemy, że  $\dim G \leq \dim \text{lin. space } C$ , więc zbiór  $G$  jest ścianą minimalną stożka  $C$  na mocy Faktu 2.43. Stąd  $G = \text{lin. space } C$  na mocy Wniosku 2.41.

Założmy teraz, że  $\dim G \neq \dim \text{lin. space } C + 1$ . Z Faktu 2.43 wiemy, że  $\dim G \geq \dim \text{lin. space } C$ . Jeśli  $\dim G = \dim \text{lin. space } C$ , to ściana  $G$  jest minimalna na mocy Faktu 2.43, więc  $G = \text{lin. space } C$  na mocy Wniosku 2.41. Założmy zatem, że  $\dim G > \dim \text{lin. space } C + 1$ . Wtedy ściana  $G$  nie jest minimalna na mocy Faktu 2.43. Niech  $G'$  będzie ścianą maksymalną ścian  $G$ . Korzystając z Faktu 2.33 otrzymujemy, że

$$\dim G' = \dim G - 1 > \dim \text{lin. space } C,$$

więc  $G' \neq \text{lin. space } C$ . □

FAKT 2.51.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą i

$$C := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq 0\}.$$

Jeśli  $G$  jest ścianą stożka  $C$  wymiaru  $\dim \text{lin. space } C + 1$ , to istnieją podzbiór  $J'$  zbioru  $J$  oraz indeks  $j_0 \in J \setminus J'$  takie, że  $\text{rk } A_{J',I} = \text{rk } A - 1$  i

$$G = \{x \in \mathbb{Q}^I : A_{J',I} \cdot x = 0 \text{ i } \langle A(j_0), x \rangle \leq 0\}.$$

DOWÓD.

Korzystając z Faktu 2.46 wiemy, że istnieją podzbiór  $J'$  zbioru  $J$  oraz indeksy  $j_0, j_1 \in J \setminus J'$  takie, że  $\text{rk } A_{J',I} = \text{rk } A - 1$  i

$$G = \{x \in \mathbb{Q}^I : A_{J',I} \cdot x = 0, \langle A(j_0), x \rangle \leq 0 \text{ i } \langle A(j_1), x \rangle \leq 0\}.$$

Ponieważ  $\dim G = \dim \text{lin. space } C + 1$ , więc z Faktów 2.33 i 2.43 wynika, że ściany maksymalne stożka  $G$  są ścianami minimalnymi stożka  $C$ . Ponieważ stożek  $C$  ma dokładnie jedną ścianę minimalną na mocy Wniosku 2.41, więc korzystając z Twierdzenia 2.29 możemy założyć, że  $j_1 = j_0$ .  $\square$

DEFINICJA.

Stożek wielościenney  $C$  nazywamy OSTRYM, jeśli stożek  $C$  jest wielościanem ostrym.

UWAGA.

Jeśli stożek  $C$  jest ostry, to jego jedyną ścianą minimalną jest zbiór  $\{0\}$ .

DOWÓD.

Natychmiast z Wniosku 2.41.  $\square$

LEMAT 2.52.

Jeśli stożek  $C$  jest ostry, to jego ścianami wymiaru 1 są promienie ekstremalne.

DOWÓD.

Z Wniosku 2.49 wiemy, że ściany wymiaru 1 stożka  $C$  muszą być odcinkami lub promieniami ekstremalnymi. Ponieważ ściany stożka  $C$  są stożkami na mocy Faktu 2.25, więc ściany wymiaru 1 stożka  $C$  muszą być promieniami ekstremalnymi.  $\square$

FAKT 2.53.

Niech  $G_l$ ,  $l \in L$  będą wszystkimi minimalnymi ścianami właściwymi stożka wielościennego  $C$ . Jeśli  $y_l \in G_l \setminus \text{lin. space } C$  dla każdego indeksu  $l \in L$ , to

$$C = \text{cone}\{y_l : l \in L\} + \text{lin. space } C.$$

DOWÓD.

Oczywiście

$$\text{cone}\{y_l : l \in L\} + \text{lin. space } C \subseteq C.$$

Dla dowodu inkluzji przeciwnej pokażemy, że

$$G \subseteq \text{cone}\{y_l : l \in L\} + \text{lin. space } C$$

dla każdej ściany  $G$  stożka  $C$ . Dowód będzie indukcyjny ze względu na  $\dim G$ . Zauważmy, że  $\dim G \geq \dim \text{lin. space } C$  na mocy Faktu 2.43.

Założmy najpierw, że  $\dim G = \dim \text{lin. space } C$ . Z Faktu 2.43 wiemy, że zbiór  $G$  jest ścianą minimalną stożka  $G$ , więc  $G = \text{lin. space } C$  na mocy Wniosku 2.41. W szczególności,

$$G \subseteq \text{cone}\{y_l : l \in L\} + \text{lin. space } C.$$

Założmy teraz, że  $\dim G > \dim \text{lin. space } C$  i ustalmy wektor  $y \in G$ . Wybierzmy  $J \times I$ -macierz  $A$  taką, że

$$G = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq 0\}$$

i para  $(A, 0)$  jest zredukowana. Wybierzmy wreszcie indeks  $l_0 \in L$  taki, że  $G_{l_0} \subseteq G$  (taki indeks istnieje na mocy Lematu 2.50 i Wniosku 2.44).

Niech

$$J' := \{j \in J : \langle A(j), y_{l_0} \rangle < 0\}.$$

Zauważmy, że zbiór  $J'$  jest niepusty. Istotnie, w przeciwnym wypadku  $y_{l_0} \in \text{lin. space } G$  na mocy Faktu 2.7. Ponieważ  $\text{lin. space } G = \text{lin. space } C$  na mocy Lematu 2.42, to prowadzioby do sprzeczności z założeniem  $y_{l_0} \notin \text{lin. space } C$ .

Ponieważ  $J' \neq \emptyset$ , zatem możemy zdefiniować liczbę  $\mu$  wzorem

$$\mu := \max\{\lambda \in \mathbb{Q} : y - \lambda \cdot y_{l_0} \in G\}.$$

Innymi słowy,

$$\mu := \min\left\{\frac{\langle A(j), y \rangle}{\langle A(j), y_{l_0} \rangle} : j \in J'\right\}.$$

Oczywiście  $\mu \geq 0$ . Ponadto istnieje indeks  $j_0 \in J'$  taki, że  $y - \mu \cdot y_{l_0} \in G'$ , gdzie

$$G' := \{x \in G : \langle A(j_0), x \rangle = 0\}.$$

Z Twierdzenia 2.29 i Faktu 2.33 wiemy, że  $\dim G' = \dim G - 1$ , zatem z założenia indukcyjnego wynika, że

$$G' \subseteq \text{cone}\{y_l : l \in L\} + \text{lin. space } C.$$

W szczególności,

$$\begin{aligned} y - \mu \cdot y_{l_0} + (y - \mu \cdot y_{l_0}) &\in \text{cone}\{y_l : l \in L\} + G' \\ &\subseteq \text{cone}\{y_l : l \in L\} + \text{lin. space } C. \quad \square \end{aligned}$$

## 2.8. ROZKŁAD WIEŁOŚCIANU

### LEMAT 2.54.

Jeśli  $F$  jest ścianą wielościanu  $P$ , to  $\text{char. cone } F \subseteq \text{char. cone } P$ .

Dowód.

Ustalmy wektor  $y \in \text{char. cone } F$ . Z Faktu 2.3 wiemy, że istnieje wektor  $x_0 \in F$  taki, że  $x_0 + \lambda \cdot y \in F$  dla każdej liczby wymiernej  $\lambda \in \mathbb{Q}_+$ . Ponieważ  $F \subseteq P$ , więc korzystając ponownie z Faktu 2.3 otrzymujemy, że  $y \in \text{char. cone } P$ .  $\square$

FAKT 2.55.

Założmy, że  $P$  jest niepustym wielościanem. Niech  $F_k, k \in K$ , będą wszystkimi ścianami minimalnymi wielościanu  $P$ . Jeśli  $x_k \in F_k$  dla każdego  $k \in K$ , to

$$P = \text{conv. hull}\{x_k : k \in K\} + \text{char. cone } P.$$

Dowód.

Oczywiście

$$\text{conv. hull}\{x_k : k \in K\} + \text{char. cone } P \subseteq P.$$

Dla dowodu inkluzji przeciwnej pokażemy, że

$$F \subseteq \text{conv. hull}\{x_k : k \in K\} + \text{char. cone } P$$

dla każdej ściany  $F$  wielościanu  $P$ . Dowód będzie indukcyjny ze względu na  $\dim F$ . Zauważmy, że  $\dim F \geq \dim \text{lin. space } P$  na mocy Faktu 2.43.

Założmy najpierw, że  $\dim F = \dim \text{lin. space } P$ . Wtedy zbiór  $F$  jest ścianą minimalną wielościanu  $P$  na mocy Faktu 2.43. W szczególności, istnieje indeks  $k_0 \in K$  taki, że  $F = F_{k_0}$ . Korzystając ponownie z Faktu 2.43 otrzymujemy, że

$$F = x_{k_0} + \text{lin. space } P \subseteq \text{conv. hull}\{x_k : k \in K\} + \text{char. cone } P.$$

Założmy teraz, że  $\dim F > \dim \text{lin. space } P$  i ustalmy wektor  $x_0 \in F$ . Istnieje indeks  $k_0 \in K$  taki, że  $F_{k_0} \subseteq F$ . Jeśli  $x_0 - x_{k_0} \in \text{char. cone } P$ , to

$$x_0 = x_{k_0} + (x_0 - x_{k_0}) \in \text{conv. hull}\{x_k : k \in K\} + \text{char. cone } P.$$

Założmy zatem, że  $x_0 - x_{k_0} \notin \text{char. cone } P$  i wybierzmy macierz  $J \times I$ -macierz  $A$  oraz  $J$ -wektor  $b$  takie, że

$$F = \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}$$

i para  $(A, b)$  jest zredukowana. Korzystając z Lematu 2.54 wiemy, że  $x_0 - x_{k_0} \notin \text{char. cone } F$ , zatem z Faktu 1.50 otrzymujemy, że istnieje indeks  $j \in F(A, b)$  taki, że

$$\langle A(j), x_0 - x_{k_0} \rangle > 0.$$

Niech

$$J' := \{j \in J : \langle A(j), x_0 - x_{k_0} \rangle > 0\}.$$

Z powyższej obserwacji wiemy, że  $J' \neq \emptyset$ , zatem możemy zdefiniować liczbę  $\mu$  wzorem

$$\mu := \max\{\lambda \in \mathbb{Q} : x_{k_0} + \lambda \cdot (x_0 - x_{k_0}) \in F\}.$$

Innymi słowy,

$$\mu := \min\left\{\frac{b(j) - \langle A(j), x_{k_0} \rangle}{\langle A(j), x_0 - x_{k_0} \rangle} : j \in J'\right\}.$$

Zauważmy, że  $\mu \geq 1$ , gdyż  $x_0 \in F$ . Ponadto istnieje indeks  $j_0 \in J'$  taki, że  $x'_0 \in F'$ , gdzie

$$x'_0 := x_{k_0} + \mu \cdot (x_0 - x_{k_0}) \quad \text{i} \quad F' := \{x \in F : \langle A(j_0), x \rangle = b(j_0)\}.$$

Z Twierdzenia 2.29 i Faktu 2.33 wiemy, że  $\dim F' = \dim F - 1$ , zatem z założenia indukcyjnego wynika, że

$$F' \subseteq \text{conv. hull}\{x_k : k \in K\} + \text{char. cone } P.$$

W szczególności,

$$x'_0 \in \text{conv. hull}\{x_k : k \in K\} + \text{char. cone } P.$$

Ponieważ

$$x_0 = \frac{1}{\mu} \cdot x'_0 + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \cdot x_{k_0},$$

więc

$$x_0 \in \text{conv. hull}\{x_k : k \in K\} + \text{char. cone } P. \quad \square$$

**WNIOSEK 2.56.**

Założmy, że  $P$  jest niepustym wielościanem. Niech  $F_k$ ,  $k \in K$  będą wszystkimi ścianami minimalnymi wielościanu  $P$  i niech  $G_l$ ,  $l \in L$ , będą wszystkimi minimalnymi ścianami właściwymi stożka  $\text{char. cone } P$ . Jeśli  $x_k \in F_k$  dla każdego  $k \in K$  i  $y_l \in G_l \setminus \text{lin. space } P$  dla każdego indeksu  $l \in L$ , to

$$P = \text{conv. hull}\{x_k : k \in K\} + \text{cone}\{y_l : l \in L\} + \text{lin. space } P.$$

Dowód.

Wynika natychmiast z Faktu 2.53 i Faktu 2.55 (zauważmy, że  $\text{lin. space } P = \text{lin. space } C$  na mocy Wniosku 2.5).  $\square$

WNIOSEK 2.57.

Założmy, że  $P$  jest niepustym wielościanem i

$$Q := P \cap (\text{lin. space } P)^\perp.$$

Niech  $x_k, k \in K$ , będą wszystkimi wierzchołkami wielościanu  $Q$  i niech  $G_l, l \in L$ , będą wszystkimi promieniami ekstremalnymi stożka char. cone  $Q$ . Jeśli  $y_l \in G_l \setminus \{0\}$  dla każdego indeksu  $l \in L$ , to

$$P = \text{conv. hull}\{x_k : k \in K\} + \text{cone}\{y_l : l \in L\} + \text{lin. space } P.$$

Dowód.

Z Lematu 2.13 wiemy, że

$$P = Q + \text{lin. space } P.$$

Ponadto z Wniosku 2.14 wynika, że wielościan  $Q$  jest ostry. Z Faktu 2.45 i Faktu 2.43 wynika zatem, że ścianami minimalnymi wielościanu  $Q$  są jego wierzchołki. Podobnie, z Lematu 2.50 i Lematu 2.52 wynika, że minimalnymi ścianami właściwymi stożka char. cone  $Q$  są jego promienie ekstremalne (zauważmy, że na mocy Lematu 2.12 stożek  $Q$  jest ostry). Korzystając z Wniosku 2.56 otrzymujemy zatem, że

$$Q = \text{conv. hull}\{x_k : k \in K\} + \text{cone}\{y_l : l \in L\},$$

co kończy dowód.  $\square$

FAKT 2.58.

Niech  $P$  będzie niepustym wielościanem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  i

$$Q := P \cap (\text{lin. space } P)^\perp.$$

Jeśli  $x_k, k \in K$  i  $y_l, l \in L$ , są  $I$ -wektorami takimi, że

- (1)  $P = \text{conv. hull}\{x_k : k \in K\} + \text{cone}\{y_l : l \in L\} + \text{lin. space } P$ ,
- (2)  $x_k \in (\text{lin. space } P)^\perp$  dla każdego indeksu  $k \in K$  i  $y_l \in (\text{lin. space } P)^\perp$  dla każdego indeksu  $l \in L$ ,
- (3) liczba  $|K| + |L|$  jest minimalna,

to  $x_k, k \in K$ , są wszystkimi parami różnymi wierzchołkami wielościanu  $Q$  oraz  $\text{cone}\{y_l\}, l \in L$ , są wszystkimi parami różnymi promieniami ekstremalnymi stożka char. cone  $Q$ .

Dowód.

Z warunków (1) i (2) oraz Faktu 2.15(2) wynika, że

$$\text{conv. hull}\{x_k : k \in K\} + \text{cone}\{y_l : l \in L\} = Q.$$

Stąd dla każdej ściany  $F$  wielościanu  $Q$  istnieje indeks  $k \in K$  taki, że  $x_k \in F$ . W szczególności, wśród wektorów  $x_k$ ,  $k \in K$ , znajdują się wszystkie wierzchołki wielościanu  $Q$ . Ponadto korzystając z Faktu 2.4 otrzymujemy, że

$$\text{cone}\{y_l : l \in L\} = \text{char. cone } Q,$$

a więc dla każdej ściany  $G$  stożka  $\text{char. cone } Q$  istnieje indeks  $l \in L$  taki, że  $y_l \in G$ . W szczególności, wśród stożków  $\text{cone}\{y_l\}$ ,  $l \in L$ , znajdują się wszystkie promienie ekstremalne stożka  $Q$ . Wykorzystując warunek (3) oraz Wniosek 2.57 otrzymujemy tezę.  $\square$

## 2.9. ZASTOSOWANIE: MACIERZE PODWÓJNIE STOCHASTYCZNE

DEFINICJA.

$J \times I$ -macierz  $A$  nazywamy PODWÓJNIE STOCHASTYCZNĄ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

- (1)  $A(j, i) \geq 0$  dla wszystkich indeksów  $i \in I$  i  $j \in J$ ,
- (2)  $\sum_{j \in J} A(j, i) = 1$  dla każdego indeksu  $i \in I$ ,
- (3)  $\sum_{i \in I} A(j, i) = 1$  dla każdego indeksu  $j \in J$ .

UWAGA.

Jeśli  $A$  jest  $J \times I$ -macierzą podwójnie stochastyczną, to  $|J| = |I|$ .

Dowód.

Mamy równości

$$|I| = \sum_{i \in I} 1 = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} A(j, i) = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} A(j, i) = \sum_{j \in J} 1 = |J|. \quad \square$$

OZNACZENIE.

Symbolem  $\mathbb{P}_{I,J}$  oznaczamy zbiór wszystkich  $J \times I$ -macierzy podwójnie stochastycznych.

DEFINICJA.

$J \times I$ -macierz  $P$  nazywamy MACIERZĄ PERMUTACJI wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

- (1)  $P(j, i) \in \{0, 1\}$  dla wszystkich indeksów  $i \in I$  i  $j \in J$ ,
- (2) dla każdego indeksu  $i \in I$  istnieje dokładnie jeden indeks  $j \in J$  taki, że  $P(j, i) = 1$ ,

- (3) dla każdego indeksu  $j \in J$  istnieje dokładnie jeden indeks  $i \in I$  taki, że  $P(j, i) = 1$ .

UWAGA.

Każda macierz permutacji jest macierzą podwójnie stochastyczną.

OZNACZENIE.

Symbolem  $\mathcal{P}_{I,J}$  oznaczamy zbiór wszystkich  $J \times I$ -macierzy permutacji.

OZNACZENIE.

Symbolem  $\mathcal{B}_{I,J}$  oznaczamy zbiór bijekcji ze zbioru  $I$  do zbioru  $J$ .

OZNACZENIE.

Dla każdej bijekcji  $\sigma \in \mathcal{B}_{I,J}$  definiujemy macierz  $P_\sigma$  wzorem

$$P_\sigma(j, i) := \begin{cases} 1 & \text{jeśli } j = \sigma(i), \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases} \quad (i, j \in I).$$

UWAGA.

Jeśli zdefiniujemy funkcję  $\Phi : \mathcal{B}_{I,J} \rightarrow \mathcal{P}_{I,J}$  wzorem

$$(\Phi(\sigma)) := P_\sigma \quad (\sigma \in \mathcal{B}_{I,J}),$$

to funkcja  $\Phi$  jest bijekcją.

TWIERDZENIE 2.59 (BIRKHOFF).

$$\mathbb{P}_{I,J} = \text{conv. hull } \mathcal{P}_{I,J}.$$

DOWÓD.

Zauważmy, że zbiór  $\mathbb{P}_{J,I}$  jest wielościanem. Ponadto  $\text{char. cone } \mathbb{P}_{J,I} = \{0\}$ . Istotnie, korzystając z Faktu 1.50 wiemy, że jeśli  $A$  jest  $J \times I$ -macierzą, to  $A \in \text{char. cone } \mathbb{P}_{J,I}$  wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

- (1)  $A(j, i) \geq 0$  dla wszystkich indeksów  $i \in I$  i  $j \in J$ ,
- (2)  $\sum_{j \in J} A(j, i) = 0$  dla każdego indeksu  $i \in I$ ,
- (3)  $\sum_{i \in I} A(j, i) = 0$  dla każdego indeksu  $j \in J$ .

Wobec Faktu 2.55 wystarczy zatem pokazać, że zbiór  $\mathcal{P}_{J,I}$  jest zbiorem wierzchołków wielościanu  $\mathbb{P}_{J,I}$ . Tezę tę udowodnimy przez indukcję ze względu na  $|I|$ . Zauważmy, że jeśli  $|I| = 1$ , to teza jest oczywista, założmy zatem, że  $|I| > 1$ .

Pokażemy najpierw, że macierz  $P_\sigma$  jest wierzchołkiem wielościanu  $\mathbb{P}_{I,J}$  dla każdej bijekcji  $\sigma \in \mathcal{B}_{I,J}$ . Zauważmy, że macierz  $P_\sigma$  jest jedynym rozwiązaniem w przestrzeni  $J \times I$ -macierzy układu równań

$$x_{j,i} = 0, \quad i \in I, j \in J, j \neq \sigma(i),$$

$$\begin{aligned}\sum_{j \in J} x_{j,i} &= 1, & i \in I, \\ \sum_{i \in I} x_{j,i} &= 1, & j \in J,\end{aligned}$$

co kończy tę część dowodu wobec Twierdzenia 2.40.

Założmy teraz, że macierz  $A$  jest wierzchołkiem wielościanu  $\mathbb{P}_{I,J}$ . Niech

$$\mathcal{I} := \{(j, i) \in J \times I : A(j, i) = 0\}.$$

Na mocy Twierdzenia 2.40 macierz  $A$  jest jedynym rozwiązaniem w przestrzeni  $J \times I$ -macierzy układu równań

$$\begin{aligned}x_{j,i} &= 0, & (j, i) \in \mathcal{I}, \\ \sum_{j \in J} x_{j,i} &= 1, & i \in I, \\ \sum_{i \in I} x_{j,i} &= 1, & j \in J.\end{aligned}$$

W szczególności oznacza to, że

$$|\mathcal{I}| \geq |I|^2 - (2 \cdot |I| - 1) = |I| \cdot (|I| - 2) + 1.$$

Stąd, istnieje indeks  $i_0 \in I$  taki, że  $|J_0| = |J| - 1$  (pamiętajmy, że  $|I| = |J|$ ), gdzie

$$J_0 := \{j \in J : (j, i_0) \in \mathcal{I}\}.$$

Niech  $I_0 := I \setminus \{i_0\}$  i niech  $j_0$  będzie (jedynym) elementem zbioru  $J \setminus J_0$ . Wtedy  $A(j_0, i_0) = 1$  oraz  $A_{j_0,i} = 0$  dla wszystkich indeksów  $i \in I_0$  i  $A(j, i_0) = 0$  dla wszystkich indeksów  $j \in J_0$ . Definiujemy  $J_0 \times I_0$ -macierz  $A_0$  wzorem

$$A_0 := A|_{J_0, I_0}.$$

Wtedy  $A_0 \in \mathbb{P}_{I_0, J_0}$  oraz  $A_0$  jest jedynym rozwiązaniem układu równań

$$\begin{aligned}x_{j,i} &= 0, & (j, i) \in \mathcal{I}_0, \\ \sum_{j \in J_0} x_{j,i} &= 1, & i \in I_0, \\ \sum_{i \in I_0} x_{j,i} &= 1, & j \in J_0,\end{aligned}$$

gdzie

$$\mathcal{I}_0 := \mathcal{I} \cap (J_0 \times I_0).$$

Korzystając ponownie z Twierdzenia 2.40 otrzymujemy, że macierz  $A_0$  jest wierzchołkiem zbioru  $\mathbb{P}_{I_0, J_0}$ , zatem istnieje bijekcja  $\sigma_0 \in \mathcal{B}_{I_0, J_0}$  taka, że  $A_0 = P_{\sigma_0}$ . Jeśli zdefiniujemy funkcję  $\sigma : I \rightarrow J$  wzorem

$$\sigma(i) := \begin{cases} j_0 & \text{jeśli } i = i_0, \\ \sigma_0(j) & \text{jeśli } i \in I_0, \end{cases} \quad (i \in I),$$

to funkcja  $\sigma$  jest bijekcją i  $A = P_\sigma$ . □

DEFINICJA.

SKOJARZENIEM w grafie  $G = (V, E, \gamma)$  nazywamy każdy podzbiór  $M \subseteq E$  taki, że  $|\gamma(e)| = 2$  dla każdej krawędzi  $e \in M$  oraz

$$|\{e \in M : v \in \gamma(e)\}| \leq 1$$

dla każdego wierzchołka  $v \in V$ . Równoważnie, drugi warunek możemy sformułować:  $\gamma(e_1) \cap \gamma(e_2) = \emptyset$  dla wszystkich krawędzi  $e_1, e_2 \in M$  takich, że  $e_1 \neq e_2$ . Skojarzenie  $M$  nazywamy DOSKONAŁYM, jeśli

$$|\{e \in M : v \in \gamma(e)\}| = 1$$

dla każdego wierzchołka  $v \in V$ .

LEMAT 2.60.

Jeśli graf  $G = (V, E, \gamma)$  posiada skojarzenie doskonałe, to liczba  $|V|$  jest parzysta.

DOWÓD.

Niech  $M$  będzie skojarzeniem doskonałym w grafie  $V$ . Wtedy

$$2 \cdot M = \sum_{e \in M} |\gamma(e)| = \bigcap_{e \in M} \gamma(e) = V. \quad \square$$

LEMAT 2.61.

Niech  $G = (V, E, \gamma)$  będzie grafem dwudzielnym z klasami kolorów  $V_1$  i  $V_2$ . Niech  $\sigma \in \mathcal{B}_{V_1, V_2}$  będzie bijekcją taką, że  $\{v, \sigma(v)\} \in \gamma(E)$  dla każdego wierzchołka  $v \in V_1$ . Jeśli  $e_v \in E$  i  $\gamma(e_v) = \{v, \sigma(v)\}$  dla każdego wierzchołka  $v \in V_1$ , to zbiór  $M$  jest skojarzeniem doskonałym w grafie  $G$ , gdzie

$$M := \{e_v : v \in V_1\}.$$

DOWÓD.

Oczywiście  $|\gamma(e_v)| = 2$  dla każdego wierzchołka  $v \in V_1$ . Jeśli  $v \in V_1$ , to

$$\{e \in M : v \in \gamma(e)\} = \{e_v\}.$$

Podobnie, jeśli  $v \in V_2$ , to

$$\{e \in M : v \in \gamma(e)\} = \{e_{\sigma^{-1}(v)}\}. \quad \square$$

WNIOSEK 2.62.

Jeśli  $G = (V, E, \gamma)$  jest nietrywialnym regularnym grafem dwudzielnym, to graf  $G$  posiada skojarzenie doskonałe.

DOWÓD.

Niech  $V_1$  i  $V_2$  będą klasami kolorów w grafie  $G$ . Definiujemy  $V_2 \times V_1$ -macierz  $A$  wzorem

$$A(v_2, v_1) := \frac{\#\{e \in E : \gamma(e) = \{v_1, v_2\}\}}{d} \quad (v_1 \in V_1, v_2 \in V_2),$$

gdzie  $d$  jest stopniem regularności grafu  $G$ . Wtedy macierz  $A$  jest podwójnie stochastyczna, zatem z Twierdzenia 2.59 wiemy, że istnieją nieujemne liczby wymierne  $\lambda_P$ ,  $P \in \mathcal{P}_{V_1, V_2}$ , takie, że

$$A = \sum_{P \in \mathcal{P}_{V_1, V_2}} \lambda_P \cdot P \quad \text{i} \quad \sum_{P \in \mathcal{P}_{V_1, V_2}} \lambda_P = 1.$$

Wyberzmy bijekcję  $\sigma \in \mathcal{B}_{V_1, V_2}$  taką, że  $\lambda_{P_\sigma} > 0$ . Wtedy  $A(\sigma(v), v) > 0$  dla każdego wierzchołka  $v \in V_1$ , zatem dla każdego wierzchołka  $v \in V_1$  istnieje krawędź  $e \in E$  taką, że  $\gamma(e) = \{v, \sigma(v)\}$ . Korzystając z Lematu 2.61 otrzymujemy, że istnieje skojarzenie doskonałe w grafie  $G$ .  $\square$

DEFINICJA.

POLYTOPEM SKOJARZEŃ DOSKONAŁYCH w grafie  $G = (V, E, \gamma)$  nazywamy zbiór  $P(G)$  zdefiniowany wzorem

$$P(G) := \text{conv. hull}\{\mathbf{e}_M : \text{zbiór } M \text{ jest skojarzeniem doskonałym w grafie } G\}.$$

OZNACZENIE.

Niech  $G = (V, E, \gamma)$  będzie grafem. Dla podzbioru  $W \subseteq V$  definiujemy zbiór  $\delta(W) \subseteq E$  wzorem

$$\delta(W) := \{e \in E : \gamma(e) \cap W \neq \emptyset \text{ i } \gamma(e) \cap (V \setminus W) \neq \emptyset\}.$$

Ponadto, jeśli  $v$  wierzchołkiem grafu  $G$ , to piszemy

$$\delta(v) := \delta(\{v\}).$$

UWAGA.

Jeśli  $G = (V, E, \gamma)$  jest grafem i  $W \subseteq V$ , to

$$\delta(W) = \delta(V \setminus W).$$

OZNACZENIE.

Jeśli  $x$  jest  $I$ -wektorem oraz  $I' \subseteq I$ , to definiujemy liczbę  $x(I')$  wzorem

$$x(I') := \langle x, \mathbf{e}_{I'} \rangle = \sum_{i \in I'} x(i).$$

WNIOSEK 2.63.

Jeśli  $G = (V, E, \gamma)$  jest grafem dwudzielnym, to

$$P(G) = \left\{ x \in \mathbb{Q}_+^E : x(\delta(v)) = 1 \text{ dla każdego wierzchołka } v \in V \right\}.$$

DOWÓD.

Niech  $V_1$  i  $V_2$  będą klasami kolorów w grafie  $G$ .

Definiujemy podzbiór  $P \subseteq \mathbb{Q}^E$  wzorem

$$P := \{ x \in \mathbb{Q}_+^E : x(\delta(v)) = 1 \text{ dla każdego wierzchołka } v \in V \}.$$

Oczywiście  $P(G) \subseteq P$ . Dla dowodu inkluzji  $P \subseteq P(G)$  ustalmy wektor  $x \in P$ . Wtedy

$$|V_1| = \sum_{v \in V_1} 1 = \sum_{v \in V_1} x(\delta(v)) = x(E).$$

Podobnie pokazujemy, że  $x(E) = |V_2|$ , a więc w szczególności  $|V_1| = |V_2|$ . Przez indukcję na

$$\#\{e \in E : x(e) > 0\}$$

pokażemy, że  $x \in P(G)$ . Zauważmy, że  $x \neq 0$ . Wybierzmy krawędź  $e_0 \in E$  taką, że

$$x(e_0) = \min\{x(e) : e \in E \text{ i } x(e) > 0\}.$$

Niech  $w_1 \in V_1$  i  $w_2 \in V_2$  będą wierzchołkami takimi, że  $\gamma(e_0) = \{w_1, w_2\}$ .

Jeśli  $x(e_0) = 1$ , to  $x(e) = 1$  dla każdej krawędzi  $e$  takiej, że  $x(e) > 0$ , więc  $x = \mathbf{e}_M$ , gdzie

$$M := \{e \in E : x(e) > 0\}.$$

Korzystając z założenia  $x \in P(G)$  łatwo otrzymujemy, że zbiór  $M$  jest skojarzeniem doskonałym w grafie  $G$ .

Założmy zatem, że  $x(e_0) < 1$ . Definiujemy  $V_2 \times V_1$ -macierz  $A$  wzorem

$$A(v_2, v_1) := \sum_{\substack{e \in E \\ \gamma(e) = \{v_1, v_2\}}} x(e) \quad (v_1 \in V_1, v_2 \in V).$$

Wtedy macierz  $A$  jest podwójnie stochastyczna, zatem z Twierdzenia 2.59 wiemy, że istnieją nieujemne liczby wymierne  $\lambda_P$ ,  $P \in \mathcal{P}_{V_1, V_2}$ , takie, że

$$A = \sum_{P \in \mathcal{P}_{V_1, V_2}} \lambda_P \cdot P \quad \text{i} \quad \sum_{P \in \mathcal{P}_{V_1, V_2}} \lambda_P = 1.$$

Niech

$$\mathcal{B}_0 := \{\sigma \in \mathcal{B}_{V_1, V_2} : \lambda_{P_\sigma} > 0 \text{ i } \sigma(w_1) = w_2\}.$$

Oczywiście  $\mathcal{B}_0 \neq \emptyset$ . Korzystając z Lematu 2.61 wiemy, że dla każdej permutacji  $\sigma \in \mathcal{B}_0$  istnieje skojarzenie doskonałe  $M_\sigma$  w grafie  $G$  takie, że  $e_0 \in M_\sigma$ ,  $x(e) > 0$  dla każdej krawędzi  $e \in M$  oraz

$$\gamma(M_\sigma) = \{\{v, \sigma(v)\} : v \in V_1\}.$$

Definiujemy  $E$ -wektor  $x'$  wzorem

$$x' := \frac{1}{1 - x(e_0)} \cdot \left( x - \frac{x(e_0)}{\lambda} \cdot \sum_{\sigma \in \mathcal{B}_0} \lambda_{P_\sigma} \cdot \mathbf{e}_{M_\sigma} \right),$$

gdzie

$$\lambda := \sum_{\sigma \in \mathcal{B}_0} \lambda_{P_\sigma}.$$

Wtedy  $x' \in P$  oraz

$$\#\{e \in E : x'(e) > 0\} < \#\{e \in E : x(e) > 0\},$$

gdyż  $x'(e_0) = 0$ . Z założenia indukcyjnego wynika, że istnieją skojarzenia doskonałe  $M_i$ ,  $i \in I$ , w grafie  $G$  oraz nieujemne liczby wymierne  $\lambda_i$ ,  $i \in I$ , takie, że

$$x' = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot \mathbf{e}_{M_i} \quad \text{i} \quad \sum_{i \in I} \lambda_i = 1.$$

Wtedy

$$x = \frac{x(e_0)}{\lambda} \cdot \sum_{\sigma \in \mathcal{B}_0} \lambda_{P_\sigma} \cdot \mathbf{e}_{M_\sigma} + (1 - x(e_0)) \cdot \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot \mathbf{e}_{M_i}$$

oraz

$$\frac{x(e_0)}{\lambda} \sum_{\sigma \in \mathcal{B}_0} \lambda_{P_\sigma} + (1 - x(e_0)) \cdot \sum_{i \in I} \lambda_i = 1,$$

co kończy dowód. □

## 2.10. ZASTOSOWANIE: POLYTOP SKOJARZEŃ

PRZYKŁAD.

Niech  $G = (V, E)$  będzie następującym grafem prostym



Zauważmy, że  $P(G) = \emptyset$ . Z drugiej strony,

$$\left\{ x \in \mathbb{Q}_+^E : \sum_{\substack{e \in E \\ v \in e}} x(e) = 1 \right\} \neq \emptyset.$$

**Twierdzenie 2.64 (Edmonds).**

Jeśli  $G = (V, E, \gamma)$  jest grafem, to

$$P(G) = \{ x \in \mathbb{Q}_+^E : x(\delta(v)) = 1 \text{ dla każdego wierzchołka } v \in V, \\ x(\delta(W)) \geq 1 \text{ dla każdego podzbioru } W \subseteq V \\ \text{takiego, że liczba } |W| \text{ jest nieparzysta, oraz} \\ x(e) = 0 \text{ dla każdej pętli } e \in E \}.$$

**Dowód.**

Bez straty ogólności możemy założyć, że w grafie  $G$  nie ma pętli. Dla grafu  $G$  definiujemy zbiór  $P(G') \subseteq \mathbb{Q}^E$  wzorem

$$P'(G) := \{ x \in \mathbb{Q}_+^E : x(\delta(v)) = 1 \text{ dla każdego wierzchołka } v \in V \text{ i} \\ x(\delta(W)) \geq 1 \text{ dla każdego podzbioru } W \subseteq V \\ \text{takiego, że liczba } |W| \text{ jest nieparzysta} \}.$$

Oczywiście  $P(G) \subseteq P'(G)$ . Inkluzję  $P'(G) \subseteq P(G)$  udowodnimy przez indukcję ze względu na  $|G| := |V| + |E|$ . Ponieważ  $\text{char. cone } P'(G) = \{0\}$  na mocy

Faktu 1.50, więc korzystając z Faktu 2.55 wystarczy pokazać, że  $x \in P(G)$  dla każdego wierzchołka  $x$  polytopu  $P'(G)$ . Ustalmy zatem wierzchołek  $x$  polytopu  $P'(G)$ . Zauważmy, że liczba  $|V|$  jest parzysta. Istotnie,  $\delta(V) = \emptyset$ , więc  $x(\delta(V)) = 0$ .

1°. Załóżmy, że graf  $G$  nie jest spójny, a więc istnieją podzbiory  $V', V'' \subseteq V$  takie, że  $V' \neq \emptyset \neq V''$ ,  $V = V' \cup V''$ ,  $V' \cap V'' = \emptyset$  i  $E = E' \cup E''$ , gdzie

$$E' := \{e \in E : \gamma(e) \subseteq V'\} \quad \text{i} \quad E'' := \{e \in E : \gamma(e) \subseteq V''\}.$$

Definiujemy grafy  $G'$  i  $G''$  wzorami  $G' := (V', E', \gamma')$  i  $G'' := (V'', E'', \gamma'')$ , gdzie

$$\gamma'(e) := \gamma(e) \quad (e \in E')$$

i

$$\gamma''(e) := \gamma(e) \quad (e \in E'').$$

Jeśli  $x' := x|_{E'}$  i  $x'' := x|_{E''}$ , to oczywiście  $x' \in P'(G')$  i  $x'' \in P'(G'')$ , a więc  $x' \in P(G')$  i  $x'' \in P(G'')$  na mocy założenia indukcyjnego. W szczególności, jeśli  $\mathcal{M}'$  i  $\mathcal{M}''$  są zbiorami skojarzeń doskonałych w grafach  $G'$  i  $G''$ , odpowiednio, to istnieją nieujemne liczby wymierne  $\lambda_{M'}$ ,  $M' \in \mathcal{M}'$ , i  $\mu_{M''}$ ,  $M'' \in \mathcal{M}''$ , takie, że

$$\sum_{M' \in \mathcal{M}'} \lambda_{M'} = 1 \quad \text{i} \quad \sum_{M'' \in \mathcal{M}''} \mu_{M''} = 1$$

oraz

$$x' = \sum_{M' \in \mathcal{M}'} \lambda_{M'} \cdot \mathbf{e}_{M'} \quad \text{i} \quad x'' = \sum_{M'' \in \mathcal{M}''} \mu_{M''} \cdot \mathbf{e}_{M''}.$$

Wtedy

$$x = \sum_{M' \in \mathcal{M}'} \sum_{M'' \in \mathcal{M}''} (\lambda_{M'} \cdot \mu_{M''}) \cdot \mathbf{e}_{M' \cup M''}.$$

Ponieważ zbiór  $M' \cup M''$  jest skojarzeniem doskonałym w grafie  $G$  dla dowolnych skojarzeń  $M' \in \mathcal{M}'$  i  $M'' \in \mathcal{M}''$ , to kończy dowód w tym przypadku.

2°. Załóżmy, że istnieje krawędź  $e \in E$  taka, że  $x(e) = 0$ . Definiujemy graf  $G'$  wzorem  $G' := (V', E', \gamma')$ ,  $V' := V$ ,  $E' := E \setminus \{e\}$  i  $\gamma' := \gamma|_{E'}$ . Jeśli  $x' := x|_{E'}$ , to  $x' \in P'(G')$ , a więc  $x' \in P(G')$  na mocy założenia indukcyjnego. Ponieważ każde skojarzenie doskonałe w grafie  $G'$  jest skojarzeniem doskonałym w grafie  $G$ , stąd natychmiast wynika, że  $x \in P(G)$ .

3°. Załóżmy, że istnieje wierzchołek  $v \in V$  taki, że  $\delta(v) = \{e\}$ . Wtedy  $x(e) = 1$ . Niech  $\gamma(e) = \{v, u\}$ . Jeśli  $\delta(u) \neq \{e\}$ , to istnieje krawędź  $e' \in E$  taka, że  $x(e') = 0$ , zatem teza wynika z punktu 2°. Załóżmy zatem, że  $\delta(u) = \{e\}$ . Jeśli  $V \neq \{u, v\}$ , to graf  $G$  nie jest spójny i korzystamy z punktu 1°. W przeciwnym wypadku, zbiór  $M := \{e\}$  jest skojarzeniem doskonałym w grafie  $G$  i  $x = \mathbf{e}_M \in P(G)$ .

4°. Załóżmy, że  $|E| \leq |V|$ . Korzystając z punktu 3° możemy założyć, że

$$|\delta(v)| \geq 2$$

dla każdego wierzchołka  $v \in V$ . Wtedy

$$2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} |\delta(v)| \geq 2 \cdot |V|,$$

a więc  $|E| = |V|$  oraz

$$|\delta(v)| = 2$$

dla każdego wierzchołka  $v \in V$ . Jeśli graf  $G$  nie jest spójny, to teza wynika z punktu 1°. Załóżmy zatem, że graf  $G$  jest spójny. Wtedy graf  $G$  jest cyklem, a więc istnieje ciąg  $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n)$  taki, że

- $n := |V|$ ,
- $v_1, \dots, v_n$  są parami różnymi wierzchołkami grafu  $G$  i  $v_0 = v_n$ ,
- $e_1, \dots, e_n$  są parami różnymi krawędziami grafu  $G$  i  $\gamma(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$  dla każdego indeksu  $i \in [1, n]$ ,

Jeśli  $\lambda := x(e_1)$ , to przez prostą indukcję pokazujemy, że

$$x(e_i) = \begin{cases} \lambda & \text{jeśli } i \equiv 1 \pmod{2}, \\ 1 - \lambda & \text{jeśli } i \equiv 0 \pmod{2}, \end{cases}$$

dla każdego indeksu  $i \in [1, n]$  (w szczególności,  $0 \leq \lambda \leq 1$ ). Niech

$$M' := \{e_i : i \in [1, n] \text{ i } i \equiv 1 \pmod{2}\}$$

i

$$M'' := \{e_i : i \in [1, n] \text{ i } i \equiv 0 \pmod{2}\}.$$

Wtedy zbiory  $M'$  i  $M''$  są skojarzeniami doskonałymi w grafie  $G$  (przypomnijmy, że  $2 \mid n$ ) oraz

$$x = \lambda \cdot \mathbf{e}_{M'} + (1 - \lambda) \cdot \mathbf{e}_{M''}.$$

5°. Załóżmy, że  $|E| > |V|$ . Korzystając z punktu 2° możemy założyć, że  $x(e) > 0$  dla każdej krawędzi  $e \in E$ . Ponieważ wektor  $x$  jest wierzchołkiem polytopu  $P'(G)$ , więc z Twierdzenia 2.40 wynika, że istnieje zbiór  $W \subset V$  taki, że liczby  $|W|$  i  $|U|$  są większe od 1 i nieparzyste oraz  $x(\delta(W)) = 1$ , gdzie  $U := V \setminus W$ . Definiujemy grafy  $G'$  i  $G''$  wzorami  $G' := (V', E', \gamma')$  i  $G'' := (V'', E'', \gamma'')$ , gdzie

$$V' := W \cup \{u^*\} \quad \text{ i } \quad V'' := U \cup \{w^*\},$$

dla  $u^*, w^* \notin V$ ,

$$E' := \{e \in E : \gamma(e) \subseteq W\} \cup \{\{w, u^*\} : \\ w \in W \text{ i istnieje wierzchołek } u \in U \text{ taki, że } \{w, u\} \in \gamma(E)\}$$

i

$$E'' := \{e \in E : \gamma(e) \subseteq U\} \cup \{\{u, w^*\} : \\ u \in U \text{ i istnieje wierzchołek } w \in W \text{ taki, że } \{u, w\} \in \gamma(E)\},$$

oraz

$$\gamma'(e) := \begin{cases} \gamma(e) & \text{jeśli } e \in E, \\ e & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases} \quad (e \in E')$$

i

$$\gamma''(e) := \begin{cases} \gamma(e) & \text{jeśli } e \in E, \\ e & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases} \quad (e \in E'')$$

Innymi słowy, grafy  $G'$  i  $G''$  powstają przez ściągnięcie zbiorów  $U$  i  $W$  do punktu, odpowiednio. Wreszcie definiujemy odwzorowania  $\pi' : \mathbb{Q}^E \rightarrow \mathbb{Q}^{E'}$  oraz  $\pi'' : \mathbb{Q}^E \rightarrow \mathbb{Q}^{E''}$  wzorami

$$(\pi'(y))(e) := \begin{cases} y(e) & \text{jeśli } e \in E, \\ y(\delta(w) \cap \delta(W)) & \text{jeśli } e = \{w, u^*\} \\ \text{dla pewnego wierzchołka } w \in W \end{cases}$$

$$(y \in \mathbb{Q}^E, e \in E')$$

i

$$(\pi''(y))(e) := \begin{cases} y(e) & \text{jeśli } e \in E, \\ y(\delta(u) \cap \delta(U)) & \text{jeśli } e = \{u, w^*\} \\ & \text{dla pewnego wierzchołka } u \in U \end{cases}$$

$$(y \in \mathbb{Q}^E, e \in E'').$$

Niech  $x' := \pi'(x)$  oraz  $x'' := \pi''(x)$ . Wtedy  $x' \in P'(G')$  i  $x'' \in P'(G'')$ . Korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy, że istnieją dodatnia liczba całkowita  $N$  oraz skojarzenia doskonałe  $M'_1, \dots, M'_N$  i  $M''_1, \dots, M''_N$  w grafach  $G'$  i  $G''$ , odpowiednio, takie,  $N \cdot x \in \mathbb{N}^E$  oraz

$$x' = \sum_{i \in [1, N]} \frac{1}{N} \cdot \mathbf{e}_{M'_i} \quad \text{i} \quad x'' = \sum_{i \in [1, N]} \frac{1}{N} \cdot \mathbf{e}_{M''_i}.$$

Dla zakończenia dowodu wystarczy zatem pokazać następujący fakt.

LEMAT.

Niech  $z \in \mathbb{Q}^E$ ,  $z' := \pi'(z)$  i  $z'' := \pi''(z)$ . Jeśli istnieją dodatnia liczba całkowita  $N$  oraz skojarzenia doskonałe  $M'_1, \dots, M'_N$  i  $M''_1, \dots, M''_N$  w grafach  $G'$  i  $G''$ , odpowiednio, takie, że  $N \cdot z \in \mathbb{N}^E$  oraz

$$z' = \sum_{i \in [1, N]} \frac{1}{N} \cdot \mathbf{e}_{M'_i} \quad \text{i} \quad z'' = \sum_{i \in [1, N]} \frac{1}{N} \cdot \mathbf{e}_{M''_i},$$

to istnieją skojarzenia doskonałe  $M_1, \dots, M_N$  w grafie  $G$  takie, że

$$z = \sum_{i \in [1, N]} \frac{1}{N} \cdot \mathbf{e}_{M_i}.$$

Powyższy fakt udowodnimy przez indukcję ze względu na  $N$ .

Ustalmy wierzchołek  $w \in W$  taki, że  $\{w, u^*\} \in M'_N$ . Wtedy  $z'(\{w, u^*\}) > 0$ , zatem istnieją wierzchołek  $u \in U$  oraz krawędź  $e \in E$  takie, że  $\gamma(e) = \{w, u\}$  i  $z(e) > 0$ . Ponieważ z założenia  $N \cdot z \in \mathbb{N}^E$ , więc  $z(e) \geq \frac{1}{N}$ . Ponadto  $z''(\{w^*, u\}) > 0$ , zatem istnieje indeks  $i \in [1, N]$  taki, że  $\{w^*, u\} \in M''_i$ . Bez straty ogólności możemy przyjąć, że  $i = N$ . Definiujemy zbiór  $M \subseteq E$  wzorem

$$M := \{e\} \cup (M'_N \cap E) \cup (M''_N \cap E).$$

Wtedy zbiór  $M$  jest skojarzeniem doskonałym w grafie  $G$ . Jeśli  $N = 1$ , to  $z = \mathbf{e}_M$ . W przeciwnym wypadku, jeśli zdefiniujemy wektory  $y$ ,  $y'$  i  $y''$  wzorami

$$y := \frac{N}{N-1} \cdot \left( z - \frac{1}{N} \cdot \mathbf{e}_M \right),$$

$y' := \pi'(y)$  i  $y'' := \pi''(y)$ , to  $(N-1) \cdot y \in \mathbb{N}^E$  oraz

$$y' = \sum_{i \in [1, N-1]} \frac{1}{N-1} \cdot \mathbf{e}_{M'_i} \quad \text{i} \quad y'' = \sum_{i \in [1, N-1]} \frac{1}{N-1} \cdot \mathbf{e}_{M''_i},$$

zatem teza wynika z założenia indukcyjnego.  $\square$

DEFINICJA.

POLYTOPEM SKOJARZEŃ w grafie  $G = (V, E, \gamma)$  nazywamy zbiór  $Q(G)$  zdefiniowany wzorem

$$Q(G) := \text{conv. hull}\{\mathbf{e}_M : \text{zbiór } M \text{ jest skojarzeniem w grafie } G\}.$$

OZNACZENIE.

Niech  $G = (V, E, \gamma)$  będzie grafem. Dla podzbioru  $W \subseteq V$  definiujemy zbiór  $\langle W \rangle \subseteq E$  wzorem

$$\langle W \rangle := \{e \in E : \gamma(e) \subseteq W\}.$$

WNIOSEK 2.65.

Jeśli  $G = (V, E, \gamma)$  jest grafem, to

$$\begin{aligned} Q(G) &= \{x \in \mathbb{Q}_+^E : x(\delta(v)) \leq 1 \text{ dla każdego wierzchołka } v \in V, \\ &\quad x(\langle W \rangle) \leq \frac{1}{2} \cdot (|W| - 1) \text{ dla każdego podzbioru} \\ &\quad W \subseteq V \text{ takiego, że liczba } |W| \text{ jest nieparzysta}\}. \end{aligned}$$

Dowód.

Definiujemy wielościan  $Q \subseteq \mathbb{Q}^E$  wzorem

$$\begin{aligned} Q &:= \{x \in \mathbb{Q}_+^E : x(\delta(v)) \leq 1 \text{ dla każdego wierzchołka } v \in V, \\ &\quad x(\langle W \rangle) \leq \frac{1}{2} \cdot (|W| - 1) \text{ dla każdego podzbioru} \\ &\quad W \subseteq V \text{ takiego, że liczba } |W| \text{ jest nieparzysta}\}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że jeśli  $x \in Q$  i  $e$  jest krawędzią w grafie  $E$  taką, że  $|\gamma(e)| = 1$ , to  $x(e) = 0$ . Istotnie, jeśli  $\gamma(e) = \{v\}$  dla wierzchołka  $v \in V$ , to  $e \in \langle \{v\} \rangle$ , więc

$$0 \leq x(e) \leq x(\langle \{v\} \rangle) \leq \frac{1}{2} \cdot (1 - 1) = 0.$$

Oczywiście  $Q(G) \subseteq Q$ . Dla dowodu inkluzji  $Q \subseteq Q(G)$  ustalmy wektor  $x \in Q$ . Dla podzbiorów  $W \subseteq V$  i  $F \subseteq E$  definiujemy zbiory  $W'$  i  $W''$  oraz  $F'$  i  $F''$  wzorami

$$W' := \{v' : v \in W\} \quad \text{i} \quad W'' := \{v'' : v \in W\}$$

oraz

$$E' := \{e' : e \in F\} \quad \text{i} \quad E'' := \{e'' : e \in F\}.$$

Definiujemy graf  $\tilde{G}$  wzorem  $\tilde{G} := (\tilde{V}, \tilde{E}, \tilde{\gamma})$ , gdzie

$$\tilde{V} := V' \cup V'', \quad \tilde{E} := E' \cup E'' \cup \{\{v', v''\} : v \in V\},$$

i

$$\tilde{\gamma}(\tilde{e}) := \begin{cases} (\gamma(e))' & \text{jeśli } \tilde{e} = e' \text{ dla pewnej krawędzi } e \in E, \\ (\gamma(e))'' & \text{jeśli } \tilde{e} = e'' \text{ dla pewnej krawędzi } e \in E, \\ \{v', v''\} & \text{jeśli } \tilde{e} = \{v', v''\} \text{ dla pewnego wierzchołka } v \in V, \end{cases}$$

( $\tilde{e} \in \tilde{E}$ ).

Definiujemy wektor  $\tilde{x} \in \mathbb{Q}^{\tilde{E}}$  wzorem

$$\tilde{x}(\tilde{e}) := \begin{cases} x(e) & \text{jeśli } \tilde{e} = e' \text{ dla pewnej krawędzi } e \in E, \\ x(e) & \text{jeśli } \tilde{e} = e'' \text{ dla pewnej krawędzi } e \in E, \\ 1 - x(\delta(v)) & \text{jeśli } \tilde{e} = \{v, v^*\} \\ & \text{dla pewnego wierzchołka } v \in V, \end{cases}$$

( $\tilde{e} \in \tilde{E}$ ).

Twierdzenie 2.64 implikuje, że  $\tilde{x} \in P(\tilde{G})$ . Istotnie, ustalmy wierzchołek  $v \in V$ . Wtedy

$$\delta(v') = (\delta(v))' \cup \{v', v''\}.$$

Stąd

$$\tilde{x}(\delta(v')) = x(\delta(v)) + (1 - x(\delta(v))) = 1.$$

Podobnie, ustalmy podzbiory  $W, U \subseteq V$  takie, że liczba  $|W| + |U|$  jest nieparzysta. Ponieważ

$$|W| + |U| = |W \setminus U| + |U \setminus W| + 2 \cdot |W \cap U|,$$

więc bez straty ogólności możemy założyć, że liczba  $|W \setminus U|$  jest nieparzysta. Wtedy mamy, że

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\delta(W' \cup U'')) &= \sum_{v \in W \setminus U} \tilde{x}(v') + \sum_{v \in U \setminus W} \tilde{x}(v'') + x(\delta(W)) + x(\delta(U)) \\ &\geq |W \setminus U| - \sum_{v \in W \setminus U} x(\delta(v)) + x(\delta(W)) + x(\delta(U)) \\ &= |W \setminus U| - 2 \cdot x(\langle W \setminus U \rangle) - x(\delta(W \setminus U)) \\ &\quad + x(\delta(W)) + x(\delta(U)) \\ &\geq |W \setminus U| - (|W \setminus U| - 1) = 1, \end{aligned}$$

gdyż  $\delta(W \setminus U) \subseteq \delta(W) \cup \delta(U)$ .

Ponieważ  $\tilde{x} \in P(\tilde{G})$ , więc istnieją skojarzenia doskonałe  $\tilde{M}_i$ ,  $i \in I$ , w grafie  $\tilde{G}$  oraz nieujemne liczby wymierne  $\lambda_i$ ,  $i \in I$ , takie, że

$$\tilde{x} = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot \mathbf{e}_{\tilde{M}_i} \quad \text{ i } \quad \sum_{i \in I} \lambda_i = 1.$$

Dla każdego indeksu  $i \in I$  definiujemy podzbiór  $M_i \subseteq E$  wzorem

$$M_i := \{e \in E : e' \in \tilde{M}_i\}.$$

Wtedy zbiór  $M_i$  jest skojarzeniem w grafie  $G$  dla każdego indeksu  $i \in I$  oraz

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot \mathbf{e}_{M_i},$$

co kończy dowód. □

#### OZNACZENIE.

Dla dodatniej liczby dodatniej  $n$  przez  $K_n$  oznaczamy GRAF PEŁNY O  $n$ -WIERZCHOŁKACH, tzn.  $K_n := (V_n, E_n)$ , gdzie

$$V_n := [1, n] \quad \text{ i } \quad E_n := \{\{i, j\} : i, j \in [1, n] \text{ i } i \neq j\}.$$

#### OZNACZENIE.

Jeśli  $n$  jest dodatnią liczbą całkowitą i  $x \in \mathbb{Q}^{K_n}$ , to dla liczb  $i, j \in [1, n]$  definiujemy liczbę  $x(i, j)$  wzorem

$$x(i, j) := \begin{cases} x(\{i, j\}) & \text{jeśli } i \neq j, \\ 0 & \text{jeśli } i = j. \end{cases}$$

**Twierdzenie 2.66.**

Jeśli  $n$  jest liczbą całkowitą taką, że  $n \geq 4$ , to zbiór  $F \subseteq \mathbb{Q}^{E_n}$  jest ścianą maksymalną wielościanu  $Q(K_n)$  wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z następujących warunków:

- (1) istnieją liczby  $i, j \in [1, n]$  takie, że  $i < j$  i

$$F = \{x \in Q(K_n) : x(i, j) = 0\},$$

- (2) istnieje liczba  $i \in [1, n]$  taki, że

$$F = \left\{x \in Q(K_n) : \sum_{j \in [1, n]} x(i, j) = 1\right\},$$

- (3) istnieje podzbiór  $W \subseteq [1, n]$  taki, że liczba  $|W|$  jest nieparzysta i większa od 1 oraz

$$F = \left\{x \in Q(K_n) : \sum_{i, j \in W} x(i, j) = |W| - 1\right\}.$$

**Dowód.**

Korzystając z Wniosku 2.65 wiemy, że

$$\begin{aligned} Q(K_n) = \left\{x \in \mathbb{Q}^{E_n} : x(i, j) \geq 0 \text{ dla wszystkich liczb } i, j \in [1, n] \right. \\ \left. \text{takich, że } i < j, \right. \\ \left. \sum_{j \in [1, n]} x(i, j) \leq 1 \text{ dla każdej liczby } i \in [1, n], \text{ oraz} \right. \\ \left. \sum_{i, j \in W} x(i, j) \leq |W| - 1 \text{ dla każdego} \right. \\ \left. \text{podzbioru } W \subseteq [1, n] \text{ takiego, że takiego, że} \right. \\ \left. \text{liczba } |W| \text{ jest nieparzysta i } |W| > 1\right\}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że  $0 \in Q(K_n)$  oraz  $\mathbf{e}_{\{e\}}$  dla każdej krawędzi  $e$  grafu  $K_n$ , więc Stwierdzenie 1.28 implikuje, że  $\dim Q(K_n) = |E_n|$ .

Jeśli  $i, j \in [1, n]$  i  $i < j$ , to definiujemy podzbiór  $F_{(i, j)} \subseteq Q(G)$  wzorem

$$F_{(i, j)} := \{x \in Q(K_n) : x(i, j) = 0\}.$$

Podobnie, jeśli  $i \in [1, n]$ , to definiujemy podzbiór  $F_i \subseteq Q(G)$  wzorem

$$F_i := \left\{x \in Q(K_n) : \sum_{j \in [1, n]} x(i, j) = 1\right\}.$$

Wreszcie, jeśli  $W \subseteq [1, n]$  oraz liczba  $|W|$  jest nieparzysta i  $|W| > 1$ , to definiujemy podzbiór  $F_W \subseteq Q(G)$  wzorem

$$F_W := \left\{ x \in Q(K_n) : \sum_{i,j \in W} x(i, j) = |W| - 1 \right\}.$$

Niech

$$\begin{aligned} K := & \{(i, j) : i, j \in [1, n] \text{ i } i < j\} \cup [1, n] \\ & \cup \{W \subseteq [1, n] : \text{liczba } |W| \text{ jest nieparzysta i większa od } 1\}. \end{aligned}$$

Łatwo pokazać, że jeśli  $k_1, k_2 \in K$  i  $k_1 \neq k_2$ , to istnieje skojarzenie  $M$  w grafie  $K_n$  takie, że  $\mathbf{e}_M \in F_{k_1}$  i  $\mathbf{e}_M \notin F_{k_2}$ . Zatem teza wynika z Wniosku 2.38 i Twierdzenia 2.29.  $\square$

### 3. BIEGUNOWOŚĆ ORAZ WIEŁOŚCIANY BLOKUJĄCE I ANTYBLOKUJĄCE

#### 3.1. BIEGUNOWOŚĆ

DEFINICJA.

Dla podzbioru  $X$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  takiego, że  $0 \in X$ , definiujemy ZBIÓR BIEGUNOWY  $X^*$  wzorem

$$X^* := \{z \in \mathbb{Q}^I : \langle z, x \rangle \leq 1 \text{ dla wszystkich wektorów } x \in X\}.$$

LEMAT 3.1.

Niech  $x_j, j \in J$ , i  $y_k, k \in K$ , będą  $I$ -wektorami. Jeśli

$$P := \text{conv. hull}(\{0\} \cup \{x_j : j \in J\}) + \text{cone}\{y_k : k \in K\},$$

to

$$P^* = \{z \in \mathbb{Q}^I : \langle x_j, z \rangle \leq 1 \text{ dla wszystkich } j \in J \text{ oraz} \\ \langle y_k, z \rangle \leq 0 \text{ dla wszystkich } k \in K\}.$$

DOWÓD.

Definiujemy podzbiór  $Q$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  wzorem

$$Q := \{z \in \mathbb{Q}^I : \langle x_j, z \rangle \leq 1 \text{ dla wszystkich } j \in J \text{ oraz} \\ \langle y_k, z \rangle \leq 0 \text{ dla wszystkich } k \in K\}.$$

Pokażemy najpierw, że  $Q \subseteq P^*$ . W tym celu ustalmy wektory  $z \in Q$  i  $x \in P$ . Korzystając ze Stwierżeń 1.36 i 1.42 wiemy, że istnieją nieujemne liczby wymierne  $\lambda, \lambda_j, j \in J, \mu_k, k \in K$ , takie, że

$$\lambda + \sum_{j \in J} \lambda_j = 1 \quad \text{i} \quad x = \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j + \sum_{k \in K} \mu_k \cdot y_k.$$

Wtedy

$$\langle z, x \rangle = \langle x, z \rangle = \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot \langle x_j, z \rangle + \sum_{k \in K} \mu_k \cdot \langle y_k, z \rangle \leq \sum_{j \in J} \lambda_j = 1 - \lambda \leq 1.$$

Z dowolności wektora  $x$  wynika, że  $z \in P^*$ .

Udowodnimy teraz, że  $P^* \subseteq Q$ . Ustalmy wektor  $z \in P^*$ . Z definicji zbioru  $P^*$  wiemy, że  $\langle x_j, z \rangle \leq 1$  dla każdego  $j \in J$ . Ustalmy teraz  $k \in K$ . Wtedy  $\lambda \cdot y_k \in P$  dla każdej nieujemnej liczby wymiernej  $\lambda$ , zatem

$$\lambda \cdot \langle y_k, z \rangle = \langle \lambda \cdot y_k, z \rangle \leq 1$$

dla każdej nieujemnej liczby wymiernej  $\lambda$ . Powyższy warunek natychmiast implikuje, że  $\langle y_k, z \rangle \leq 0$ , co kończy dowód.  $\square$

WNIOSEK 3.2.

Jeśli  $P$  jest wielościanem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  i  $0 \in P$ , to zbiór  $P^*$  jest wielościanem i  $0 \in P^*$ .

Dowód.

Korzystając z Wniosku 1.53 wiemy, że istnieją polytop  $Q$  oraz stożek wielościanowy  $C$  takie, że  $P = Q + C$ . Z definicji polytopu wiemy, że

$$Q = \text{conv. hull}\{x_j : j \in J\}$$

dla pewnych  $I$ -wektorów  $x_j$ ,  $j \in J$ . Ponadto, korzystając z Wniosku 1.48 wiemy, że

$$C = \text{cone}\{y_k : k \in K\}$$

dla pewnych  $I$ -wektorów  $y_k$ ,  $k \in K$ . Korzystając dodatkowo z założenia  $0 \in P$  otrzymujemy zatem, że

$$P = \text{conv. hull}(\{0\} \cup \{x_j : j \in J\}) + \text{cone}\{y_k : k \in K\},$$

a więc teza wynika z Lematu 3.1. □

TWIERDZENIE 3.3.

Jeśli  $P$  jest wielościanem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  i  $0 \in P$ , to  $P^{**} = P$ .

Dowód.

Łatwo zauważyć, że  $P \subseteq P^{**}$ .

Ustalmy teraz  $I$ -wektor  $x$  i przypuśćmy, że  $x \notin P$ . Wtedy istnieją  $I$ -wektor  $a$  i liczba wymierna  $b$  takie, że  $\langle a, x \rangle > b$  oraz  $\langle a, y \rangle \leq b$  dla każdego wektora  $y \in P$ . Ponieważ  $0 \in P$ , więc  $b \geq 0$ . Jeśli  $b > 0$ , to  $\frac{1}{b} \cdot a \in P^*$  i

$$\left\langle \frac{1}{b} \cdot a, x \right\rangle > 1,$$

więc  $x \notin P^{**}$ . Jeśli  $b = 0$ , to  $\lambda \cdot a \in P^*$  dla każdej nieujemnej liczby wymiernej  $\lambda$ , ale

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \langle \lambda \cdot a, x \rangle = \langle a, x \rangle \cdot \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda = \infty,$$

więc również otrzymujemy, że  $x \notin P^{**}$ . □

WNIOSEK 3.4.

Niech  $P$  będzie wielościanem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  takim że  $0 \in P$ . Jeśli  $x$  jest  $I$ -wektorem, to  $x \in P$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\langle z, x \rangle \leq 1$  dla wszystkich wektorów  $z \in P^*$ .

DOWÓD.

Wynika natychmiast z równości  $P = P^{**}$ . □

WNIOSEK 3.5.

Niech  $x_j, j \in J$ , i  $y_k, k \in K$ , będą  $I$ -wektorami. Jeśli

$$P := \{z \in \mathbb{Q}^I : \langle x_j, z \rangle \leq 1 \text{ dla wszystkich } j \in J \text{ oraz} \\ \langle y_k, z \rangle \leq 0 \text{ dla wszystkich } k \in K\},$$

to

$$P^* := \text{conv. hull}(\{0\} \cup \{x_j : j \in J\}) + \text{cone}\{y_k : k \in K\}.$$

DOWÓD.

Definiujemy podzbiór  $Q$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  wzorem

$$Q := \text{conv. hull}(\{0\} \cup \{x_j : j \in J\}) + \text{cone}\{y_k : k \in K\}.$$

Korzystając z Lematu 3.1 wiemy, że  $Q^* = P$ . Stąd

$$P^* = Q^{**} = Q$$

na mocy Twierdzenia 3.3 (przypomnijmy, że zbiór  $Q$  jest wielościanem na mocy Wniosków 1.53 oraz 1.48). □

LEMAT 3.6.

Jeśli  $y_k, k \in K$ , i  $z_l, l \in L$ , są  $I$ -wektorami, to

$$\text{cone}\{y_k : k \in K\} + \text{lin. hull}\{z_l : l \in L\} \\ = \text{cone}(\{y_k : k \in K\} \cup \{z_l, -z_l : l \in L\}).$$

DOWÓD.

Natychmiast z Stwierdzeń 1.4 i 1.36. □

WNIOSEK 3.7.

Jeśli  $P$  jest wielościanem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  takim, że  $0 \in P$ , to

$$\dim P^* = |I| - \dim \text{lin. space } P.$$

DOWÓD.

Niech  $V := \text{lin. space } P$  oraz  $Q := P \cap V^\perp$ . Korzystając z Wniosku 2.57 wiemy, że istnieją  $I$ -wektory  $x_j, j \in J, y_k, k \in K$ , takie, że

$$P = \text{conv. hull}\{x_j : j \in J\} + \text{cone}\{y_k : k \in K\} + V$$

oraz  $y_k \in V \setminus \{0\}$  dla każdego  $k \in K$ . Ponadto na mocy Stwierdzenia 1.6 istnieją wektory  $z_l$ ,  $l \in L$ , takie, że

$$V = \text{lin. hull}\{z_l : l \in L\}.$$

Korzystając z Lematu 3.6 oraz założenia  $0 \in P$  otrzymujemy, że

$$P = \text{conv. hull}(\{0\} \cup \{x_j : j \in J\}) \\ + \text{cone}(\{y_k : k \in K\} \cup \{z_l, -z_l : l \in L\}).$$

Z Lematu 3.1 wiemy, że

$$P^* = \{z \in \mathbb{Q}^I : \langle x_j, z \rangle \leq 1 \text{ dla wszystkich } j \in J, \\ \langle y_k, z \rangle \leq 0 \text{ dla wszystkich } k \in K \text{ oraz} \\ \langle z_l, z \rangle = 0 \text{ dla wszystkich } l \in L\}.$$

Zauważmy, że  $0 \in P^*$  oraz  $\langle x_j, 0 \rangle = 0 < 1$  dla każdego  $j \in J$ . Przypuśćmy teraz, że istnieje  $k \in K$  takie, że  $\langle y_k, z \rangle = 0$  dla każdego wektora  $z \in P^*$ . Wtedy  $y_k \in \text{lin. space } P^*$ , zatem korzystając z Twierdzenia 3.3 otrzymujemy, że  $y_k \in V$ . Ostatecznie  $y_k \in V \cap V^\perp = \{0\}$ , co prowadzi do sprzeczności z założeniem  $y_k \neq 0$ . Korzystając z Faktu 2.17 otrzymujemy zatem, że

$$\dim P^* = |I| - \text{rk } A,$$

gdzie  $A$  jest  $L \times I$ -macierzą daną wzorem

$$A(l, i) := z_l(i) \quad (l \in L, i \in I).$$

Korzystając ze Stwierdzenia 1.12(1) wiemy jednak, że  $\text{rk } A = \dim V$ , co kończy dowód.  $\square$

### WNIOSEK 3.8.

Niech  $x_j$ ,  $j \in J$ , i  $y_k$ ,  $k \in K$ , będą  $I$ -wektorami. Jeśli

$$P := \text{conv. hull}\{x_j : j \in J\} + \text{cone}\{y_k : k \in K\}$$

i  $j_0 \in J$ , to

$$\dim P = \text{rk } A,$$

gdzie  $A$  jest  $((J \setminus \{j_0\}) \cup K) \times I$ -macierzą daną wzorem

$$A(l, i) := \begin{cases} x_l(i) - x_{j_0}(i) & l \in J \setminus \{j_0\}, \\ y_l(i) & l \in K, \end{cases} \quad (l \in (J \setminus \{j_0\}) \cup K, i \in I).$$

Dowód.

Bez straty ogólności możemy założyć, że  $x_{j_0} = 0$ . Korzystając z Twierdzenia 3.3 wiemy, że

$$\dim P = \dim P^{**},$$

zatem z Wniosku 3.7 wynika, że

$$\dim P = |I| - \dim \text{lin. space } P^*.$$

Korzystając z Lematu 3.1 wiemy, że

$$P^* = \{z \in \mathbb{Q}^I : A \cdot z \leq b\},$$

gdzie  $b$  jest  $((J \setminus \{j_0\}) \cup K)$ -wektorem danym wzorem

$$b(l) := \begin{cases} 1 & l \in J \setminus \{j_0\}, \\ 0 & l \in K, \end{cases} \quad (l \in (J \setminus \{j_0\}) \cup K).$$

Fakt 2.7 implikuje, że

$$\text{lin. space } P^* = \{z \in \mathbb{Q}^I : A \cdot z = 0\},$$

a więc

$$\dim \text{lin. space } P^* = |I| - \text{rk } A$$

na mocy Stwierdzenia 1.12(2). Ostatecznie

$$\dim P = |I| - \dim \text{lin. space } P^* = |I| - (|I| - \text{rk } A) = \text{rk } A. \quad \square$$

DEFINICJA.

Mówimy, że wektor  $x$  jest PUNKTEM WEWNĘTRZNYM wielościanu  $P$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x \in P$  i wektor  $x$  nie należy do żadnej ściany maksymalnej wielościanu  $P$ .

UWAGA.

Korzystając z Faktu 2.30 otrzymujemy, że wektor  $x$  jest punktem wewnętrznym wielościanu  $P$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x \in P$  i wektor  $x$  nie należy do żadnej ściany właściwej wielościanu  $P$ .

WNIOSEK 3.9.

Jeśli  $P$  jest wielościanem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  takim, że  $0 \in P$ , to wielościan  $P$  jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy wektor  $0$  jest punktem wewnętrznym wielościanu  $P^*$  i  $\dim P^* = |I|$ .

Dowód.

Założmy najpierw, że wielościan  $P$  jest ograniczony. Korzystając z Wniosku 1.54 wiemy, że istnieją  $I$ -wektory  $x_j$ ,  $j \in J$ , takie, że

$$P = \text{conv. hull}(\{0\} \cup \{x_j : j \in J\}).$$

Wtedy

$$P^* = \{z \in \mathbb{Q}^I : \langle x_j, z \rangle \leq 1 \text{ dla wszystkich } j \in J\}$$

na mocy Lematu 3.1, więc  $0$  jest punktem wewnętrznym wielościanu  $P^*$  na mocy Faktu 2.22. Ponadto

$$\dim P^* = |I| - \dim \text{lin. space } P = |I|$$

na mocy Wniosku 3.7, gdyż  $\text{lin. space } P = \{0\}$  (jako że wielościan  $P$  jest ograniczony).

Założmy teraz, że wektor  $0$  jest punktem wewnętrznym wielościanu  $P^*$  oraz  $\dim P^* = |I|$ . Ponieważ  $0 \in P^*$ , więc istnieją  $I$ -wektory  $x_j$ ,  $j \in J$ ,  $y_k$ ,  $k \in K$ , takie, że

$$P^* = \{z \in \mathbb{Q}^I : \langle x_j, z \rangle \leq 1 \text{ dla wszystkich } j \in J \text{ oraz} \\ \langle y_k, z \rangle \leq 0 \text{ dla wszystkich } k \in K\}.$$

Ponieważ  $\dim P^* = |I|$ , więc korzystając z Faktu 2.17 i Twierdzenia 2.29 możemy założyć, że zbiór

$$\{z \in P^* : \langle y_k, z \rangle = 0\}$$

jest ścianą maksymalną wielościanu  $P$  dla każdego  $k \in K$ . Ponieważ wektor  $0$  jest punktem wewnętrznym wielościanu  $P^*$ , więc  $K = \emptyset$ . Wtedy

$$P = P^{**} = \text{conv. hull}(\{0\} \cup \{x_j : j \in J\})$$

na mocy Twierdzenia 3.3 i Wniosku 3.5, więc wielościan  $P$  jest ograniczony.  $\square$

FAKT 3.10.

Jeśli  $C$  jest stożkiem wielościennym w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to

$$C^* = \{z \in \mathbb{Q}^I : \langle x, z \rangle \leq 0 \text{ dla wszystkich wektorów } x \in C\}.$$

Dowód.

Definiujemy podzbiór  $C'$  przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  wzorem

$$C' := \{z \in \mathbb{Q}^I : \langle x, z \rangle \leq 0 \text{ dla wszystkich wektorów } x \in C\}.$$

Oczywiście  $C' \subseteq C^*$ . Z drugiej strony, ustalmy wektor  $z \in C^*$  i  $x \in C$ . Wtedy

$$\langle x, z \rangle = \frac{1}{\lambda} \cdot \langle \lambda \cdot x, z \rangle \leq \frac{1}{\lambda} \cdot 1 = \frac{1}{\lambda}$$

dla każdej dodatniej liczby wymiernej  $\lambda$ , gdyż  $\lambda \cdot x \in C$ . W szczególności,  $\langle x, z \rangle \leq 0$ . Z dowolności wektora  $x$  wynika zatem, że  $z \in C'$ , co kończy dowód.  $\square$

### 3.2. WIEŁOŚCIANY BLOKUJĄCE

OZNACZENIE.

Jeśli  $X$  jest podzbiorem przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to definiujemy zbiór  $X^\uparrow$  wzorem

$$X^\uparrow := \text{conv. hull } X + \mathbb{Q}_+^I.$$

DEFINICJA.

Mówimy, że wielościan  $P$  w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  jest TYPU BLOKUJĄCEGO, jeśli  $P \subseteq \mathbb{Q}_+^I$  oraz spełniony jest warunek: jeśli  $y$  jest  $I$ -wektorem oraz istnieje wektor  $x \in P$  taki, że  $x \leq y$ , to  $y \in P$ .

LEMAT 3.11.

Jeśli  $P$  jest niepustym wielościanem typu blokującego w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to

$$\text{char. cone } P = \mathbb{Q}_+^I.$$

Dowód.

Bezpośrednio z definicji wynika, że  $\mathbb{Q}_+^I \subseteq \text{char. cone } P$ . Z drugiej strony, założmy, że  $y \in \mathbb{Q}^I \setminus \mathbb{Q}_+^I$ , i wybierzmy wektor  $x \in P$ . Wtedy istnieje dodatnia liczba wymierna  $\lambda$  taka, że  $x + \lambda \cdot y \notin \mathbb{Q}_+^I$ . W szczególności,  $x + \lambda \cdot y \notin P$ , co oznacza, wobec Lematu 2.2, że  $y \notin \text{char. cone } P$ .  $\square$

FAKT 3.12.

Wielościan  $P$  w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  jest typu blokującego wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją wektory  $c_j \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $j \in J$ , takie, że

$$P = \{c_j : j \in J\}^\uparrow.$$

Dowód.

Oczywiście, jeśli

$$P = \{c_j : j \in J\}^\uparrow$$

dla pewnych  $I$ -wektorów  $c_j \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $j \in J$ , to wielościan  $P$  jest typu blokującego.

Założmy teraz, że wielościan  $P$  jest typu blokującego. Z Wniosku 1.53 wiemy, że istnieją polytop  $Q$  oraz stożek wielościenny  $C$  takie, że  $P = Q + C$ . Bezpośrednio z definicji polytopu otrzymujemy, że istnieją  $I$ -wektory  $c_j$ ,  $j \in J$ , takie, że

$$Q = \text{conv. hull}\{c_j : j \in J\}.$$

Ponieważ  $P \subseteq \mathbb{Q}_+^I$ , więc  $c_j \geq 0$  dla każdego  $j \in J$ . Korzystając z Faktu 2.4 wiemy, że  $C = \text{char. cone } P$ . Korzystając dodatkowo z Lematu 3.11 otrzymujemy, że  $C = \mathbb{Q}_+^I$ , a więc ostatecznie

$$P = Q + C = \text{conv. hull}\{c_j : j \in J\} + \mathbb{Q}_+^I = \{c_j : j \in J\}^\uparrow. \quad \square$$

FAKT 3.13.

Wielościan  $P$  w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  jest typu blokującego wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją wektory  $d_k \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $k \in K$ , takie, że

$$P = \{x \in \mathbb{Q}_+^I : \langle d_k, x \rangle \geq 1 \text{ dla wszystkich } k \in K\}.$$

DOWÓD.

Łatwo zauważyć, że jeśli istnieją wektory  $d_k \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $k \in K$ , takie, że

$$P = \{x \in \mathbb{Q}_+^I : \langle d_k, x \rangle \geq 1 \text{ dla wszystkich } k \in K\},$$

to wielościan  $P$  jest typu blokującego.

Założmy teraz, że wielościan  $P$  jest typu blokującego. Jeśli  $P = \emptyset$ , to

$$P = \{x \in \mathbb{Q}_+^I : \langle 0, x \rangle \geq 1\},$$

więc możemy zatem założyć, że  $P \neq \emptyset$ . Wybierzmy  $J \times I$ -macierz  $A$  i  $J$ -wektor  $b$  takie, że

$$P = \{x \in \mathbb{Q}_+^I : A \cdot x \geq b\}$$

oraz

$$P \neq \{x \in \mathbb{Q}_+^I : A_{J', I} \cdot x \geq b|_{J'}\}$$

dla każdego podzbioru  $J' \subset J$ . Pokażemy, że  $A(j, i) \geq 0$  dla wszystkich  $i \in I$  i  $j \in J$ , oraz  $b(j) > 0$  dla każdego  $j \in J$ , co zakończy dowód.

Przypuśćmy najpierw, że istnieją  $i \in I$  i  $j \in J$  takie, że  $A(j, i) < 0$ . Wybierzmy wektor  $x \in P$ . Wtedy istnieje dodatnia liczba wymierna  $\lambda$  taka, że

$$\langle A(j), x + \lambda \cdot \mathbf{e}_i \rangle < b(j),$$

gdyż

$$\langle A(j), x + \lambda \cdot \mathbf{e}_i \rangle = \langle A(j), x \rangle + \lambda \cdot \langle A(j), \mathbf{e}_i \rangle = \langle A(j), x \rangle + \lambda \cdot A(j, i).$$

W szczególności,  $x + \lambda \cdot \mathbf{e}_i \notin P$ , a więc  $\mathbf{e}_i \notin \text{char. cone } P$  na mocy Lematu 2.2, co stoi w sprzeczności z Lematem 3.11.

Przypuśćmy teraz, że istnieje  $j \in J$  taki, że  $b(j) \leq 0$ . Wtedy

$$\{x \in \mathbb{Q}_+^I : \langle A(j), x \rangle \geq b(j)\} = \mathbb{Q}_+^I,$$

a więc

$$P = \{x \in \mathbb{Q}_+^I : A_{J', I} \cdot x \geq b|_{J'}\},$$

gdzie  $J' := J \setminus \{j\}$ , sprzeczność z założeniem.  $\square$

DEFINICJA.

Jeśli  $P$  jest wielościanem typu blokującego w przestrzeni  $\mathbb{Q}_+^I$ , to WIEŁOŚCIANEM BLOKUJĄCYM wielościanu  $P$  nazywamy zbiór  $B(P)$  dany wzorem

$$B(P) := \{z \in \mathbb{Q}_+^I : \langle z, x \rangle \geq 1 \text{ dla wszystkich wektorów } x \in P\}.$$

LEMAT 3.14.

Jeśli  $c_j \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $j \in J$ , to

$$B(\{c_j : j \in J\}^\uparrow) = \{z \in \mathbb{Q}_+^I : \langle c_j, z \rangle \geq 1 \text{ dla wszystkich } j \in J\}.$$

DOWÓD.

Definiujemy wielościan  $P$  w przestrzeni  $\mathbb{Q}_+^I$  wzorem

$$P := \{z \in \mathbb{Q}_+^I : \langle c_j, z \rangle \geq 1 \text{ dla wszystkich } j \in J\}.$$

Założmy najpierw, że  $z \in P$ . Jeśli  $x \in \{c_j : j \in J\}^\uparrow$ , to korzystając ze Stwierdzenia 1.42 wiemy, że istnieją nieujemne liczby wymierne  $\lambda_j$ ,  $j \in J$ , i wektor  $y \in \mathbb{Q}_+^I$  takie, że

$$\sum_{j \in J} \lambda_j = 1 \quad \text{ i } \quad x = \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot c_j + y.$$

Wtedy

$$\langle z, x \rangle = \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot \langle z, c_j \rangle + \langle z, y \rangle \geq \sum_{j \in J} \lambda_j = 1.$$

Z dowolności wektora  $x$  wynika, że  $z \in B(P)$ .

Z drugiej strony, jeśli  $z \in B(\{c_j : j \in J\}^\uparrow)$ , to oczywiście  $z \geq 0$  oraz  $\langle c_j, z \rangle \leq 1$  dla każdego  $j \in J$ , co kończy dowód.  $\square$

**Twierdzenie 3.15.**

Jeśli  $P$  jest wielościanem typu blokującego w przestrzeni  $\mathbb{Q}_+^I$ , to zbiór  $B(P)$  jest wielościanem typu blokującego oraz  $B(B(P)) = P$ .

**Dowód.**

Korzystając z Faktu 3.12 wiemy, że istnieją wektory  $c_j \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $j \in J$ , takie, że  $P = \{c_j : j \in J\}^\uparrow$ . Lemat 3.14 implikuje zatem, że

$$B(P) = \{z \in \mathbb{Q}_+^I : \langle c_j, z \rangle \geq 1 \text{ dla wszystkich } j \in J\},$$

a więc zbiór  $B(P)$  jest wielościanem typu blokującego na mocy Faktu 3.13.

Dla dowodu drugiej części, zauważmy, że oczywiście  $P \subseteq B(B(P))$ .

Ustalmy teraz wektor  $x \in \mathbb{Q}_+^I$  i przypuśćmy, że  $x \notin P$ . Korzystając z Faktu 3.13 wiemy, że istnieje wektor  $d \in \mathbb{Q}_+^I$  taki, że  $\langle d, x \rangle < 1$  oraz  $\langle d, y \rangle \geq 1$  dla każdego wektora  $y \in P$ . Wtedy  $d \in B(P)$ , zatem  $x \notin B(B(P))$ , co kończy dowód.  $\square$

**Wniosek 3.16.**

Niech  $P$  będzie wielościanem typu blokującego w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ . Jeśli  $x$  jest  $I$ -wektorem, to  $x \in P$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x \geq 0$  i  $\langle z, x \rangle \geq 1$  dla wszystkich wektorów  $z \in B(P)$ .

**Dowód.**

Zauważmy, że

$$\{x \in \mathbb{Q}_+^I : \langle z, x \rangle \geq 1 \text{ dla wszystkich wektorów } z \in B(P)\} = B(B(P)),$$

więc teza wynika natychmiast z Twierdzenia 3.15.  $\square$

**Wniosek 3.17.**

Jeśli  $d_k \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $k \in K$ , to

$$B(\{z \in \mathbb{Q}_+^I : \langle d_k, z \rangle \geq 1 \text{ dla wszystkich } k \in K\}) = \{d_k : k \in K\}^\uparrow.$$

**Dowód.**

Definiujemy wielościan  $P$  w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  wzorem

$$P := \{z \in \mathbb{Q}_+^I : \langle d_k, z \rangle \geq 1 \text{ dla wszystkich } k \in K\}.$$

Korzystając z Lematu 3.14 wiemy, że  $P = B(\{c_j : j \in J\}^\uparrow)$ . Stąd

$$B(P) = B(B(\{c_j : j \in J\}^\uparrow)) = \{c_j : j \in J\}^\uparrow$$

na mocy Twierdzenia 3.15 (i Faktu 3.12). □

**FAKT 3.18.**

Jeśli  $c_j \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $j \in J$ , i  $d_k \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $k \in K$ , to

$$\{c_j : j \in J\}^\uparrow = \{x \in \mathbb{Q}_+^I : \langle d_k, x \rangle \geq 1 \text{ dla wszystkich } k \in K\}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\{d_k : k \in K\}^\uparrow = \{x \in \mathbb{Q}_+^I : \langle c_j, x \rangle \geq 1 \text{ dla wszystkich } j \in J\}.$$

**DOWÓD.**

Definiujemy wielościany  $P$  i  $Q$  w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  wzorami

$$P := \{x \in \mathbb{Q}_+^I : \langle d_k, x \rangle \geq 1 \text{ dla wszystkich } k \in K\}$$

i

$$Q := \{x \in \mathbb{Q}_+^I : \langle c_j, x \rangle \geq 1 \text{ dla wszystkich } j \in J\}.$$

Pokażemy, że jeśli  $\{c_j : j \in J\}^\uparrow = P$ , to  $\{d_k : k \in K\}^\uparrow = Q$ . Dowód przeciwnej implikacji jest analogiczny.

Założmy zatem, że  $\{c_j : j \in J\}^\uparrow = P$ . Wtedy

$$\{c_j : j \in J\}^\uparrow = B(\{d_k : k \in K\}^\uparrow)$$

na mocy Lematu 3.14. Korzystając z Twierdzenia 3.15 otrzymujemy zatem, że

$$\{d_k : k \in K\}^\uparrow = B(B(\{d_k : k \in K\}^\uparrow)) = B(\{c_j : j \in J\}^\uparrow).$$

Ponieważ  $B(\{c_j : j \in J\}^\uparrow) = Q$  na mocy Lematu 3.14, to kończy dowód. □

**LEMAT 3.19.**

Niech  $c_j$ ,  $j \in J$ , będą  $I$ -wektorami takimi, że  $c_j \geq 0$  dla każdego  $j \in J$ . Jeśli  $P$  jest wielościanem typu blokującego, to  $P = \{c_j : j \in J\}^\uparrow$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\min\{\langle w, c_j \rangle : j \in J\} = \min\{\langle w, x \rangle : x \in P\}$$

dla każdego wektora  $w \in \mathbb{Q}_+^I$ .

Dowód.

Korzystając ze Stwierdzenia 1.42 łatwo zauważyć, że

$$(*) \quad \min\{\langle w, c_j \rangle : j \in J\} = \min\{\langle w, x \rangle : x \in \{c_j : j \in J\}^\uparrow\}$$

dla każdego wektora  $w \in \mathbb{Q}_+^I$ . W szczególności, jeśli  $P = \{c_j : j \in J\}^\uparrow$ , to

$$\min\{\langle w, c_j \rangle : j \in J\} = \min\{\langle w, x \rangle : x \in P\}$$

dla każdego wektora  $w \in \mathbb{Q}_+^I$ .

Założmy teraz, że

$$\min\{\langle w, c_j \rangle : j \in J\} = \min\{\langle w, x \rangle : x \in P\}$$

dla każdego wektora  $w \in \mathbb{Q}_+^I$ . Korzystając z Faktu 3.13 wiemy, że istnieją wektory  $d_k \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $k \in K$ , takie, że

$$P = \{x \in \mathbb{Q}_+^I : \langle d_k, x \rangle \geq 1 \text{ dla wszystkich } k \in K\}.$$

Pokażemy najpierw, że  $\{c_j : j \in J\}^\uparrow \subseteq P$ . W tym celu wystarczy pokazać, że jeśli  $y \in \{c_j : j \in J\}^\uparrow$ , to  $\langle d_k, y \rangle \geq 1$  dla każdego  $k \in K$ . Ustalmy zatem  $k \in K$ . Korzystając z równości (\*) otrzymujemy, że

$$\langle d_k, y \rangle \geq \min\{\langle d_k, c_j \rangle : j \in J\}.$$

Wykorzystując nasze założenie, wiemy, że

$$\min\{\langle d_k, c_j \rangle : j \in J\} = \min\{\langle d_k, x \rangle : x \in P\}.$$

Wreszcie z postaci zbioru  $P$  mamy, że

$$\min\{\langle d_k, x \rangle : x \in P\} \geq 1,$$

co kończy tę część dowodu.

Pokażemy teraz, że  $P \subseteq \{c_j : j \in J\}^\uparrow$ . Korzystając z Faktu 1.50 otrzymujemy, że

$$\text{char. cone } P = \{x \in \mathbb{Q}_+^I : \langle d_k, x \rangle \geq 0 \text{ dla każdego } k \in K\} = \mathbb{Q}_+^I,$$

a więc w szczególności  $\text{lin. space } P = 0$ . Wniosek 2.57 implikuje zatem, że dla udowodnienia inkluzji  $P \subseteq \{c_j : j \in J\}^\uparrow$  wystarczy pokazać, że  $y \in \{c_j : j \in J\}^\uparrow$  dla każdego wierzchołka  $y$  wielościanu  $P$ .

Ustalmy zatem wierzchołek  $y$  wielościanu  $P$ . Korzystając z Faktu 2.22 oraz Lematu 2.21 wiemy, że istnieje wektor  $w \in \mathbb{Q}_+^I$  taki, że

$$(**) \quad \langle w, y \rangle < \langle w, x \rangle$$

dla każdego wektora  $x \in P \setminus \{y\}$ . W szczególności,

$$\langle w, y \rangle = \min\{\langle w, x \rangle : x \in P\}.$$

Z naszego założenia wynika zatem, że istnieje  $j_0 \in J$  taki, że  $\langle w, y \rangle = \langle w, c_{j_0} \rangle$ . Ponieważ  $c_{j_0} \in P$  na mocy pierwszej części dowodu, więc warunek  $(**)$  implikuje, że  $y = c_{j_0}$ . W szczególności,  $y \in \{c_j : j \in J\}^\uparrow$ .  $\square$

**FAKT 3.20.**

Jeśli  $C \in \mathbb{M}_{J \times I}(\mathbb{Q}_+)$  i  $D \in \mathbb{M}_{K \times I}(\mathbb{Q}_+)$ , to

$$\min\{\langle w, C(j) \rangle : j \in J\} = \max\{y(K) : y \in \mathbb{Q}_+^K \text{ i } D^T \cdot y \leq w\}$$

dla każdego wektora  $w \in \mathbb{Q}_+^I$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\min\{\langle l, D(k) \rangle : k \in K\} = \max\{z(J) : z \in \mathbb{Q}_+^J \text{ i } C^T \cdot z \leq l\}$$

dla każdego wektora  $l \in \mathbb{Q}_+^I$ .

**Dowód.**

Dla każdego wektora  $w \in \mathbb{Q}_+^I$  definiujemy liczbę wymierną  $\alpha_w$  wzorem

$$\alpha_w := \max\{y(K) : y \in \mathbb{Q}_+^K \text{ i } D^T \cdot y \leq w\}.$$

Podobnie, dla każdego wektora  $l \in \mathbb{Q}_+^I$  definiujemy liczbę wymierną  $\beta_l$  wzorem

$$\beta_l := \max\{z(J) : z \in \mathbb{Q}_+^J \text{ i } C^T \cdot z \leq l\}.$$

Korzystając z Twierdzenia 1.61 otrzymujemy, że

$$\alpha_w = \min\{\langle w, x \rangle : x \in \mathbb{Q}_+^I \text{ i } D \cdot x \geq \mathbf{e}_K\}$$

dla każdego wektora  $w \in \mathbb{Q}_+^I$ . Zatem Lemat 3.19 implikuje, że

$$\alpha_w = \min\{\langle w, C(j) \rangle : j \in J\}$$

dla każdego wektora  $w \in \mathbb{Q}_+^I$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(*) \quad \{x \in \mathbb{Q}_+^I : D \cdot x \geq \mathbf{e}_K\} = \{C(j) : j \in J\}^\uparrow.$$

Analogicznie pokazujemy, że

$$\beta_l = \min\{\langle l, D(k) \rangle : k \in K\}$$

dla każdego wektora  $l \in \mathbb{Q}_+^I$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(**) \quad \{x \in \mathbb{Q}_+^I : C \cdot x \geq \mathbf{e}_J\} = \{D(k) : k \in K\}^\uparrow,$$

skąd wynika teza, gdyż warunki (\*) i (\*\*) są równoważne na mocy Faktu 3.18.  $\square$

LEMAT 3.21.

Jeśli  $C \in \mathbb{M}_{J \times I}(\mathbb{Q}_+)$  i  $D \in \mathbb{M}_{K \times I}(\mathbb{Q}_+)$ , to

$$\min\{\langle w, C(j) \rangle : j \in J\} = \max\{y(K) : y \in \mathbb{Q}_+^K \text{ i } D^T \cdot y \leq w\}$$

dla każdego wektora  $w \in \mathbb{Q}_+^I$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\min\{\langle w, C(j) \rangle : j \in J\} = \max\{y(K) : y \in \mathbb{Q}_+^K \text{ i } D^T \cdot y \leq w\}$$

dla każdego wektora  $w \in \mathbb{N}^I$ .

DOWÓD.

Oczywiście, jeśli

$$\min\{\langle w, C(j) \rangle : j \in J\} = \max\{y(K) : y \in \mathbb{Q}_+^K \text{ i } D^T \cdot y \leq w\}$$

dla każdego wektora  $w \in \mathbb{Q}_+^I$ , to

$$\min\{\langle w, C(j) \rangle : j \in J\} = \max\{y(K) : y \in \mathbb{Q}_+^K \text{ i } D^T \cdot y \leq w\}$$

dla każdego wektora  $w \in \mathbb{N}^I$ .

Założmy teraz, że

$$\min\{\langle w, C(j) \rangle : j \in J\} = \max\{y(K) : y \in \mathbb{Q}_+^K \text{ i } D^T \cdot y \leq w\}$$

dla każdego wektora  $w \in \mathbb{N}^I$  i ustalmy wektor  $w \in \mathbb{Q}_+^I$ . Wtedy istnieje dodatnia liczba całkowita  $\lambda$  taka, że  $\lambda \cdot w \in \mathbb{N}^I$ , zatem

$$\begin{aligned} & \min\{\langle w, C(j) \rangle : j \in J\} \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot \min\{\langle \lambda \cdot w, C(j) \rangle : j \in J\} \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot \max\{y(K) : y \in \mathbb{Q}_+^K \text{ i } D^T \cdot y \leq \lambda \cdot w\} \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot \max\{\lambda \cdot z(K) : z \in \mathbb{Q}_+^K \text{ i } D^T \cdot (\lambda \cdot z) \leq \lambda \cdot w\} \\ &= \max\{y(K) : y \in \mathbb{Q}_+^K \text{ i } D^T \cdot y \leq w\}, \end{aligned}$$

co kończy dowód.  $\square$

**Twierdzenie 3.22** (LEHMAN'S LENGTH-WIDTH INEQUALITY).

Jeśli  $P$  i  $Q$  są wielościanami typu blokującego w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to  $Q = B(P)$  wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

- (1)  $\langle x, z \rangle \geq 1$  dla wszystkich wektorów  $x \in P$  i  $z \in Q$ ,
- (2) jeśli  $l, w \in \mathbb{Q}_+^I$ , to

$$\min\{\langle l, x \rangle : x \in P\} \cdot \min\{\langle w, z \rangle : z \in Q\} \leq \langle l, w \rangle.$$

**UWAGA.**

W tym podrozdziale zakładamy, że  $\min \emptyset = \infty$  oraz  $0 \cdot \infty = 0$ .

**Dowód.**

Założmy najpierw, że  $Q = B(P)$ . Wtedy oczywiście  $\langle x, z \rangle \geq 1$  dla wszystkich wektorów  $x \in P$  i  $z \in Q$ . Ustalmy wektory  $l, w \in \mathbb{Q}_+^I$  i zdefiniujmy liczby  $\alpha$  i  $\beta$  wzorami

$$\alpha := \min\{\langle l, x \rangle : x \in P\} \quad \text{ i } \quad \beta := \min\{\langle w, z \rangle : z \in Q\}.$$

Oczywiście  $\alpha \geq 0$  i  $\beta \geq 0$ . Jeśli  $\alpha = 0$  lub  $\beta = 0$ , to

$$\alpha \cdot \beta = 0 \leq \langle l, w \rangle,$$

założmy zatem, że  $\alpha > 0$  i  $\beta > 0$ . Wtedy  $\alpha < \infty$  i  $\beta < \infty$ . Istotnie, gdyby  $\alpha = \infty$ , to  $P = \emptyset$ , więc  $0 \in Q$  i  $\beta = 0$ . Zauważmy, że  $\frac{1}{\alpha} \cdot l \in B(P) = Q$  i  $\frac{1}{\beta} \cdot w \in B(Q)$ , skąd

$$\langle l, w \rangle = \alpha \cdot \beta \cdot \left\langle \frac{1}{\alpha} \cdot l, \frac{1}{\beta} \cdot w \right\rangle \geq \alpha \cdot \beta \cdot 1 = \alpha \cdot \beta,$$

co kończy dowód w tym przypadku.

Założmy teraz, że warunki (1) i (2) są spełnione. Z warunku (1) natychmiast wynika, że  $Q \subseteq B(P)$ . Ustalmy wektor  $y \in B(P)$ . Wtedy, korzystając z warunku (2), otrzymujemy, że

$$\langle v, y \rangle = \langle y, v \rangle \geq \min\{\langle y, x \rangle : x \in P\} \cdot \min\{\langle v, z \rangle : z \in Q\} \geq 1 \cdot 1 = 1$$

dla każdego wektora  $v \in B(Q)$ . W szczególności,  $y \in Q$  na mocy Wniosku 3.16, co kończy dowód.  $\square$

**LEMAT 3.23.**

Jeśli  $P$  i  $Q$  są wielościanami typu blokującego w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to

$$\min\{\langle l, x \rangle : x \in P\} \cdot \min\{\langle w, z \rangle : z \in Q\} \leq \langle l, w \rangle$$

dla wszystkich wektorów  $l, w \in \mathbb{Q}_+^I$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\min\{\langle l, x \rangle : x \in P\} \cdot \min\{\langle w, z \rangle : z \in Q\} \leq \langle l, w \rangle$$

dla wszystkich wektorów  $l, w \in \mathbb{N}^I$ .

Dowód.

Ćwiczenie. □

WNIOSEK 3.24.

Jeśli  $P$  i  $Q$  są wielościanami typu blokującego w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to  $Q = B(P)$  wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

- (1)  $\langle x, z \rangle \geq 1$  dla wszystkich wektorów  $x \in P$  i  $z \in Q$ ,
- (2) jeśli  $l, w \in \mathbb{N}^I$ , to

$$\min\{\langle l, x \rangle : x \in P\} \cdot \min\{\langle w, z \rangle : z \in Q\} \leq \langle l, w \rangle.$$

Dowód.

Wynika natychmiast z Twierdzenia 3.22 i Lematu 3.23. □

FAKT 3.25.

Jeśli  $c_j \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $j \in J$ , i  $d_k \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $k \in K$ , to

$$B(\{c_j : j \in J\}^\uparrow) = \{d_k : k \in K\}^\uparrow$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

- (1)  $\langle c_j, d_k \rangle \geq 1$  dla wszystkich  $j \in J$  i  $k \in K$ ,
- (2) jeśli  $l, w \in \mathbb{N}^I$ , to

$$\min\{\langle l, c_j \rangle : j \in J\} \cdot \min\{\langle w, d_k \rangle : k \in K\} \leq \langle l, w \rangle.$$

Dowód.

Korzystając ze Stwierdzenia 1.42 łatwo zauważyć, że  $\langle c_j, d_k \rangle \geq 1$  dla wszystkich  $j \in J$  i  $k \in K$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\langle x, z \rangle \geq 1$  dla wszystkich wektorów  $x \in \{c_j : j \in J\}^\uparrow$  i  $z \in \{d_k : k \in K\}^\uparrow$ . Ponadto, również ze Stwierdzenia 1.42 wynika, że

$$\min\{\langle l, c_j \rangle : j \in J\} = \min\{\langle l, x \rangle : x \in \{c_j : j \in J\}^\uparrow\}$$

i

$$\min\{\langle w, d_k \rangle : d_k \in K\} = \min\{\langle w, z \rangle : z \in \{d_k : k \in K\}^\uparrow\},$$

dla wszystkich wektorów  $l, w \in \mathbb{N}^I$ , zatem teza wynika z Wniosku 3.24. □

### 3.3. ZASTOSOWANIE: MAKSYMALNY PRZEPŁYW I MINIMALNY PRZEKRÓJ

LEMAT 3.26.

Jeśli  $u$  i  $v$  są różnymi wierzchołkami grafu skierowanego  $D = (V, A, s, t)$ , to

$$x(\delta^+(u)) - x(\delta^-(u)) \leq x(C)$$

dla każdego  $u$ - $v$ -przepływu  $x$  w grafie  $D$  i każdego  $u$ - $v$ -przekroju  $C$  w grafie  $D$ .

Dowód.

Niech  $W$  będzie zbiorem tych wierzchołków  $w$  w grafie  $D$ , dla których istnieje  $u$ - $w$  droga w grafie  $(V, A \setminus C, s|_{A \setminus C}, t|_{A \setminus C})$ . Wtedy  $u \in W$  i  $v \notin W$ , zatem korzystając z Lematu 1.64 otrzymujemy, że

$$x(\delta^+(u)) - x(\delta^-(u)) = x(\delta^+(W)) - x(\delta^-(W)).$$

Ponieważ  $\delta^+(W) \subseteq C$ , więc otrzymujemy tezę.  $\square$

OZNACZENIE.

Jeśli  $\sigma = (u, a_1, \dots, a_n, v)$  jest drogą w grafie skierowanym  $D = (V, A, s, t)$ , to definiujemy  $A$ -wektor  $\mathbf{e}_\sigma$  wzorem

$$\mathbf{e}_\sigma := \sum_{p \in [1, n]} \mathbf{e}_{a_p}.$$

Ponadto, jeśli  $x$  jest  $A$ -wektorem, to definiujemy liczbę  $x(\sigma)$  wzorem

$$x(\sigma) := \langle x, \mathbf{e}_\sigma \rangle = \sum_{p \in [1, n]} x(a_p).$$

LEMAT 3.27.

Niech  $u$  i  $v$  będą różnymi wierzchołkami grafu skierowanego  $D = (V, A, s, t)$  oraz  $w \in \mathbb{Q}_+^A$ . Jeśli

$$P := \{x \in \mathbb{Q}_+^A : \text{wektor } x \text{ jest } u\text{-}v\text{-przepływem w grafie } D \text{ takim, że } x \leq w\}$$

i

$$Q := \left\{ y \in \mathbb{Q}_+^{\mathcal{P}} : \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} y(\sigma) \cdot \mathbf{e}_\sigma \leq w \right\},$$

gdzie  $\mathcal{P}$  jest zbiorem wszystkich prostych  $u$ - $v$ -dróg w grafie  $D$ , to

$$\max\{x(\delta^+(u)) - x(\delta^-(u)) : x \in P\} = \max\{y(\mathcal{P}) : y \in Q\}$$

i

$$\max\{x(\delta^+(u)) - x(\delta^-(u)) : x \in P \cap \mathbb{N}^A\} = \max\{y(\mathcal{P}) : y \in Q \cap \mathbb{N}^{\mathcal{P}}\}.$$

Dowód.

Zauważmy, że wektor  $\mathbf{e}_\sigma$  jest  $u$ - $v$ -przepływem dla każdej  $u$ - $v$ -drogi  $\sigma$ . Zatem funkcja  $F : Q \rightarrow P$ , dana wzorem

$$F(y) := \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} y(\sigma) \cdot \mathbf{e}_\sigma \quad (y \in Q),$$

jest poprawnie określona. Zauważmy, że

$$\mathbf{e}_\sigma(\delta^+(u)) - \mathbf{e}_\sigma(\delta^-(u)) = 1$$

dla każdej  $u$ - $v$ -drogi  $\sigma$ , więc

$$F(y)(\delta^+(u)) - F(y)(\delta^-(u)) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} y(\sigma) = y(\mathcal{P})$$

dla każdego wektora  $y \in Q$ . Dla zakończenia dowodu wystarczy zatem pokazać, że dla każdego przepływu  $x \in P$  takiego, że  $x(\delta^+(u)) - x(\delta^-(u)) \geq 0$ , istnieje wektor  $y \in Q$  taki, że

$$x(\delta^+(u)) - x(\delta^-(u)) = y(\mathcal{P}).$$

Ponadto, jeśli  $x \in \mathbb{N}^A$ , to  $y \in \mathbb{N}^P$ . Powyższy fakt udowodnimy przez indukcję ze względu na  $|\mathcal{P}|$ .

Ustalmy przepływ  $x \in P$  taki, że  $x(\delta^+(u)) - x(\delta^-(u)) \geq 0$ .

Założmy najpierw, że  $|\mathcal{P}| = 0$ . Wtedy zbiór  $\emptyset$  jest  $u$ - $v$ -przekrojem w grafie  $D$ , zatem

$$x(\delta^+(u)) - x(\delta^-(u)) \leq x(\emptyset) = 0$$

na mocy Lematu 3.26. Ostatecznie,

$$x(\delta^+(u)) - x(\delta^-(u)) = 0 = 0(\mathcal{P}).$$

Założmy teraz, że  $|\mathcal{P}| > 0$  i wybierzmy prostą  $u$ - $v$ -drogę  $\sigma = (u, a_1, \dots, a_n, v)$ . Wybierzmy  $p \in [1, n]$  takie, że

$$x(a_p) = \min\{x(a_q) : q \in [1, n]\}.$$

Definiujemy zbiór  $A'$  i graf  $D'$  wzorami

$$A' := A \setminus \{a_p\} \quad \text{ i } \quad D' := (V, A', s|_{A'}, t|_{A'}).$$

Ponadto, definiujemy  $A'$ -wektory  $x'$  i  $w'$  wzorami

$$x' := (x - x(a_p) \cdot \mathbf{e}_\sigma)|_{A'} \quad \text{ i } \quad w' := (w - x(a_p) \cdot \mathbf{e}_\sigma)|_{A'}.$$

Jeśli  $\mathcal{P}'$  jest zbiorem wszystkich  $u$ - $v$ -dróg w grafie  $D'$ , to  $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ , zatem z założenia indukcyjnego wiemy, że istnieje wektor  $y' \in \mathbb{Q}_+^{\mathcal{P}'}$  taki, że

$$x'(\delta^+(u)) - x'(\delta^-(u)) = y'(\mathcal{P}').$$

i

$$\sum_{\tau \in \mathcal{P}'} y'(\tau) \cdot \mathbf{e}_\tau \leq w'.$$

Ponadto  $y' \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}'}$ , jeśli  $x \in \mathbb{N}^A$ . Jeśli zdefiniujemy  $\mathcal{P}$ -wektor  $y$  wzorem

$$y(\tau) := \begin{cases} y'(\tau) & \tau \in \mathcal{P}', \\ x(a_p) & \tau = \sigma, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases} \quad (\tau \in \mathcal{P}),$$

to  $y \in Q$  i

$$x(\delta^+(u)) - x(\delta^-(u)) = y(\mathcal{P}),$$

co kończy dowód. □

**Twierdzenie 3.28** (Twierdzenie o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju).

Niech  $u$  i  $v$  będą różnymi wierzchołkami grafu skierowanego  $D = (V, A, s, t)$  i  $w \in \mathbb{Q}_+^A$ . Jeśli

$$P := \{x \in \mathbb{Q}_+^A : \text{wektor } x \text{ jest } u\text{-}v\text{-przepływem w grafie } D \text{ takim, że } x \leq w\}$$

to

$$\begin{aligned} \max\{x(\delta^+(u)) - x(\delta^-(u)) : x \in P\} \\ = \min\{w(C) : C \text{ jest } u\text{-}v\text{-przekrojem w grafie } D\}. \end{aligned}$$

**Dowód.**

Korzystając z Lematu 3.27 wiemy, że

$$\max\{x(\delta^+(u)) - x(\delta^-(u)) : x \in P\} = \max\{y(\mathcal{P}) : y \in Q\},$$

gdzie

$$Q := \left\{ y \in \mathbb{Q}_+^{\mathcal{P}} : \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} y(\sigma) \cdot \mathbf{e}_\sigma \leq w \right\},$$

a  $\mathcal{P}$  jest zbiorem wszystkich prostych  $u$ - $v$ -dróg w grafie  $D$ . Wystarczy zatem pokazać, że

$$\max\{y(\mathcal{P}) : y \in Q\} = \min\{w(C) : C \text{ jest } u\text{-}v\text{-przekrojem w grafie } D\}.$$

W tym celu wystarczy, korzystając z Faktu 3.20 i Lematu 3.21, udowodnić, że  $\alpha_l = \beta_l$  dla każdego wektora  $l \in \mathbb{N}^A$ , gdzie

$$\alpha_l := \min\{l(\sigma) : \sigma \in \mathcal{P}\} \quad \text{ i } \quad \beta_l := \max\{z(\mathcal{C}) : z \in R_l\},$$

przy czym

$$R_l := \left\{ z \in \mathbb{Q}_+^{\mathcal{C}} : \sum_{C \in \mathcal{C}} z(C) \cdot \mathbf{e}_C \leq l \right\},$$

a  $\mathcal{C}$  jest zbiorem wszystkich  $u$ - $v$ -przekrojów w grafie  $D$ . Ustalmy zatem wektor  $l \in \mathbb{N}^A$ .

Udowodnimy najpierw nierówność  $\alpha_l \geq \beta_l$ . W tym celu ustalmy prostą  $u$ - $v$ -drogę  $\sigma = (u, a_1, \dots, a_n, v)$  i zdefiniujmy zbiory  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$  wzorami

$$\mathcal{C}_p := \{C \in \mathcal{C} : a_p \in C\} \quad (p \in [1, n]).$$

Wtedy  $\mathcal{C} = \bigcup_{p \in [1, n]} \mathcal{C}_p$ . Ponadto, jeśli  $z \in \mathbb{Q}^{\mathcal{C}}$  i  $p \in [1, n]$ , to

$$z(\mathcal{C}_p) = \sum_{C \in \mathcal{C}} z(C) \cdot \mathbf{e}_C(a_p).$$

Stąd

$$z(\mathcal{C}) \leq \sum_{p \in [1, n]} z(\mathcal{C}_p) = \sum_{p \in [1, n]} \sum_{C \in \mathcal{C}} z(C) \cdot \mathbf{e}_C(a_p) \leq \sum_{p \in [1, n]} l(a_p) = l(\sigma)$$

dla każdego wektora  $z \in R_l$ . Z dowolności drogi  $\sigma$  wynika, że

$$\beta_l = \max\{z(\mathcal{C}) : z \in R_l\} \leq \min\{l(\sigma) : \sigma \in \mathcal{P}\} = \alpha_l.$$

Dla dowodu nierówności  $\alpha_l \leq \beta_l$  zdefiniujmy dla każdego wierzchołka  $w \in V$  liczbę  $d_w \in \mathbb{N}$  wzorem

$$d_w := \min\{l(\sigma) : \sigma \text{ jest } u\text{-}w\text{-drogą}\}.$$

Dla każdego  $p \in [1, \alpha_l]$  definiujemy zbiór  $C_p$  wzorem

$$C_p := \{a \in A : 0 < p - d_{s(a)} \leq l(a)\}.$$

Zauważmy, że zbiór  $C_p$  jest  $u$ - $v$ -przekrojem dla każdego  $p \in [1, \alpha_l]$ , zatem możemy zdefiniować funkcję  $\Phi : [1, \alpha_l] \rightarrow \mathcal{C}$  wzorem

$$\Phi(p) := C_p \quad (p \in [1, \alpha_l]).$$

Jeśli zdefiniujemy wektor  $z \in \mathbb{Q}_+^{\mathcal{C}}$  wzorem

$$z(C) := |\Phi^{-1}(C)| \quad (C \in \mathcal{C}),$$

to

$$z(\mathcal{C}) = \sum_{C \in \mathcal{C}} |\Phi^{-1}(C)| = |\Phi^{-1}(\mathcal{C})| = |[1, \alpha_l]| = \alpha_l.$$

Ponadto, jeśli  $p \in [1, \alpha_l]$  i  $a \in C_p$ , to  $p \in [d_v + 1, d_v + l_{(v,u)}]$ , a więc (podobnie jak powyżej) otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \sum_{C \in \mathcal{C}} z(C) \cdot \mathbf{e}_C(a) &= \sum_{C \in \mathcal{C}} |\Phi^{-1}(C)| \cdot \mathbf{e}_C(a) = \sum_{C \in \mathcal{C}} \sum_{p \in \Phi^{-1}(C)} \mathbf{e}_{C_p}(a) \\ &= \sum_{p \in [1, \alpha_l]} \mathbf{e}_{C_p}(a) = |\{p \in [1, \alpha_l] : a \in C_p\}| \leq l(a) \end{aligned}$$

dla każdej strzałki  $a \in A$ , zatem  $z \in R_l$ , co kończy dowód.  $\square$

### WNIOSEK 3.29.

Niech  $u$  i  $v$  będą wierzchołkami grafu skierowanego  $D = (V, A, s, t)$ . Jeśli  $\mathcal{P}$  oznacza zbiór wszystkich prostych  $u$ - $v$ -dróg, zaś  $\mathcal{C}$  zbiór wszystkich  $u$ - $v$ -przekrojów w grafie  $D$ , to

$$B(\{\mathbf{e}_\sigma : \sigma \in \mathcal{P}\}^\uparrow) = \{\mathbf{e}_C : C \in \mathcal{C}\}^\uparrow.$$

Dowód.

Założmy najpierw, że  $u = v$ . Wtedy  $(u, v) \in \mathcal{P}$  i  $\mathcal{C} = \emptyset$ . Ponieważ  $\mathbf{e}_{(u,v)} = 0$ , więc

$$\{\mathbf{e}_\sigma : \sigma \in \mathcal{P}\}^\uparrow = \mathbb{Q}_+^A,$$

skąd

$$B(\{\mathbf{e}_\sigma : \sigma \in \mathcal{P}\}^\uparrow) = \emptyset = \{\mathbf{e}_C : C \in \mathcal{C}\}^\uparrow.$$

Założmy teraz, że  $u \neq v$ . Korzystając z Faktu 3.25 wystarczy pokazać, że

- (1)  $\langle \mathbf{e}_\sigma, \mathbf{e}_C \rangle \geq 1$  dla wszystkich  $u$ - $v$ -dróg  $\sigma$  i  $u$ - $v$ -przekrojów  $C \in \mathcal{C}$ ,
- (2) jeśli  $l, w \in \mathbb{Q}_+^A$ , to

$$\min\{l(\sigma) : \sigma \in \mathcal{P}\} \cdot \min\{w(C) : C \in \mathcal{C}\} \leq \langle l, w \rangle.$$

Warunek (1) wynika natychmiast z definicji  $u$ - $v$ -przekroju, gdyż jeśli  $\sigma = (u, a_1, \dots, a_n, v)$  jest  $u$ - $v$ -drogą oraz  $C \subseteq A$ , to

$$\langle \mathbf{e}_\sigma, \mathbf{e}_C \rangle = |\{p \in [1, n] : a_p \in C\}|.$$

Dla dowodu warunku (2) ustalmy wektory  $l, w \in \mathbb{Q}_+^A$ . Zauważmy, że na mocy Twierdzenia 3.28 i Lematu 3.27 mamy, że

$$\min\{w(C) : C \in \mathcal{C}\} = \max\{y(\mathcal{P}) : y \in Q\},$$

gdzie

$$Q := \left\{ y \in \mathbb{Q}_+^{\mathcal{P}} : \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} y(\sigma) \cdot \mathbf{e}_\sigma \leq w \right\}.$$

Ponadto, jeśli zdefiniujemy liczbę  $\alpha$  wzorem

$$\alpha := \min\{l(\sigma) : \sigma \in \mathcal{P}\},$$

to

$$\begin{aligned} \alpha \cdot y(\mathcal{P}) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} \alpha \cdot y(\sigma) \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} l(\sigma) \cdot y(\sigma) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} \langle l, \mathbf{e}_\sigma \rangle \cdot y(\sigma) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} \langle l, y(\sigma) \cdot \mathbf{e}_\sigma \rangle = \left\langle l, \sum_{\sigma \in \mathcal{P}} y(\sigma) \cdot \mathbf{e}_\sigma \right\rangle \leq \langle l, w \rangle \end{aligned}$$

dla każdego wektora  $y \in Q$ , co kończy dowód. □

### 3.4. WIELOŚCIANY ANTYBLOKUJĄCE

OZNACZENIE.

Jeśli  $X \subseteq \mathbb{Q}_+^I$ , to definiujemy zbiór  $X^\downarrow$  wzorem

$$X^\downarrow := \begin{cases} \{y \in \mathbb{Q}_+^I : \text{istnieje wektor } x \in \text{conv. hull } X \text{ taki, że } y \leq x\} \\ X \neq \emptyset, \\ \{0\} & X = \emptyset. \end{cases}$$

Ponadto, jeśli  $M \subseteq I$ , to definiujemy zbiór  $X_M^\downarrow$  wzorem

$$X_M^\downarrow := X^\downarrow + \mathbb{Q}_+^M.$$

LEMAT 3.30.

Jeśli  $X \subseteq \mathbb{Q}_+^I$ , to zbiór  $X^\downarrow$  jest wypukły.

Dowód.

Jeśli  $X = \emptyset$ , to teza jest oczywista. Załóżmy zatem, że  $X \neq \emptyset$  i ustalmy wektory  $y_1, y_2 \in X^\downarrow$  oraz nieujemne liczby wymierne  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  takie, że  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ . Z definicji zbioru  $X^\downarrow$  wiemy, że istnieją wektory  $x_1, x_2 \in \text{conv. hull } X$  takie, że  $y_1 \leq x_1$  i  $y_2 \leq x_2$ . Wtedy

$$\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 \leq \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2.$$

Ponadto, z wypukłości zbioru  $\text{conv. hull } X$  wynika, że  $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in \text{conv. hull } X$ . Korzystając ponownie z definicji zbioru  $X^\downarrow$  otrzymujemy, że  $\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 \in X^\downarrow$ , co kończy dowód.  $\square$

LEMAT 3.31.

Jeśli  $x_j \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $j \in J$ , i  $J \neq \emptyset$ , to

$$\{x_j : j \in J\}^\downarrow = \text{conv. hull}\{x_j|_L : j \in J \text{ i } L \subseteq I\}.$$

Dowód.

Oczywiście

$$\text{conv. hull}\{x_j|_L : j \in J \text{ i } L \subseteq I\} \subseteq \{x_j : j \in J\}^\downarrow.$$

Dla dowodu inkluzji przeciwnej zdefiniujmy dla każdego wektora  $y \in \{x_j : j \in J\}^\downarrow$  liczbę  $d(y)$  wzorem

$$d(y) := \min\{\#\{i \in I : x(i) \neq y(i)\} : x \in \text{conv. hull}\{x_j : j \in J\} \text{ i } y \leq x\}.$$

Przez indukcję na liczbę  $d(y)$  pokażemy, że

$$y \in \text{conv. hull}\{x_j|_L : j \in J \text{ i } L \subseteq I\}$$

dla każdego wektora  $y \in \{x_j : j \in J\}^\downarrow$ .

Ustalmy zatem wektor  $y \in \{x_j : j \in J\}^\downarrow$ . Jeśli  $d(y) = 0$ , to  $y \in \text{conv. hull}\{x_j : j \in J\}$ , a więc również  $y \in \text{conv. hull}\{x_j|_L : j \in J \text{ i } L \subseteq I\}$ . Załóżmy zatem, że  $d(y) > 0$ , i wybierzmy wektor  $x \in \text{conv. hull}\{x_j : j \in J\}$  taki, że  $y \leq x$  i

$$\#\{i \in I : x(i) \neq y(i)\} = d(y).$$

Wyberzmy  $i_0 \in I$  takie, że  $y(i_0) < x(i_0)$ , i zdefiniujmy wektor  $z$  wzorem

$$z := y + (x(i_0) - y(i_0)) \cdot \mathbf{e}_{i_0}.$$

Zauważmy, że  $0 \leq z \leq x$ , więc  $z \in \{x_j : j \in J\}^\downarrow$ . Ponadto,

$$\{i \in I : x(i) \neq z(i)\} \subset \{i \in I : x(i) \neq y(i)\},$$

więc  $d(z) < d(y)$ , zatem  $z \in \text{conv.hull}\{x_j|_L : x_j \in X \text{ i } L \subseteq I\}$  na mocy założenia indukcyjnego. Korzystając ze Stwierdzenia 1.42 otrzymujemy, że również

$$z|_{I \setminus \{i_0\}} \in \text{conv.hull}\{x_j|_L : x_j \in X \text{ i } L \subseteq I\}.$$

Wreszcie,

$$y = \frac{y(j)}{x(j)} \cdot z + \left(1 - \frac{y(j)}{x(j)}\right) \cdot z|_{I \setminus \{i_0\}},$$

co kończy dowód. □

#### DEFINICJA.

Mówimy, że wielościan  $P$  w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  jest TYPU ANTYBLOKUJĄCEGO, jeśli  $0 \in P$ ,  $P \subseteq \mathbb{Q}_+^I$  oraz spełniony jest warunek: jeśli  $y \in \mathbb{Q}_+^I$  oraz istnieje wektor  $x \in P$  taki, że  $y \leq x$ , to  $y \in P$ .

#### LEMAT 3.32.

Jeśli  $P$  jest wielościanem typu antyblokującego w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to istnieje podzbiór  $M \subseteq I$  taki, że

$$\text{char.cone } P = \mathbb{Q}_+^M.$$

#### DOWÓD.

Wiemy, że  $0 \in P$ , więc zbiór  $P$  jest niepusty. Ponieważ  $P \subseteq \mathbb{Q}_+^I$ , więc także  $\text{char.cone } P \subseteq \mathbb{Q}_+^I$  (porównaj dowodu Lematu 3.11). Zdefiniujmy podzbiór  $M \subseteq I$  wzorem

$$M := \{i \in I : \text{istnieje wektor } y \in \text{char.cone } P \text{ taki, że } y(i) > 0\}.$$

Pokażemy, że  $\text{char.cone } P = \mathbb{Q}_+^M$ . Oczywiście  $\text{char.cone } P \subseteq \mathbb{Q}_+^M$ . Z drugiej strony, dla każdego  $i \in M$  istnieje wektor  $y_i \in \text{char.cone } P$  taki, że  $y_i(i) > 0$ . Wtedy, dla dowolnych wektora  $x \in \mathbb{Q}_+^M$  oraz liczby  $\lambda \in \mathbb{Q}_+$  mamy

$$0 + \lambda \cdot x = \lambda \cdot x \leq \sum_{i \in M} \lambda \cdot \frac{x(i)}{y_i(i)} \cdot y_i = 0 + \sum_{i \in M} \lambda \cdot \frac{x(i)}{y_i(i)} \cdot y_i.$$

Zauważmy, że  $0 + \sum_{i \in M} \lambda \cdot \frac{x(i)}{y_i(i)} \cdot y_i \in P$ , ponieważ  $0 \in P$  i  $y_i \in \text{char.cone } P$  dla każdego  $i \in M$ . Ponieważ wielościan  $P$  jest typu antyblokującego, więc  $0 + \lambda \cdot x \in P$ . Stąd  $x \in \text{char.cone } P$  na mocy Faktu 2.3. □

FAKT 3.33.

Wielościan  $P$  w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  jest typu antyblokującego wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją wektory  $c_j \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $j \in J$ , oraz podzbiór  $M \subseteq I$  takie, że

$$P = \{c_j : j \in J\}_M^\downarrow.$$

Dowód.

Oczywiście, jeśli

$$P = \{c_j : j \in J\}_M^\downarrow$$

dla pewnych wektorów  $c_j \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $j \in J$ ,  $J \neq \emptyset$ , oraz podzbioru  $M \subseteq I$ , to wielościan  $P$  jest typu antyblokującego.

Założmy teraz, że wielościan  $P$  jest typu antyblokującego. Z Wniosku 1.53 wiemy, że istnieją polytop  $Q$  oraz stożek wielościenny  $C$  takie, że  $P = Q + C$ . Bezpośrednio z definicji polytopu otrzymujemy, że istnieją  $I$ -wektory  $c_j$ ,  $j \in J$ , takie, że

$$Q = \text{conv. hull}\{c_j : j \in J\}.$$

Ponieważ  $P \neq \emptyset$ , więc  $Q \neq \emptyset$ , zatem  $J \neq \emptyset$ . Ponieważ  $P \subseteq \mathbb{Q}_+^I$ , więc  $c_j \geq 0$  dla każdego  $j \in J$ . Korzystając z Faktu 2.4 wiemy, że  $C = \text{char. cone } P$ . Korzystając dodatkowo z Lematu 3.32 otrzymujemy, że istnieje podzbiór  $M \subseteq I$  taki, że  $C = \mathbb{Q}_+^M$ . Stąd

$$\begin{aligned} P &= Q + C = \text{conv. hull}\{c_j : j \in J\} + \mathbb{Q}_+^M \\ &\subseteq \{c_j : j \in J\}^\downarrow + \mathbb{Q}_+^M = \{c_j : j \in J\}_M^\downarrow. \end{aligned}$$

Z drugiej strony, ponieważ wielościan  $P$  jest typu antyblokującego, więc  $c_j|_L \in P$  dla wszystkich  $j \in J$  i podzbiorów  $L \subseteq I$ . W szczególności, korzystając z Lematu 3.31 otrzymujemy, że

$$\{c_j : j \in J\}^\downarrow \subseteq P.$$

Ponieważ  $\mathbb{Q}_+^M = \text{char. cone } P$ , więc

$$\{c_j : j \in J\}_M^\downarrow = \{c_j : j \in J\}^\downarrow + \mathbb{Q}_+^M \subseteq P + \text{char. cone } P = P,$$

co kończy dowód. □

FAKT 3.34.

Wielościan  $P$  w przestrzeni  $\mathbb{Q}_+^I$  jest typu antyblokującego wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją wektory  $d_k \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $k \in K$ , oraz podzbiór  $N \subseteq I$  takie, że

$$P = \{x \in \mathbb{Q}_+^I : \langle d_k, x \rangle \leq 1 \text{ dla wszystkich } k \in K \text{ i } x|_N = 0\}.$$

Dowód.

Łatwo sprawdzić, że jeśli istnieją  $d_k \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $k \in K$ , oraz podzbiór  $N \subseteq I$  takie, że

$$P = \{x \in \mathbb{Q}_+^I : \langle d_k, x \rangle \leq 1 \text{ dla wszystkich } k \in K \text{ i } x|_N = 0\}.$$

to wielościan  $P$  jest typu antyblokującego.

Założmy teraz, że wielościan  $P$  jest typu antyblokującego. Istnieją  $J \times I$ -macierz  $A$  i  $J$ -wektor  $b$  takie, że

$$P = \{x \in \mathbb{Q}_+^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Ponieważ  $0 \in P$ , więc  $b \geq 0$ . Definiujemy  $J \times I$ -macierz  $A'$  wzorem

$$A'(j, i) := \max\{0, A(j, i)\} \quad (i \in I, j \in J).$$

Oczywiście

$$\{x \in \mathbb{Q}_+^I : A' \cdot x \leq b\} \subseteq P.$$

Z drugiej strony, ustalmy wektor  $x \in P$  oraz indeks  $j \in J$ . Definiujemy  $I$ -wektor  $y$  wzorem

$$y(i) := \begin{cases} 0 & A(j, i) < 0, \\ x(j) & A(j, i) \geq 0, \end{cases} \quad (i \in I).$$

Wtedy  $0 \leq y \leq x$ , więc  $y \in P$ , gdyż wielościan  $P$  jest typu antyblokującego. Stąd

$$\begin{aligned} \langle A'(j), x \rangle &= \sum_{i \in I} A'(j, i) \cdot x(i) = \sum_{\substack{i \in I \\ A(j, i) \geq 0}} A(j, i) \cdot x(i) \\ &= \sum_{\substack{i \in I \\ A(j, i) \geq 0}} A(j, i) \cdot y(i) = \sum_{i \in I} A(j, i) \cdot y(i) = \langle A(j), y \rangle \leq b(j). \end{aligned}$$

Z dowolności wektora  $x$  oraz indeksu  $j$  wynika, że

$$P = \{x \in \mathbb{Q}_+^I : A' \cdot x \leq b\}.$$

Z powyższego rozumowania wynika, że istnieją wektory  $c_l \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $l \in L$ ,  $d_k \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $k \in K$ , takie, że

$$P = \{x \in \mathbb{Q}_+^I : \langle c_l, x \rangle \leq 0 \text{ dla każdego } l \in L \text{ i}$$

$$\langle d_k, x \rangle \leq 1 \text{ dla każdego } k \in K\}.$$

Definiujemy podzbiór  $N \subseteq I$  wzorem

$$N := \bigcup_{l \in L} \{i \in I : c_l(i) > 0\}.$$

Wtedy

$$P = \{x \in \mathbb{Q}_+^I : \langle d_k, x \rangle \leq 1 \text{ dla wszystkich } k \in K \text{ i } x|_N = 0\}. \quad \square$$

DEFINICJA.

Jeśli  $P$  jest wielościanem typu antyblokującego w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to WIEŁOŚCIANEM ANTYBLOKUJĄCY wielościanu  $P$  nazywamy zbiór  $A(P)$  dany wzorem

$$A(P) := \{z \in \mathbb{Q}_+^I : \langle x, z \rangle \leq 1 \text{ dla wszystkich wektorów } x \in P\}.$$

LEMAT 3.35.

Jeśli  $c_j \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $j \in J$ , i  $M \subseteq I$ , to

$$\begin{aligned} A(\{c_j : j \in J\}_M^\downarrow) \\ = \{z \in \mathbb{Q}_+^I : \langle c_j, z \rangle \leq 1 \text{ dla wszystkich } j \in J \text{ i } z|_M = 0\}. \end{aligned}$$

DOWÓD.

Jeśli  $J = \emptyset$ , to  $\{c_j : j \in J\}_M^\downarrow = \mathbb{Q}_+^M$  i

$$A(\{c_j : j \in J\}_M^\downarrow) = \mathbb{Q}_+^{I \setminus M}.$$

Założmy zatem, że  $J \neq \emptyset$ . Z Lematu 3.31 wiemy, że

$$\{c_j : j \in J\}_M^\downarrow = \text{conv. hull}\{x_j|_L : j \in J \text{ i } L \subseteq I\} + \text{cone}\{e_i : i \in M\}.$$

Korzystając z Lematu 3.1 otrzymujemy zatem, że

$$\begin{aligned} A(\{c_j : j \in J\}_M^\downarrow) &= \{z \in \mathbb{Q}_+^I : z|_M = 0 \\ &\text{oraz } \langle c_j|_L, z \rangle \leq 1 \text{ dla wszystkich } j \in J \text{ i podzbiorów } L \subseteq I\}. \end{aligned}$$

Zauważmy jednak, że jeśli  $j \in J$ ,  $L \subseteq I$  i  $z \in \mathbb{Q}_+^I$ , to

$$\langle c_j|_L, z \rangle \leq \langle c_j, z \rangle$$

co kończy dowód. □

**Twierdzenie 3.36.**

Jeśli  $P$  jest wielościanem typu antyblokującego w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to zbiór  $A(P)$  jest wielościanem typu antyblokującego i  $A(A(P)) = P$ .

**Dowód.**

Z Faktu 3.33 wiemy, że istnieją wektory  $c_j \in \mathbb{Q}_+^I$  takie, że

$$P = \{c_j : j \in J\}_M^\downarrow.$$

Korzystając z Lematu 3.35 otrzymujemy zatem, że

$$A(P) = \{z \in \mathbb{Q}_+^I : \langle c_j, z \rangle \leq 1 \text{ dla wszystkich } j \in J \text{ i } z|_M = 0\}.$$

Korzystając z Faktu 3.34 wnioskujemy, że zbiór  $A(P)$  jest wielościanem typu antyblokującego.

Dla dowodu drugiej części zauważmy, że oczywiście  $P \subseteq A(A(P))$ .

Dla dowodu inkluzji przeciwnej wybierzmy, korzystając z Faktu 3.34, wektory  $d_k \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $k \in K$ , oraz podzbiór  $N \subseteq I$  takie, że

$$P = \{x \in \mathbb{Q}_+^I : \langle d_k, x \rangle \leq 1 \text{ dla wszystkich } k \in K \text{ i } x|_N = 0\}.$$

Pokażemy najpierw, że jeśli  $x \in A(A(P))$ , to  $x|_N = 0$ . Istotnie, ustalmy  $i \in N$ . Wtedy

$$\langle y, \lambda \cdot \mathbf{e}_i \rangle = \lambda \cdot y(i) = 0$$

dla każdego wektora  $y \in P$  i każdej nieujemnej liczby wymiernej  $\lambda$ . Stąd  $\lambda \cdot \mathbf{e}_i \in A(P)$  dla każdej nieujemnej liczby wymiernej  $\lambda$ , zatem jeśli  $x \in A(A(P))$ , to

$$x(i) = \frac{1}{\lambda} \cdot \langle \lambda \cdot \mathbf{e}_i, x \rangle \leq \frac{1}{\lambda} \cdot 1 = \frac{1}{\lambda}$$

dla każdej dodatniej liczby wymiernej  $\lambda$ . Ostatecznie  $x(i) = 0$ .

Ustalmy teraz wektor  $x \in \mathbb{Q}_+^I$  taki, że  $x|_N = 0$ , i przypuśćmy, że  $x \notin P$ . Wtedy istnieje  $k \in K$  takie, że  $\langle d_k, x \rangle > 1$ . Ponieważ  $d_k \in A(P)$ , więc  $x \notin A(A(P))$ , co kończy dowód.  $\square$

**Wniosek 3.37.**

Niech  $P$  będzie wielościanem typu antyblokującego w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ . Jeśli  $x$  jest  $I$ -wektorem, to  $x \in P$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x \geq 0$  i  $\langle z, x \rangle \leq 1$  dla wszystkich wektorów  $z \in A(P)$ .

Dowód.

Zauważmy, że

$$\{x \in \mathbb{Q}_+^I : \langle z, x \rangle \leq 1 \text{ dla wszystkich wektorów } z \in A(P)\} = A(A(P)),$$

więc teza wynika natychmiast z Twierdzenia 3.36.  $\square$

WNIOSEK 3.38.

Jeśli  $d_k \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $k \in K$ ,  $N \subseteq I$  i

$$P = \{x \in \mathbb{Q}_+^I : \langle d_k, x \rangle \leq 1 \text{ dla wszystkich } k \in K \text{ i } x|_N = 0\},$$

to

$$A(P) = \{d_k : k \in K\}_N^\downarrow.$$

Dowód.

Korzystając z Lematu 3.35 wiemy, że

$$A(\{d_k : k \in K\}_N^\downarrow) = P.$$

Stąd

$$A(P) = A(A(\{d_k : k \in K\}_N^\downarrow)) = \{d_k : k \in K\}_N^\downarrow$$

na mocy Twierdzenia 3.36 (i Faktu 3.33), co kończy dowód.  $\square$

FAKT 3.39.

Jeśli  $c_j \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $j \in J$ ,  $d_k \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $k \in K$ , to

$$\{c_j : j \in J\}^\downarrow = \{x \in \mathbb{Q}_+^I : \langle d_k, x \rangle \leq 1 \text{ dla wszystkich } k \in K\}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\{d_k : k \in K\}^\downarrow = \{x \in \mathbb{Q}_+^I : \langle c_j, x \rangle \leq 1 \text{ dla wszystkich } j \in J\}.$$

Dowód.

Jeśli

$$\{c_j : j \in J\}^\downarrow = \{x \in \mathbb{Q}_+^I : \langle d_k, x \rangle \leq 1 \text{ dla wszystkich } k \in K\}$$

to

$$\{c_j : j \in J\}^\downarrow = A(\{d_k : k \in K\}^\downarrow)$$

na mocy Lematu 3.35. Stąd

$$\{d_k : k \in K\}^\downarrow = A(A(\{d_k : k \in K\}^\downarrow)) = A(\{c_j : j \in J\}^\downarrow)$$

na mocy Twierdzenia 3.36. Korzystając z Lematu 3.35 wiemy wreszcie, że

$$A(\{c_j : j \in J\}^\downarrow) = \{x \in \mathbb{Q}_+^I : \langle c_j, x \rangle \leq 1 \text{ dla wszystkich } j \in J\}.$$

Przeciwną implikację dowodzimy analogicznie.  $\square$

WNIOSEK 3.40.

Jeśli  $P$  i  $Q$  są wielościanami typu antyblokującego, to  $P = Q$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $A(P) = A(Q)$ .

DOWÓD.

Oczywiście, jeśli  $P = Q$ , to  $A(P) = A(Q)$ . Z drugiej strony, jeśli  $A(P) = A(Q)$ , to korzystając dwukrotnie z Twierdzenia 3.36 otrzymujemy, że

$$P = A(A(P)) = A(A(Q)) = Q. \quad \square$$

LEMAT 3.41.

Jeśli  $c_j \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $j \in J$ ,  $d_k \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $k \in K$ , i

$$Q = \{x \in \mathbb{Q}_+^I : \langle d_k, x \rangle \leq 1 \text{ dla wszystkich } k \in K\},$$

to

$$Q = \{c_j : j \in J\}^\downarrow$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\max\{\langle w, c_j \rangle : j \in J\} = \max\{\langle w, x \rangle : x \in Q\}$$

dla każdego wektora  $w \in \mathbb{Q}_+^I$ .

UWAGA.

W tym podrozdziale przyjmujemy, że  $\max \emptyset = 0$ .

DOWÓD.

Korzystając ze Stwierdzenia 1.42 otrzymujemy, że

$$(*) \quad \max\{\langle w, c_j \rangle : j \in J\} = \max\{\langle w, x \rangle : x \in \{c_j : j \in J\}^\downarrow\}$$

dla każdego wektora  $w \in \mathbb{Q}_+^I$ . W szczególności, jeśli  $Q = \{c_j : j \in J\}^\downarrow$ , to

$$\max\{\langle w, c_j \rangle : j \in J\} = \max\{\langle w, x \rangle : x \in Q\}$$

dla każdego wektora  $w \in \mathbb{Q}_+^I$ .

Z drugiej strony, jeśli

$$\max\{\langle w, c_j \rangle : j \in J\} = \max\{\langle w, x \rangle : x \in Q\},$$

dla każdego wektora  $w \in \mathbb{Q}_+^I$ , to, korzystając ponownie z równości (\*), otrzymujemy, że

$$A(\{c_j : j \in J\}^\downarrow) = A(Q),$$

więc teza wynika z Wniosku 3.40.  $\square$

FAKT 3.42.

Jeśli  $c_j \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $j \in J$ ,  $d_k \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $k \in K$ , to

$$\max\{\langle w, c_j \rangle : j \in J\} = \min\left\{y(K) : y \in \mathbb{Q}_+^K \text{ i } \sum_{k \in K} y(k) \cdot d_k \geq w\right\}$$

dla każdego wektora  $w \in \mathbb{Q}_+^I$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\max\{\langle l, d_k \rangle : k \in K\} = \min\left\{z(J) : z \in \mathbb{Q}_+^J \text{ i } \sum_{j \in J} z(j) \cdot c_j \geq l\right\}$$

dla każdego wektora  $l \in \mathbb{Q}_+^I$ .

DOWÓD.

Korzystając z Twierdzenia 1.61 otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \min\left\{y(K) : y \in \mathbb{Q}_+^K \text{ i } \sum_{k \in K} y(k) \cdot d_k \geq w\right\} \\ = \max\{\langle w, x \rangle : x \in \mathbb{Q}_+^I \text{ i } \langle d_k, x \rangle \leq 1 \text{ dla każdego } k \in K\} \end{aligned}$$

dla każdego wektora  $w \in \mathbb{Q}_+^I$ . Korzystając dodatkowo z Lematu 3.41 otrzymujemy zatem, że

$$\max\{\langle w, c_j \rangle : j \in J\} = \min\left\{y(K) : y \in \mathbb{Q}_+^K \text{ i } \sum_{k \in K} y(k) \cdot d_k \geq w\right\}$$

dla każdego wektora  $w \in \mathbb{Q}_+^I$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\{c_j : j \in J\}^\downarrow = \{x \in \mathbb{Q}_+^I : \langle d_k, x \rangle \leq 1 \text{ dla każdego } k \in K\}.$$

Analogicznie pokazujemy, że

$$\max\{\langle l, d_k \rangle : k \in K\} = \min\left\{z(J) : z \in \mathbb{Q}_+^J \text{ i } \sum_{j \in J} z(j) \cdot c_j \geq l\right\}$$

dla każdego wektora  $l \in \mathbb{Q}_+^I$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\{d_k : k \in K\}^\downarrow = \{z \in \mathbb{Q}_+^I : \langle c_j, z \rangle \leq 1 \text{ dla każdego } j \in J\},$$

zatem teza wynika z Faktu 3.39. □

LEMAT 3.43.

Jeśli  $c_j \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $j \in J$ ,  $d_k \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $k \in K$ , to

$$\max\{\langle w, c_j \rangle : j \in J\} = \min\left\{y(K) : y \in \mathbb{Q}_+^K \text{ i } \sum_{k \in K} y(k) \cdot d_k \geq w\right\}$$

dla każdego wektora  $w \in \mathbb{Q}_+^I$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\max\{\langle w, c_j \rangle : j \in J\} = \min\left\{y(K) : y \in \mathbb{Q}_+^K \text{ i } \sum_{k \in K} y(k) \cdot d_k \geq w\right\}$$

dla każdego wektora  $w \in \mathbb{N}^I$ .

Dowód.

Analogiczny do dowodu Lematu 3.21. □

**Twierdzenie 3.44 (Lehman's Length-Width Inequality).**

Jeśli  $P$  i  $Q$  są wielościanami typu antyblokującego w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to  $Q = A(P)$  wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

- (1)  $\langle x, z \rangle \leq 1$  dla wszystkich wektorów  $x \in P$  i  $z \in Q$ ,
- (2) jeśli  $l, w \in \mathbb{Q}_+^I$ , to

$$\max\{\langle l, x \rangle : x \in P\} \cdot \max\{\langle w, z \rangle : z \in Q\} \geq \langle l, w \rangle.$$

Uwaga.

W tym podrozdziale zakładamy, że  $0 \cdot \infty = \infty$ .

Dowód.

Założmy najpierw, że  $Q = A(P)$ . Wtedy oczywiście  $\langle x, z \rangle \leq 1$  dla wszystkich wektorów  $x \in P$  i  $z \in Q$ . Ustalmy teraz wektory  $l, w \in \mathbb{Q}_+^I$  i zdefiniujmy liczby  $\alpha$  i  $\beta$  wzorami

$$\alpha := \max\{\langle l, x \rangle : x \in P\} \quad \text{ i } \quad \beta := \max\{\langle w, z \rangle : z \in Q\}.$$

Oczywiście  $\alpha \geq 0$  i  $\beta \geq 0$ . Jeśli  $\alpha = \infty$  lub  $\beta = \infty$ , to

$$\alpha \cdot \beta = \infty \geq \langle l, w \rangle,$$

załóżmy zatem, że  $\alpha < \infty$  i  $\beta < \infty$ .

Przypuśćmy najpierw, że  $\alpha = 0$  i niech

$$M := \{i \in I : l(i) > 0\}.$$

Wtedy

$$P \subseteq \{x \in \mathbb{Q}_+^I : x|_M = 0\},$$

więc

$$\mathbb{Q}_+^M \subseteq A(P) = Q$$

na mocy Wniosku 3.38. Ponieważ  $\beta < \infty$ , więc  $w|_M = 0$ . Stąd

$$\langle l, w \rangle = 0 = \alpha \cdot \beta.$$

Założmy zatem, że  $\alpha > 0$  i  $\beta > 0$ . Wtedy  $\frac{1}{\alpha} \cdot l \in A(P) = Q$  i  $\frac{1}{\beta} \cdot w \in A(Q)$ , skąd

$$\langle l, w \rangle = \alpha \cdot \beta \cdot \left\langle \frac{1}{\alpha} \cdot l, \frac{1}{\beta} \cdot w \right\rangle \leq \alpha \cdot \beta \cdot 1 = \alpha \cdot \beta,$$

co kończy dowód jednej implikacji.

Założmy teraz, że warunki (1) i (2) są spełnione. Z warunku (1) natychmiast wynika, że  $Q \subseteq A(P)$ . Ustalmy teraz  $y \in A(P)$ . Wtedy, korzystając z warunku (2), otrzymujemy dla każdego wektora  $v \in A(Q)$ , że

$$\langle v, y \rangle = \langle y, v \rangle \leq \max\{\langle y, x \rangle : x \in P\} \cdot \max\{\langle v, z \rangle : z \in Q\} \leq 1 \cdot 1 = 1,$$

zatem  $y \in Q$  na mocy Wniosku 3.37. □

LEMAT 3.45.

Jeśli  $P$  i  $Q$  są wielościanami typu antyblokującego w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to

$$\max\{\langle l, x \rangle : x \in P\} \cdot \max\{\langle w, z \rangle : z \in Q\} \geq \langle l, w \rangle$$

dla wszystkich wektorów  $l, w \in \mathbb{Q}_+^I$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\max\{\langle l, x \rangle : x \in P\} \cdot \max\{\langle w, z \rangle : z \in Q\} \geq \langle l, w \rangle$$

dla wszystkich wektorów  $l, w \in \mathbb{N}^I$ .

DOWÓD.

Ćwiczenie. □

FAKT 3.46.

Jeśli  $c_j \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $j \in J$ ,  $d_k \in \mathbb{Q}_+^I$ ,  $k \in K$ , to

$$A(\{c_j : j \in J\}^\downarrow) = \{d_k : k \in K\}^\downarrow$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

- (1)  $\langle c_j, d_k \rangle \leq 1$  dla wszystkich  $j \in J$  i  $k \in K$ ,
- (2) jeśli  $l, w \in \mathbb{N}^I$ , to

$$\max\{\langle l, c_j \rangle : j \in J\} \cdot \max\{\langle w, d_k \rangle : k \in K\} \geq \langle l, w \rangle.$$

Dowód.

Korzystając ze Stwierdzenia 1.42, otrzymujemy, że  $\langle c_j, d_k \rangle \leq 1$  dla wszystkich  $j \in J$  i  $k \in K$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\langle x, z \rangle \leq 1$  dla wszystkich wektorów  $x \in \{c_j : j \in J\}^\perp$  i  $z \in \{d_k : k \in K\}^\perp$ . Ponadto, korzystając ponownie ze Stwierdzenia 1.42, mamy, że

$$\max\{\langle l, c_j \rangle : j \in J\} = \max\{\langle l, x \rangle : x \in \{c_j : j \in J\}^\perp\}$$

i

$$\max\{\langle w, d_k \rangle : k \in K\} = \max\{\langle w, z \rangle : z \in \{d_k : k \in K\}^\perp\}$$

dla wszystkich wektorów  $l, w \in \mathbb{N}^I$ , co kończy dowód wobec Lematu 3.45 i Twierdzenia 3.44.  $\square$

### 3.5. ZASTOSOWANIE: SKOJARZENIA I KOLOROWANIA KRAWĘDZI

DEFINICJA.

KOLOROWANIEM KRAWĘDZI grafu  $G = (V, E, \gamma)$  nazywamy każdą funkcję  $\phi : E \rightarrow \mathbb{N}$  taką, że  $f(e) \neq f(e')$  dla wszystkich krawędzi  $e, e' \in E$  takich, że  $e \neq e'$  i  $\gamma(e) \cap \gamma(e') \neq \emptyset$ .

DEFINICJA.

KRAWĘDZIOWĄ LICZBĄ CHROMATYCZNĄ grafu  $G = (V, E, \gamma)$  nazywamy liczbę  $\chi(G)$  zdefiniowaną wzorem

$$\chi(G) := \min\{|\phi(E)| : \phi \text{ jest kolorowaniem krawędzi grafu } G\}.$$

LEMAT 3.47.

Niech  $G = (V, E, \gamma)$  będzie grafem bez pętli. Jeśli  $\mathcal{M}$  jest zbiorem wszystkich skojarzeń w grafie  $G$ , to

$$\chi(G) = \min\left\{y(\mathcal{M}) : y \in \mathbb{N}^{\mathcal{M}} \text{ i } \sum_{M \in \mathcal{M}} y(M) \cdot \mathbf{e}_M \geq \mathbf{e}_E\right\}.$$

Dowód.

Udowodnimy najpierw, że

$$\chi(G) \geq \min\left\{y(\mathcal{M}) : y \in \mathbb{N}^{\mathcal{M}} \text{ i } \sum_{M \in \mathcal{M}} y(i) \cdot \mathbf{e}_{M_i} \geq \mathbf{e}_E\right\}.$$

W tym celu ustalmy kolorowanie  $\phi : E \rightarrow \mathbb{N}$  krawędzi grafu  $G$ . Dla każdej liczby  $p \in \phi(E)$  definiujemy podzbiór  $M_p$  zbioru  $E$  wzorem

$$M_p := \phi^{-1}(p).$$

Wtedy zbiory  $M_p$ ,  $p \in \phi(E)$ , są skojarzeniami w grafie  $G$ . Definiujemy wektor  $y \in \mathbb{N}^{\mathcal{M}}$  wzorem

$$y(M) := \#\{p \in \phi(E) : M_p = M\} \quad (M \in \mathcal{M}).$$

Wtedy oczywiście

$$y(\mathcal{M}) = |\phi(E)|.$$

Ponadto, jeśli  $e$  jest krawędzią w grafie  $E$  i  $p := \phi(e)$ , to istnieje skojarzenie  $M'$  takie, że  $M_p = M'$ . Wtedy  $y(M') \geq 1$  i  $e \in M'$ , więc

$$\sum_{M \in \mathcal{M}} y(M) \cdot \mathbf{e}_M(e) \geq y(M') \cdot \mathbf{e}_{M'}(e) \geq 1 \cdot 1 = 1.$$

Z dowolności kolorowania  $\phi$  wynika zatem, że

$$\chi(G) \geq \min \left\{ y(\mathcal{M}) : y \in \mathbb{N}^{\mathcal{M}} \text{ i } \sum_{M \in \mathcal{M}} y(M) \cdot \mathbf{e}_M \geq \mathbf{e}_E \right\}.$$

Dla dowodu nierówności przeciwnej ustalmy wektor  $y \in \mathbb{N}^{\mathcal{M}}$  taki, że

$$(*) \quad \sum_{M \in \mathcal{M}} y(M) \cdot \mathbf{e}_M \geq \mathbf{e}_E.$$

Definiujemy podzbiór  $\mathcal{M}'$  zbioru  $\mathcal{M}$  wzorem

$$\mathcal{M}' := \{M \in \mathcal{M} : y(M) > 0\}.$$

Niech  $m$  będzie liczbą elementów zbioru  $\mathcal{M}'$  i wybierzmy bijekcję  $\sigma : [1, m] \rightarrow \mathcal{M}'$ . Dla każdego  $p \in [1, m]$  definiujemy skojarzenie  $M_p$  wzorem

$$M_p := \sigma(p) \setminus \bigcup_{q \in [1, p-1]} \sigma(q).$$

Definiujemy funkcję  $\phi : E \rightarrow \mathbb{N}$  wzorem

$$\phi := \sum_{j \in [1, m]} j \cdot \mathbf{e}_{M'_j}.$$

Warunek  $(*)$  implikuje, że

$$\bigcup_{p \in [1, m]} M_p = E.$$

Ponadto, zbiory  $M_1, \dots, M_m$  są parami rozłączne. Stąd wynika, że funkcja  $\phi$  jest kolorowaniem i  $\phi(E) \subseteq [1, m]$ . W szczególności,

$$|\phi(E)| \leq m \leq y(\mathcal{M}),$$

co kończy dowód. □

DEFINICJA.

Niech  $G = (V, E, \gamma)$  będzie grafem bez pętli. Niech  $\mathcal{M}$  będzie zbiorem wszystkich skojarzeń w grafie  $G$ . UŁAMKOWĄ KRAWĘDZIOWĄ LICZBĄ CHROMATYCZNĄ grafu  $G$  nazywamy liczbę  $\chi^*(G)$  zdefiniowaną wzorem

$$\chi^*(G) = \min \left\{ y(\mathcal{M}) : y \in \mathbb{Q}_+^{\mathcal{M}} \text{ i } \sum_{M \in \mathcal{M}} y(M) \cdot \mathbf{e}_M \geq \mathbf{e}_E \right\}.$$

OZNACZENIE.

Jeśli  $G = (V, E, \gamma)$  jest grafem i  $U$  jest podzbiorem zbioru  $V$ , to definiujemy zbiór  $\langle U \rangle$  wzorem

$$\langle U \rangle := \{e \in E : \gamma(e) \subseteq U\}.$$

FAKT 3.48.

Jeśli  $G = (V, E, \gamma)$  jest grafem bez pętli, to

$$\chi^*(G) = \max \left\{ \max\{|\delta(v)| : v \in V\}, \max \left\{ \frac{|\langle U \rangle|}{\lfloor \frac{1}{2} \cdot |U| \rfloor} : U \subseteq V \text{ i } |U| \geq 2 \right\} \right\}.$$

Dowód.

Niech  $\mathcal{M}$  będzie zbiorem wszystkich skojarzeń w grafie  $G$ . Z Twierdzenia 1.61 wiemy, że

$$\chi^*(G) = \max\{x(E) : x \in P\},$$

gdzie

$$P := \{x \in \mathbb{Q}_+^E : \langle \mathbf{e}_M, x \rangle \leq 1 \text{ dla każdego skojarzenia } M \in \mathcal{M}\}.$$

Korzystając w Wniosku 3.38 otrzymujemy, że

$$A(P) = \{\mathbf{e}_M : M \in \mathcal{M}\}^\downarrow.$$

Zauważmy, że jeśli  $M$  jest skojarzeniem w grafie  $G$  i  $L$  jest podzbiorem zbioru krawędzi grafu  $G$ , to  $\mathbf{e}_M|_L = \mathbf{e}_{M \cap L}$  oraz zbiór  $M \cap L$  jest skojarzeniem w grafie  $G$ , zatem

$$A(P) = \text{conv. hull}\{\mathbf{e}_M : M \in \mathcal{M}\}$$

na mocy Lematu 3.31. Wniosek 2.65 implikuje zatem, że jeśli  $z$  jest  $E$ -wektorem, to  $z \in A(P)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $z \in \mathbb{Q}_+^E$ ,

$$z(\delta(v)) \leq 1$$

dla każdego wierzchołka  $v \in V$ , i

$$z(\langle U \rangle) \leq \lfloor \frac{1}{2} \cdot |U| \rfloor$$

dla każdego podzbioru  $U$  zbioru  $V$  takiego, że  $|U| \geq 2$ . Korzystając z Twierdzenia 3.36 i Wniosku 3.38 mamy, że

$$\begin{aligned} P &= A(A(P)) \\ &= \text{conv. hull} \left( \{ \mathbf{e}_{\delta(v)} : v \in V \}, \left\{ \frac{1}{\lfloor \frac{1}{2} \cdot |U| \rfloor} \cdot \mathbf{e}_{\langle U \rangle} : U \subseteq V \text{ i } |U| \geq 2 \right\} \right). \end{aligned}$$

W szczególności,

$$\begin{aligned} &\max \{ x(E) : x \in P \} \\ &= \max \left\{ \max \{ |\delta(v)| : v \in V \}, \max \left\{ \frac{|\langle U \rangle|}{\lfloor \frac{1}{2} \cdot |U| \rfloor} : U \subseteq V \text{ i } |U| \geq 2 \right\} \right\} \end{aligned}$$

na mocy Stwierdzenia 1.42, co kończy dowód. □

#### 4. WSTĘP DO PROGRAMOWANIA CAŁKOWITOLICZBOWEGO

##### 4.1. OTOCZKA CAŁKOWITA

DEFINICJA.

Jeśli  $P$  jest podzbiorem przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to OTOCZKĄ CAŁKOWITĄ ZBIORU  $P$  nazywamy zbiór  $P_I$  zdefiniowany wzorem

$$P_I := \text{conv. hull}(P \cap \mathbb{Z}^I).$$

UWAGA.

Jeśli zbiór  $P$  jest ograniczony, to zbiór  $P_I$  jest wielościanem.

FAKT 4.1.

Jeśli  $C$  jest stożkiem wielościnnym w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to  $C_I = C$ .

DOWÓD.

Oczywiście  $C_I \subseteq C$ . Z drugiej strony, ustalmy wektor  $x \in C$ . Wtedy istnieje liczba  $\lambda \in \mathbb{N}_+$  taka, że  $\lambda \cdot x \in \mathbb{Z}^I$ . Oczywiście,  $\lambda \cdot x \in C$ . Ponadto

$$x = \frac{1}{\lambda} \cdot x + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \cdot 0,$$

zatem  $x \in \text{conv. hull}(C \cap \mathbb{Z}^I) = C_I$ , co kończy dowód.  $\square$

FAKT 4.2.

Jeśli  $P$  jest wielościanem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to istnieją wektory  $x_j \in \mathbb{Z}^I$ ,  $j \in J$ , i  $y_k \in \mathbb{Z}^I$ ,  $k \in K$ , takie, że

$$P \cap \mathbb{Z}^I = \left\{ \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j + \sum_{k \in K} \mu_k \cdot y_k : \lambda_j \in \mathbb{N} \text{ dla każdego } j \in J, \right. \\ \left. \mu_k \in \mathbb{N} \text{ dla każdego } k \in K, \text{ i } \sum_{j \in J} \lambda_j = 1 \right\}.$$

DOWÓD.

Z Wniosku 1.53 wiemy, że istnieją polytop  $Q$  i stożek wielościnnym  $C$  takie, że  $P = Q + C$ . Korzystając z Wniosku 1.48 wiemy, że istnieją  $I$ -wektory  $y_k$ ,  $k \in K$ , takie, że

$$C = \text{cone}\{y_k : k \in K\}.$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że  $y_k \in \mathbb{Z}^I$  dla każdego  $k \in K$ . Definiujemy zbiory  $S$  i  $T$  wzorami

$$S := \left\{ \sum_{k \in K} \mu_k \cdot y_k : \mu_k \in \mathbb{Q}_+ \text{ i } \mu_k < 1 \text{ dla każdego } k \in K \right\}$$

i

$$T := (Q + S) \cap \mathbb{Z}^I.$$

Zbiór  $X$  jest skończony, gdyż zbiór  $Q + S$  jest ograniczony. Pokażemy, że

$$P \cap \mathbb{Z}^I = P',$$

gdzie zbiór  $P'$  zdefiniowany jest wzorem

$$P' := \left\{ \sum_{t \in T} \lambda_t \cdot t + \sum_{k \in K} \mu_k \cdot y_k : \lambda_x \in \mathbb{N} \text{ dla każdego } x \in X, \right. \\ \left. \mu_k \in \mathbb{N} \text{ dla każdego } k \in K \text{ i } \sum_{t \in T} \lambda_x = 1 \right\}.$$

Inkluzja  $P' \subseteq P \cap \mathbb{Z}^I$  jest oczywista. Dla dowodu inkluzji przeciwnej ustalmy wektor  $x \in P \cap \mathbb{Z}^I$ . Wtedy istnieją wektory  $y \in Q$  i  $z \in C$  takie, że  $x = y + z$ . Korzystając ze Stwierdzenia 1.36 wiemy, że istnieją liczby  $\mu_k \in \mathbb{Q}_+$ ,  $k \in K$ , takie, że

$$z = \sum_{k \in K} \mu_k \cdot y_k.$$

Dla każdego  $k \in K$  definiujemy liczbę  $\lambda_k$  wzorem

$$\lambda_k := \mu_k - \lfloor \mu_k \rfloor.$$

Jeśli

$$y' := y + \sum_{k \in K} \lambda_k \cdot y_k \quad \text{ i } \quad z' := \sum_{k \in K} \lfloor \lambda_k \rfloor \cdot y_k,$$

to

$$y' = x - z' \in (Q + S) \cap \mathbb{Z}^I = T.$$

Ponadto

$$x = y + z = y' + z' = \sum_{t \in T} \delta_{t, y'} \cdot t + \sum_{k \in K} \lfloor \lambda_k \rfloor \cdot y_k,$$

a więc  $x \in P'$ , co kończy dowód. □

LEMAT 4.3.

Niech  $P$  będzie wielościanem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ . Jeśli  $x_j \in \mathbb{Z}^I$ ,  $j \in J$ ,  $J \neq \emptyset$ ,  $y_k \in \mathbb{Z}^I$ ,  $k \in K$ , i

$$P \cap \mathbb{Z}^I = \left\{ \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j + \sum_{k \in K} \mu_k \cdot y_k : \lambda_j \in \mathbb{N} \text{ dla każdego } j \in J, \right. \\ \left. \mu_k \in \mathbb{N} \text{ dla każdego } k \in K, \text{ i } \sum_{j \in J} \lambda_j = 1 \right\},$$

to

$$\text{char. cone } P = \text{cone}\{y_k : k \in K\}.$$

Dowód.

Wybierzmy  $j_0 \in J$ . Definiujemy

$$C := \text{cone}\{y_k : k \in K\}.$$

Najpierw pokażemy, że  $C \subseteq \text{char. cone } P$ , tzn.  $y_k \in \text{char. cone } P$  dla każdego  $k \in K$ . W tym celu ustalmy  $k \in K$  i nieujemną liczbę wymierną  $\lambda$ . Wiemy, że istnieje dodatnia liczba całkowita  $\mu$  taka, że  $\mu \cdot \lambda \in \mathbb{N}$ . Wtedy

$$x_{j_0} + \lambda \cdot y_k = \frac{1}{\mu} \cdot (x_{j_0} + \mu \cdot \lambda \cdot y_k) + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \cdot x_{j_0}.$$

Korzystając z wypukłości zbioru  $P$  otrzymujemy zatem, że  $x_{j_0} + \lambda \cdot y_k \in P$ . Wobec dowolności liczby  $\lambda$  oznacza to, na mocy Faktu 2.3, że  $y_k \in \text{char. cone } P$ .

Ustalmy teraz wektor  $y \in \text{char. cone } P$ . Istnieje dodatnia liczba całkowita  $\mu$  taka, że  $\mu \cdot y \in \mathbb{Z}^I$ . Wtedy

$$x_{j_0} + \lambda \cdot \mu \cdot y \in P \cap \mathbb{Z}^I$$

dla każdej dodatniej liczby całkowitej  $\lambda$ . Ustalmy  $I$ -wektor  $a$  taki, że  $\langle a, y_k \rangle \leq 0$  dla każdego  $k \in K$ . Wtedy istnieje liczba wymierna  $\beta$  taka, że  $\langle a, x \rangle \leq \beta$  dla każdego wektora  $x \in P \cap \mathbb{Z}^I$ . W szczególności,

$$\langle a, x_{j_0} + \lambda \cdot \mu \cdot y \rangle \leq \beta$$

dla każdej dodatniej liczby całkowitej  $\lambda$ . Stąd

$$\langle a, y \rangle \leq \frac{1}{\lambda \cdot \mu} \cdot (\beta - \langle a, x_{j_0} \rangle)$$

dla każdej dodatniej liczby całkowitej  $\lambda$ . W konsekwencji,  $\langle a, y \rangle \leq 0$ . Z dowolności wektora  $a$  i Twierdzenia 1.44 wynika, że  $y \in C$ .  $\square$

LEMAT 4.4.

Jeśli  $X$  jest zbiorem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to

$$\text{conv. hull } X = \bigcup_{\substack{X' \subseteq X \\ |X'| < \infty}} \text{conv. hull } X'.$$

Dowód.

Dla dowodu powyższej równości wystarczy pokazać, że

$$X \subseteq \bigcup_{\substack{X' \subseteq X \\ |X'| < \infty}} \text{conv. hull } X',$$

oraz, że zbiór  $\bigcup_{\substack{X' \subseteq X \\ |X'| < \infty}} \text{conv. hull } X'$  jest wypukły. Pierwszy warunek jest oczywisty, dla dowodu drugiego ustalmy wektory  $x_1, x_2 \in \bigcup_{\substack{X' \subseteq X \\ |X'| < \infty}} \text{conv. hull } X'$  oraz nieujemne liczby wymierne  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  takie, że  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ . Wtedy istnieją podzbiory skończone  $X_1$  i  $X_2$  zbioru  $X$  takie, że

$$x_1 \in \text{conv. hull } X_1 \quad \text{i} \quad x_2 \in \text{conv. hull } X_2.$$

Wtedy zbiór  $X_1 \cup X_2$  jest skończony oraz  $x_1, x_2 \in \text{conv. hull}(X_1 \cup X_2)$ . W konsekwencji,

$$\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 \in \text{conv. hull}(X_1 \cup X_2) \subseteq \bigcup_{\substack{X' \subseteq X \\ |X'| < \infty}} \text{conv. hull } X',$$

co kończy dowód. □

LEMAT 4.5.

Jeśli  $P$  i  $Q$  są wielościanami w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to

$$P_I + Q_I \subseteq (P + Q)_I.$$

Dowód.

Ustalmy wektory  $x \in P_I$  i  $y \in Q_I$ . Z Lematu 4.4 wiemy, że istnieją podzbiory skończone  $S \subseteq P \cap \mathbb{Z}^I$  i  $T \subseteq Q \cap \mathbb{Z}^I$  takie, że  $x \in \text{conv. hull } S$  i  $y \in \text{conv. hull } T$ . Korzystając ze Stwierdzenia 1.42, wiemy, że istnieją nieujemne liczby wymierne  $\lambda_s$ ,  $s \in S$ , i  $\mu_t$ ,  $t \in T$ , takie, że

$$x = \sum_{s \in S} \lambda_s \cdot s \quad \text{i} \quad y = \sum_{t \in T} \mu_t \cdot t,$$

oraz

$$\sum_{s \in S} \lambda_s = 1 \quad \text{i} \quad \sum_{t \in T} \mu_t = 1.$$

Wtedy

$$x + y = \sum_{\substack{s \in S \\ t \in T}} \lambda_s \cdot \mu_t \cdot (s + t) \quad \text{i} \quad \sum_{\substack{s \in S \\ t \in T}} \lambda_s \cdot \mu_t = 1.$$

Ponieważ  $x_s + y_t \in (P + Q) \cap \mathbb{Z}^I$  dla wszystkich wektorów  $s \in S$  i  $t \in T$ , więc teza wynika z Lematu 1.39.  $\square$

**TWIERDZENIE 4.6.**

Jeśli  $P$  jest wielościanem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to zbiór  $P_I$  jest wielościanem. Ponadto, jeśli zbiór  $P_I$  jest niepusty, to

$$\text{char. cone } P_I = \text{char. cone } P.$$

**Dowód.**

Teza jest oczywista, gdy  $P_I = \emptyset$ , więc możemy bez straty ogólności założyć, że  $P_I \neq \emptyset$ . Korzystając z Faktu 4.2, wiemy, że istnieją wektory  $x_j \in \mathbb{Z}^I$ ,  $j \in J$ , i  $y_k \in \mathbb{Z}^I$ ,  $k \in K$ , takie, że

$$P \cap \mathbb{Z}^I = \left\{ \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j + \sum_{k \in K} \mu_k \cdot y_k : \lambda_j \in \mathbb{N} \text{ dla każdego } j \in J, \right. \\ \left. \mu_k \in \mathbb{N} \text{ dla każdego } k \in K, \text{ i } \sum_{j \in J} \lambda_j = 1 \right\}.$$

Ponieważ  $P_I \neq \emptyset$ , więc  $J \neq \emptyset$ . Definiujemy zbiory  $Q$  i  $C$  wzorami

$$Q := \text{conv. hull}\{x_j : j \in J\} \quad \text{i} \quad C := \text{cone}\{y_k : k \in K\}.$$

Pokażemy, że  $P_I = Q + C$ .

Ponieważ

$$P \cap \mathbb{Z}^I \subseteq Q + C$$

oraz zbiór  $Q + C$  jest wypukły, więc inkluzja

$$P_I \subseteq Q + C$$

jest oczywista. Z drugiej strony, z wypukłości zbioru  $P_I$  wynika, że  $Q \subseteq P_I$ . Ponadto, korzystając z Faktu 4.1, wiemy, że  $C_I = C$ . Stąd, korzystając dodatkowo z Lematu 4.5, otrzymujemy, że

$$Q + C = Q + C_I \subseteq P_I + C_I \subseteq (P + C)_I \subseteq P_I$$

Z równości  $P_I = Q + C$  oraz Wniosku 1.53 natychmiast wynika, że zbiór  $P_I$  jest wielościanem. Ponadto, Fakt 2.4 implikuje, że  $\text{char.cone } P_I = C$ . Korzystając dodatkowo z Lematu 4.3 wiemy, że  $C = \text{char.cone } P$ , co kończy dowód.  $\square$

#### 4.2. WIEŁOŚCIANY CAŁKOWITE

LEMAT 4.7.

Niech  $P$  będzie niepustym wielościanem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ . Jeśli  $c$  jest  $I$ -wektorem, to

$$\max\{\langle c, x \rangle : x \in P\} < \infty$$

wtedy i tylko wtedy, gdy  $\langle c, y \rangle \leq 0$  dla każdego wektora  $y \in \text{char.cone } P$ .

DOWÓD.

Założmy najpierw, że

$$\alpha := \max\{\langle c, x \rangle : x \in P\} < \infty$$

i ustalmy wektor  $y \in \text{char.cone } P$ . Wybierzmy wektor  $x_0 \in P$ . Korzystając z Lematu 2.2, wiemy, że  $x_0 + \lambda \cdot y \in P$  dla każdej nieujemnej liczby wymiernej  $\lambda$ , zatem

$$\lambda \cdot \langle c, y \rangle \leq \alpha - \langle c, x_0 \rangle$$

dla każdej nieujemnej liczby wymiernej  $\lambda$ . Stąd natychmiast otrzymujemy, że  $\langle c, y \rangle \leq 0$ .

Założmy teraz, że  $\langle c, y \rangle \leq 0$  dla każdego wektora  $y \in \text{char.cone } P$ . Z Wniosku 1.53 wiemy, że istnieją polytop  $Q$  i stożek wielościenne  $C$  takie, że  $P = Q + C$ . Korzystając dodatkowo z Faktu 2.4, otrzymujemy, że  $C = \text{char.cone } P$ . Ponieważ zbiór  $Q$  jest ograniczony, więc

$$\beta := \max\{\langle c, z \rangle : z \in Q\} < \infty.$$

Ustalmy wektor  $x \in P$ . Korzystając z powyższych rozważań, wiemy, że istnieją wektory  $z \in Q$  i  $y \in \text{char.cone } P$  takie, że  $x = z + y$ . Wtedy

$$\langle c, x \rangle = \langle c, z \rangle + \langle c, y \rangle \leq \beta + 0 = \beta,$$

co kończy dowód.  $\square$

LEMAT 4.8.

Niech  $P$  będzie wielościanem w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ . Jeśli  $c$  jest  $I$ -wektorem i wielościan  $P_I$  jest niepusty, to

$$\max\{\langle c, x \rangle : x \in P\} < \infty$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\max\{\langle c, x \rangle : x \in P \cap \mathbb{Z}^I\} < \infty.$$

Dowód.

Z Lematu 4.4 i Stwierdzenia 1.42 wiemy, że

$$\max\{\langle c, x \rangle : x \in P \cap \mathbb{Z}^I\} = \max\{\langle c, x \rangle : x \in P_I\}.$$

Ponieważ  $\text{char. cone } P = \text{char. cone } P_I$  na mocy Twierdzenia 4.6, więc teza wynika z Lematu 4.7.  $\square$

DEFINICJA.

Wielościan  $P$  nazywamy CAŁKOWITYM, jeśli  $P = P_I$ .

FAKT 4.9.

Dla wielościanu  $P$  w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$  następujące warunki są równoważne:

- (1) Wielościan  $P$  jest całkowity.
- (2) Dla każdego  $I$ -wektora  $c$  takiego, że

$$\max\{\langle c, x \rangle : x \in P\} < \infty,$$

istnieje wektor  $y \in P \cap \mathbb{Z}^I$  taki, że

$$\langle c, y \rangle = \max\{\langle c, x \rangle : x \in P\}.$$

- (3) Każda ściana wielościanu  $P$  zawiera wektor o współrzędnych całkowitych.
- (4) Każda ściana minimalna wielościanu  $P$  zawiera wektor o współrzędnych całkowitych.

Dowód.

- (1)  $\implies$  (2): Załóżmy, że  $P = P_I$  i ustalmy  $I$ -wektor  $c$  taki, że

$$\max\{\langle c, x \rangle : x \in P\} < \infty.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \max\{\langle c, x \rangle : x \in P \cap \mathbb{Z}^I\} &= \max\{\langle c, x \rangle : x \in P_I\} \\ &= \max\{\langle c, x \rangle : x \in P\}. \end{aligned}$$

- (2)  $\implies$  (1): Załóżmy, że  $P \neq P_I$ . Bez starty ogólności możemy założyć, że  $P_I \neq \emptyset$ . Ponieważ zbiór  $P_I$  jest wielościanem na mocy Twierdzenia 4.6, to istnieją wektory  $y \in P$  oraz  $c \in \mathbb{Q}^I$  oraz liczba wymierna  $\beta$  takie, że

$$\langle c, y \rangle > \beta$$

oraz

$$\langle c, x \rangle \leq \beta$$

dla każdego wektora  $x \in P_I$ . Z Lematu 4.8 wynika, że

$$\max\{\langle c, x \rangle : x \in P\} < \infty.$$

Ponadto,

$$\langle c, x \rangle \leq \beta < \langle c, y \rangle \leq \max\{\langle c, z \rangle : z \in P\}$$

dla każdego wektora  $x \in P \cap \mathbb{Z}^I$ .

(2)  $\iff$  (3): Wynika natychmiast z definicji ściany.

(3)  $\iff$  (4): Oczywiste, gdyż każda ściana zawiera ścianę minimalną.  $\square$

#### 4.3. BAZY HILBERTA

DEFINICJA.

Niech  $C$  będzie stożkiem wielościnnym w przestrzeni  $\mathbb{Q}$ . Skończony zbiór  $X \subseteq \mathbb{Z}^I$  nazywamy (CAŁKOWITĄ) BAZĄ HILBERTA STOŻKA  $C$ , jeśli  $X \subseteq C$  oraz dla każdego wektora  $y \in C \cap \mathbb{Z}^I$  istnieją nieujemne liczby całkowite  $\lambda_x$ ,  $x \in X$ , takie, że

$$y = \sum_{x \in X} \lambda_x \cdot x.$$

UWAGA.

Jeśli zbiór  $X$  jest bazą Hilberta stożka wielościnnego  $C$ , to  $C = \text{cone } X$ .

TWIERDZENIE 4.10.

Jeśli  $C$  jest stożkiem wielościnnym w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ , to istnieje baza Hilberta  $X$  stożka  $C$ .

DOWÓD.

Korzystając z Faktu 4.2 wiemy, że istnieją wektory  $x_j \in \mathbb{Z}^I$ ,  $j \in J$ ,  $y_k \in \mathbb{Z}^I$ ,  $k \in K$ , takie, że

$$C \cap \mathbb{Z}^I = \left\{ \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot x_j + \sum_{k \in K} \mu_k \cdot y_k : \lambda_j \in \mathbb{N} \text{ dla każdego } j \in J, \right. \\ \left. \mu_k \in \mathbb{N} \text{ dla każdego } k \in K, \text{ i } \sum_{j \in J} \lambda_j = 1 \right\}.$$

Dla udowodnienia, że zbiór

$$\{x_j : j \in J\} \cup \{y_k : k \in K\}$$

jest bazą Hilberta stożka  $C$ , wystarczy pokazać, że  $y_k \in C$  dla każdego  $k \in K$ . Korzystając z Wniosku 2.5 i Lematu 4.3 wiemy, że

$$C = \text{char. cone } C = \text{cone}\{y_k : k \in K\},$$

co kończy dowód.  $\square$

**TWIERDZENIE 4.11.**

Niech  $C$  będzie ostrym stożkiem wielościennym w przestrzeni  $\mathbb{Q}^I$ . Jeśli  $X_1$  i  $X_2$  są minimalnymi bazami Hilberta stożka  $C$ , to  $X_1 = X_2$ .

**Dowód.**

Definiujemy zbiór  $H$  wzorem

$$H := \{x \in C \cap \mathbb{Z}^I : x \neq 0 \text{ i nie istnieją wektory } x_1, x_2 \in C \cap \mathbb{Z}^I \text{ takie, że } x_1 \neq 0 \neq x_2 \text{ i } x = x_1 + x_2\}.$$

Zauważmy, że jeśli zbiór  $X$  jest bazą Hilberta stożka  $C$ , to  $H \subseteq X$ . Wystarczy zatem pokazać, że zbiór  $H$  jest bazą Hilberta stożka  $C$ .

Ponieważ stożek  $C$  posiada bazę Hilberta na mocy Twierdzenia 4.10, więc z powyższej obserwacji wynika, że zbiór  $H$  jest skończony. Oczywiście  $H \subseteq C$ . Wybierzmy  $I$ -wektor  $a$  taki, że  $\langle a, y \rangle > 0$  dla każdego wektora  $y \in C$  taki, że  $y \neq 0$  (taki wektor  $a$  istnieje, gdyż stożek  $C$  jest ostry). Bez straty ogólności możemy założyć, że  $a \in \mathbb{Z}^I$ . Przez indukcję ze względu na  $\langle a, y \rangle$  pokażemy, że dla każdego wektora  $y \in C \cap \mathbb{Z}^I$  istnieją nieujemne liczby całkowite  $\lambda_x$ ,  $x \in H$ , takie, że

$$y = \sum_{x \in H} \lambda_x \cdot x.$$

Jeśli  $\langle a, y \rangle = 0$ , to  $y = 0$  i teza jest oczywista. Podobnie, teza jest oczywista, gdy  $y \in H$ . Załóżmy zatem, że  $y \in C \cap \mathbb{Z}^I$ ,  $\langle a, y \rangle > 0$  i  $y \notin H$ . Z definicji zbioru  $H$  wynika, że istnieją wektory  $y_1, y_2 \in C \cap \mathbb{Z}^I$  takie, że  $y = y_1 + y_2$  i  $y_1 \neq 0 \neq y_2$ . Wtedy  $\langle a, y_1 \rangle < \langle a, y \rangle$  i  $\langle a, y_2 \rangle < \langle a, y \rangle$ , zatem z założenia indukcyjnego istnieją nieujemne liczby całkowite  $\lambda_x$  i  $\mu_x$ ,  $x \in H$ , takie, że

$$y_1 = \sum_{x \in H} \lambda_x \cdot x \quad \text{ i } \quad y_2 = \sum_{x \in H} \mu_x \cdot x.$$

Wtedy

$$y = \sum_{x \in H} (\lambda_x + \mu_x) \cdot x,$$

co kończy dowód.  $\square$

#### 4.4. TWIERDZENIE DOIGNONA

##### Twierdzenie 4.12.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą i  $b$   $J$ -wektorem. Jeśli

$$\{x \in \mathbb{Z}^I : A \cdot x \leq b\} = \emptyset,$$

to istnieje podzbiór  $J' \subseteq J$  taki, że  $|J'| \leq 2^{|I|}$  i

$$\{x \in \mathbb{Z}^I : A_{J',I} \cdot x \leq b|_{J'}\} = \emptyset.$$

Dowód.

Przypuśćmy, że  $|J| > 2^{|I|}$ , ale dla każdego  $j \in J$  istnieje wektor  $x_j \in \mathbb{Z}^I$  taki, że

$$A_{(J \setminus \{j\}),I} \cdot x_j \leq b|_{J \setminus \{j\}}$$

. Wtedy oczywiście  $\langle A(j), x_j \rangle > b(j)$  dla każdego  $j \in J$ . Definiujemy zbiór  $Z$  wzorem

$$Z := \text{conv. hull}\{x_j : j \in J\} \cap \mathbb{Z}^I.$$

Ponadto, dla każdego  $j \in J$  definiujemy zbiór  $Z_j$  wzorem

$$Z_j := \{z \in Z : \langle A(j), z \rangle > b(j)\}.$$

Wtedy  $x_j \in Z_j$  dla każdego  $j \in J$ . Ponadto

$$Z = \bigcup_{j \in J} Z_j,$$

gdyż  $\{x \in \mathbb{Z}^I : A \cdot x \leq b\} = \emptyset$ . Niech

$$\Gamma := \{c \in \mathbb{Q}^J : c(j) \in \{\langle A(j), z \rangle : z \in Z_j\} \text{ dla każdego } j \in J\}.$$

Dla każdego wektora  $c \in \Gamma$  oraz  $j \in J$  definiujemy zbiór  $Z_j^c$  wzorem

$$Z_j^c := \{z \in Z_j : \langle A(j), z \rangle \geq c(j)\}.$$

Niech

$$\Gamma' := \left\{c \in \Gamma : Z = \bigcup_{j \in J} Z_j^c\right\}.$$

Zauważmy, że zbiór  $\Gamma'$  jest niepusty. Istotnie, jeśli zdefiniujemy  $J$ -wektor  $c$  wzorem

$$c(j) := \min\{\langle A(j), z \rangle : z \in Z_j\} \quad (j \in J),$$

to  $Z_j^c = Z_j$  dla każdego  $j \in J$ , a więc  $c \in \Gamma$ .

Wybierzmy wektor  $c' \in \Gamma'$  taki, że

$$c'(J) = \max\{c(J) : c \in \Gamma'\}.$$

Z wyboru wektora  $c'$  wynika, że istnieją wektory  $z_j \in Z$ ,  $j \in J$ , takie, że

$$\langle A(j), z_j \rangle = c'(j) \quad \text{i} \quad z_j \notin \bigcup_{\substack{j' \in J \\ j' \neq j}} Z_{j'}^{c'}$$

dla każdego  $j \in J$ . W szczególności,

$$\langle A(j'), z_{j''} \rangle < c(j')$$

dla wszystkich  $j', j'' \in J$  takich, że  $j' \neq j''$ . Ponieważ  $|J| > 2^{|I|}$ , więc istnieją indeksy  $j', j'' \in J$  takie, że  $j' \neq j''$  i  $z \in \mathbb{Z}^I$ , gdzie

$$z := \frac{1}{2} \cdot (z_{j'} + z_{j''}).$$

Wtedy jednak  $z \in Z$  oraz  $z \notin Z_j^{c'}$  dla każdego indeksu  $j \in J$ , co prowadzi do sprzeczności.  $\square$

#### WNIOSEK 4.13.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą,  $b$   $J$ -wektorem i  $c$   $I$ -wektorem. Jeśli

$$-\infty < \max\{\langle c, x \rangle : x \in \mathbb{Z}^I \text{ i } A \cdot x \leq b\} < \infty,$$

to istnieje podzbiór  $J' \subseteq J$  taki, że  $|J'| < 2^{|I|}$  oraz

$$\begin{aligned} \max\{\langle c, x \rangle : x \in \mathbb{Z}^I \text{ i } A \cdot x \leq b\} \\ = \max\{\langle c, x \rangle : x \in \mathbb{Z}^I \text{ i } A_{J', I} \cdot x \leq b|_{J'}\}. \end{aligned}$$

Dowód.

Definiujemy liczbę  $\mu$  wzorem

$$\mu := \max\{\langle c, x \rangle : x \in \mathbb{Z}^I \text{ i } A \cdot x \leq b\}.$$

Z definicji liczby  $\mu$  wynika, że

$$\left\{x \in \mathbb{Z}^I : A \cdot x \leq b \text{ i } \langle c, x \rangle \geq \mu + \frac{1}{n}\right\} = \emptyset$$

dla każdej dodatniej liczby całkowitej  $n$ . Ponieważ

$$\{x \in \mathbb{Z}^I : A \cdot x \leq b\} \neq \emptyset,$$

więc z Twierdzenia 4.12 wynika, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej  $n$  istnieje podzbiór  $J_n \subseteq J$  taki, że  $|J_n| < 2^{|I|}$  i

$$\left\{x \in \mathbb{Z}^I : A_{J_n, I} \cdot x \leq b|_{J_n} \text{ i } \langle c, x \rangle \geq \mu + \frac{1}{n}\right\} = \emptyset.$$

Ponieważ zbiór  $J$  jest skończony, więc istnieje podzbiór  $J' \subseteq J$  taki, że

$$\#\{n \in \mathbb{N} : J_n = J'\} = \infty.$$

Wtedy

$$\{x \in \mathbb{Z}^I : A_{J', I} \cdot x \leq b|_{J'} \text{ i } \langle c, x \rangle > \mu\} = \emptyset,$$

co kończy dowód. □

## 5. PODSTAWOWE WŁASNOŚCI MACIERZY CAŁKOWICIE UNIMODULARNYCH

### 5.1. MACIERZE CAŁKOWICIE UNIMODULARNE

DEFINICJA.

$J \times I$ -macierz  $A$  nazywamy CAŁKOWICIE UNIMODULARNĄ, jeśli

$$|\det A_{I',J'}| \in \{0, 1\}$$

dla wszystkich podzbiorów  $I' \subseteq I$  i  $J' \subseteq J$  takich, że  $|I'| = |J'|$ .

UWAGA.

Jeśli  $J \times I$ -macierz  $A$  jest całkowicie unimodularna, to

$$A(j, i) \in \{-1, 0, 1\}$$

dla wszystkich  $i \in I$  i  $j \in J$ . W szczególności,  $A \in \mathbb{M}_{J \times I}(\mathbb{Z})$ .

TWIERDZENIE 5.1.

Jeśli

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\}$$

dla  $J \times I$ -macierzy całkowicie unimodularnej  $A$  oraz wektora  $b \in \mathbb{Z}^J$ , to wielościan  $P$  jest całkowity.

DOWÓD.

Niech  $F$  będzie ścianą minimalną wielościanu  $P$ . Na mocy Twierdzenia 2.40 istnieje podzbiór  $J' \subseteq J$  taki, że

$$F = \{x \in \mathbb{Q}^I : A_{J',I} \cdot x = b|_{J'}\}.$$

Ponieważ  $F \neq \emptyset$ , więc możemy założyć, że  $\text{rk } A_{J',I} = |J'|$ . Stąd istnieje podzbiór  $I' \subseteq I$  taki, że

$$|J'| = |I'| \quad \text{i} \quad |\det A_{J',I'}| \neq 0.$$

Ponieważ macierz  $A$  jest całkowicie unimodularna, więc  $|\det A_{J',I'}| = 1$ , skąd  $A_{J',I'}^{-1} \in \mathbb{M}_{I' \times J'}(\mathbb{Z})$ . Stąd, jeśli

$$x := A_{J',I'}^{-1} \cdot b|_{J'},$$

to  $x \in \mathbb{Z}^{I'} \subseteq \mathbb{Z}^I$ . Ponadto  $x \in F$ , co kończy dowód na mocy Faktu 4.9.  $\square$

LEMAT 5.2.

Niech  $A$  będzie  $J \times I$ -macierzą całkowicie unimodularną. Jeśli  $\varepsilon_k \in \{\pm 1\}$ ,  $k \in K$ ,  $\varepsilon_l \in \{\pm 1\}$ ,  $l \in L$ , to  $J \times (K \times J \cup L \times I)$ -macierz  $A'$  dana wzorem

$$A'(j, m) := \begin{cases} \varepsilon_k & \text{jeśli } m = (k, j) \text{ dla pewnego } k \in K, \\ \varepsilon_l \cdot A(j, i) & \text{jeśli } m = (l, i) \text{ dla pewnych } l \in L \text{ i } i \in I, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$$

$$(j \in J, m \in K \times J \cup L \times I)$$

(tzn.  $A' := [\cdots \quad \varepsilon_k \cdot \text{Id}_J \quad \cdots \quad \cdots \quad \varepsilon_l \cdot A \quad \cdots]$ ), jest całkowicie unimodularna.

Dowód.

Ustalmy podzbiory  $M \subseteq K \times J \cup L \times I$  i  $J' \subseteq J$ . Jeśli istnieją  $k', k'' \in K$  oraz  $j \in J$  takie, że  $k' \neq k''$  i  $(k', j), (k'', j) \in M$ , to  $|\det A'_{J', M}| = 0$ . Podobnie, jeśli istnieją  $l', l'' \in L$  oraz  $i \in I$  takie, że  $l' \neq l''$  i  $(l', i), (l'', i) \in M$ , to  $|\det A'_{J', M}| = 0$ . Załóżmy zatem, że żadna z powyższych sytuacji nie ma miejsca. Definiujemy podzbiór  $J''$  zbioru  $J$  wzorem

$$J'' := \{j \in J : \text{istnieje } k \in K \text{ takie, że } (k, j) \in M\}.$$

Jeśli  $J'' \subsetneq J'$ , to ponownie  $|\det A'_{J', M}| = 0$ . W przeciwnym wypadku definiujemy podzbiór  $I'$  zbioru  $I$  wzorem

$$I' := \{i \in I : \text{istnieje } l \in L \text{ takie, że } (l, i) \in M\}.$$

Wtedy

$$|\det A'_{J', M}| = |\det A_{J' \setminus J'', I'}| \in \{0, 1\},$$

co kończy dowód. □

WNIOSEK 5.3.

Jeśli  $J \times I$ -macierz  $A$  jest całkowicie unimodularna,  $b \in \mathbb{Z}^J$  i  $c \in \mathbb{Z}^I$ , to

$$\max\{\langle c, x \rangle : x \in \mathbb{Z}^I \text{ i } A \cdot x \leq b\} = \min\{\langle b, y \rangle : y \in \mathbb{N}^J \text{ i } A^T \cdot y = c\}.$$

o ile

$$\{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\} \neq \emptyset \quad \text{ i } \quad \{y \in \mathbb{Q}_+^J : A^T \cdot y = c\} \neq \emptyset.$$

Dowód.

Definiujemy wielościany  $P$  wzorami

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : A \cdot x \leq b\} \quad \text{ i } \quad Q := \{y \in \mathbb{Q}_+^J : A^T \cdot y = c\}.$$

Korzystając z Twierdzenie 5.1 (oraz Lematu 5.2 w przypadku wielościanu  $Q$ ), wiemy, że wielościany  $P$  i  $Q$  są całkowite. Wykorzystując dodatkowo Fakt 4.9 wiemy zatem, że

$$\max\{\langle c, x \rangle : x \in \mathbb{Z}^I \text{ i } A \cdot x \leq b\} = \max\{\langle c, x \rangle : x \in P\}$$

i

$$\min\{\langle b, y \rangle : y \in \mathbb{N}^J \text{ i } A^T \cdot y = c\} = \min\{\langle b, y \rangle : y \in Q\}.$$

Ponieważ

$$\max\{\langle c, x \rangle : x \in P\} = \min\{\langle b, y \rangle : y \in Q\}$$

na mocy Wniosku 1.60, więc otrzymujemy tezę.  $\square$

DEFINICJA.

Macierz  $A \in \mathbb{M}_{J \times I}(\mathbb{Z})$  nazywamy UNIMODULARNĄ, jeśli

$$\text{NWD}(|\det A_{J', I'}| : J' \subseteq J \text{ i } |J'| = |I'|) \in \{0, 1\}$$

dla każdego podzbioru  $I' \subseteq I$  takiego,  $0 < |I'| \leq |I|$ .

LEMAT 5.4.

Jeśli  $\text{rk } A = |J|$  dla macierzy  $A \in \mathbb{M}_{J \times I}(\mathbb{Z})$ , to macierz  $A$  jest unimodularna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|\det A_{J, I'}| \in \{0, 1\}$$

dla każdego podzbioru  $I' \subseteq I$  takiego, że  $|I'| = |J|$ .

DOWÓD.

Założmy najpierw, że macierz  $A$  jest unimodularna i ustalmy podzbiór  $I' \subseteq I$  taki, że  $|I'| = |J|$ . Wtedy

$$|\det A_{J, I'}| = \text{NWD}(|\det A_{J', I'}| : J' \subseteq J \text{ i } |J'| = |I'|) \in \{0, 1\}.$$

Założmy teraz, że

$$|\det A_{J, I''}| \in \{0, 1\}$$

dla każdego podzbioru  $I'' \subseteq I$  takiego, że  $|I''| = |J|$  i ustalmy podzbiór  $I' \subseteq I$  taki, że  $0 < |I'| \leq |I|$ . Założmy, że

$$\text{NWD}(|\det A_{J', I'}| : J' \subseteq J \text{ i } |J'| = |I'|) \neq 0.$$

Wtedy wektory  $A^T(i)$ ,  $i \in I'$ , są liniowo niezależne. Ponieważ  $\text{rk } A = |J|$ , więc istnieje podzbiór  $I'' \subseteq I$  taki, że  $I' \subseteq I''$ ,  $|I''| = |J|$  i  $|\det A_{J, I''}| \neq 0$ . Wtedy  $|\det A_{J, I''}| = 1$ . Ponieważ

$$\text{NWD}(|\det A_{J', I'}| : J' \subseteq J \text{ i } |J'| = |I'|) \mid |\det A_{J, I''}|,$$

więc

$$\text{NWD}(|\det A_{J', I'}| : J' \subseteq J \text{ i } |J'| = |I'|) = 1. \quad \square$$

LEMAT 5.5.

Macierz  $A \in \mathbb{M}_{J \times I}(\mathbb{Z})$  jest całkowicie unimodularna wtedy i tylko wtedy, gdy macierz  $A' \in \mathbb{M}_{J \times (J \cup I)}(\mathbb{Z})$  dana wzorem

$$A'(j, k) := \begin{cases} 1 & \text{jeśli } k = j, \\ A(j, i) & \text{jeśli } k \in I, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases} \quad (j \in J, k \in J \cup I)$$

(tzn.  $A' := [\text{Id}_J \ A]$ ), jest unimodularna.

Dowód.

Założmy najpierw, że macierz  $A$  jest całkowicie unimodularna. Korzystając z Lematu 5.2, wiemy, że macierz  $A'$  jest całkowicie unimodularna, a więc tym bardziej macierz  $A'$  jest unimodularna.

Założmy teraz, że macierz  $A'$  jest unimodularna. Aby pokazać, że macierz  $A$  jest całkowicie unimodularna ustalmy podzbiory  $I' \subseteq I$  oraz  $J' \subseteq J$  takie, że  $|I'| = |J'|$ . Wtedy, korzystając z Lematu 5.4 (pamiętajmy, że  $\text{rk } A' = |J|$ ), otrzymujemy, że

$$|\det A_{J', I'}| = |\det A'_{J, (J \setminus J') \cup I'}| \in \{0, 1\},$$

co kończy dowód.

TWIERDZENIE 5.6.

Niech  $A \in \mathbb{M}_{J \times I}(\mathbb{Z})$  będzie macierzą rzędu  $|J|$ . Wtedy macierz  $A$  jest unimodularna wtedy i tylko wtedy, gdy wielościan

$$\{x \in \mathbb{Q}_+^I : A \cdot x = b\}$$

jest całkowity dla każdego wektora  $b \in \mathbb{Z}^I$ .

Dowód.

Założmy najpierw, że macierz  $A$  jest unimodularna i ustalmy wektor  $b \in \mathbb{Z}^I$ . Definiujemy wielościan  $P$  wzorem

$$P := \{x \in \mathbb{Q}_+^I : A \cdot x = b\}.$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że  $P \neq \emptyset$ . Korzystając z Faktu 2.7, wiemy, że  $\text{lin. space } P = \{0\}$ . Wykorzystując dodatkowo Fakt 2.43, otrzymujemy zatem, że ściany minimalne wielościanu  $P$  są wierzchołkami. Ustalmy wierzchołek  $z$  wielościanu  $P$ . Korzystając z Twierdzenia 2.40, wiemy, że istnieje podzbiór  $I' \subseteq I$  taki, że

$$\{z\} = \{x \in \mathbb{Q}^I : x_{I'} = 0 \text{ i } A \cdot x = b\}.$$

Ponieważ  $\text{rk } A = |J|$ , więc bez straty ogólności możemy założyć, że  $|I'| = |I| - |J|$ . Wtedy

$$\{z\} = \{x \in \mathbb{Q}^{I \setminus I'} : A_{J, I \setminus I'} \cdot x = b\}.$$

Z Twierdzenia Cramera wynika, że  $|\det A_{J, I \setminus I'}| \neq 0$ . Ponieważ macierz  $A$  jest unimodularna i  $\text{rk } A = |J|$ , więc  $|\det A_{J, I \setminus I'}| = 1$  na mocy Lematu 5.4. Stąd  $A_{J, I \setminus I'}^{-1} \in \mathbb{M}_{I \setminus I', J}(\mathbb{Z})$ . Ponieważ,  $z = A_{J, I \setminus I'}^{-1} \cdot b$ , więc  $z \in \mathbb{Z}^{I \setminus I'} \subseteq \mathbb{Z}^I$ , zatem wielościan  $P$  jest całkowity na mocy Faktu 4.9.

Założmy teraz, że wielościan

$$\{x \in \mathbb{Q}_+^I : A \cdot x = b\}$$

jest całkowity dla każdego wektora  $b \in \mathbb{Z}^I$ . Aby udowodnić, że macierz  $A$  jest unimodularna, wystarczy, korzystając z Lematu 5.4, pokazać, że  $|\det A_{J, I'}| \in \{0, 1\}$  dla każdego podzbioru  $I'$  zbioru  $I$  takiego, że  $|I'| = |J|$ . Ustalmy zatem podzbiór  $I'$  zbioru  $I$  taki, że  $|I'| = |J|$ . Bez straty ogólności możemy założyć, że  $|\det A_{J, I'}| \neq 0$ . Aby udowodnić, że  $|\det A_{J, I'}| = 1$ , wystarczy pokazać, że

$$A_{J, I'}^{-1} \in \mathbb{M}_{I' \times J}(\mathbb{Z}),$$

a więc że

$$A_{J, I'}^{-1} \cdot \mathbf{e}_j \in \mathbb{Z}^{I'}$$

dla każdego  $j \in J$ . Ustalmy  $j \in J$ . Wybierzmy wektor  $y \in \mathbb{Z}^{I'}$  taki, że

$$A_{J, I'}^{-1} \cdot \mathbf{e}_j + y \in \mathbb{Q}_+^{I'}.$$

Definiujemy wektory  $b \in \mathbb{Z}^J$  i  $z \in \mathbb{Q}^I$  wzorami

$$b := \mathbf{e}_j + A_{J, I'} \cdot y \quad \text{ i } \quad z := A_{J, I'}^{-1} \cdot \mathbf{e}_j + y.$$

Wtedy wektor  $z$  jest wierzchołkiem wielościanu

$$\{x \in \mathbb{Q}_+^I : A \cdot x = b\}$$

na mocy Twierdzenia 2.40. Stąd  $z \in \mathbb{Z}^I$  na mocy Faktu 4.9, co kończy dowód.  $\square$

#### WNIOSEK 5.7 (HOFFMAN/KRUSKAL).

Macierz  $A \in \mathbb{M}_{J \times I}(\mathbb{Z})$  jest całkowicie unimodularna wtedy i tylko wtedy, gdy wielościan

$$\{x \in \mathbb{Q}_+^I : A \cdot x \leq b\}$$

jest całkowity dla każdego wektora  $b \in \mathbb{Z}^J$ .

Dowód.

Dla wektora  $b \in \mathbb{Z}^I$  definiujemy wielościany  $P_b$  i  $Q_b$  wzorami

$$P_b := \{x \in \mathbb{Q}_+^I : A \cdot x \leq b\} \quad \text{ i } \quad Q_b := \{z \in \mathbb{Q}_+^{J \cup I} : A' \cdot z = b\},$$

gdzie macierz  $A' \in \mathbb{M}_{J \times (J \cup I)}(\mathbb{Z})$  dana jest wzorem

$$A'(j, k) := \begin{cases} 1 & \text{jeśli } k = j, \\ A(j, i) & \text{jeśli } k \in I, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases} \quad (j \in J, k \in J \cup I)$$

(tzn.  $A' := [\text{Id}_J \ A]$ ). Korzystając z Lematu 5.5 wiemy, że macierz  $A$  jest całkowicie unimodularna wtedy i tylko wtedy, gdy macierz  $A'$  jest unimodularna. Dalej, ponieważ  $\text{rk } A' = |J|$ , więc z Twierdzenia 5.6 wynika, że macierz  $A'$  jest całkowicie unimodularna wtedy i tylko wtedy, gdy wielościan  $Q_b$  jest całkowity dla każdego wektora  $b \in \mathbb{Z}^J$ . Dla zakończenia dowodu wystarczy zatem pokazać, że jeśli  $b \in \mathbb{Z}^J$ , to wielościan  $Q_b$  jest całkowity wtedy i tylko wtedy, gdy wielościan  $P_b$  jest całkowity.

Ustalmy zatem wektor  $b \in \mathbb{Z}^J$ . Definiujemy funkcję  $F : P_b \rightarrow Q_b$  wzorem

$$F(x) := (b - A \cdot x) + x \quad (x \in P_b).$$

Wtedy funkcja  $F$  jest bijekcją – funkcja odwrotna  $G : Q_b \rightarrow P_b$  dana jest wzorem

$$G(z) := z|_I \quad (z \in Q_b).$$

Ponadto,  $F(P_b \cap \mathbb{Z}^I) = Q_b \cap \mathbb{Z}^{J \cup I}$ . Stąd natychmiast wynika, że  $F((P_b)_I) = (Q_b)_I$ . W szczególności,  $P_b = (P_b)_I$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $Q_b = (Q_b)_I$ , co kończy dowód.  $\square$

WNIOSEK 5.8.

Macierz  $A \in \mathbb{M}_{J \times I}(\mathbb{Z})$  jest całkowicie unimodularna wtedy i tylko wtedy, gdy wielościan

$$\{x \in \mathbb{Q}^I : c \leq x \leq d \text{ i } a \leq A \cdot x \leq b\}$$

jest całkowity dla wszystkich wektorów  $a, b \in \mathbb{Z}^J$  i  $c, d \in \mathbb{Z}^I$ .

Dowód.

Definiujemy macierz  $A' \in \mathbb{M}_{(I \cup J \times \{1,2\}) \times I}(\mathbb{Z})$  wzorem

$$A'(k, i) := \begin{cases} 1 & \text{jeśli } k = i, \\ (-1)^p \cdot A(j, i) & \text{jeśli } k = (j, p) \text{ dla pewnych } j \in J \text{ i } p \in \{1, 2\}, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$$

$(i \in I, k \in J \times \{1, 2\})$

(tzn.  $A' := [\text{Id}_I \quad -A \quad A]^T$ ).

Zauważmy najpierw, korzystając z Lematu 5.2, że macierz  $A$  jest całkowicie unimodularna wtedy i tylko wtedy, gdy macierz  $A'$  jest całkowicie unimodularna. Dalej, z Wniosku 5.7 wynika, że macierz  $A'$  jest całkowicie unimodularna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych wektorów  $a, b \in \mathbb{Z}^J$  i  $c, d \in \mathbb{Z}^I$  całkowity jest wielościan  $P'(a, b, c, d)$  dany wzorem

$$P'(a, b, c, d) := \{x \in \mathbb{Q}_+^I : A' \cdot x \leq b'\},$$

gdzie wektor  $b' \in \mathbb{Z}^{I \cup J \times \{1, 2\}}$  dany jest wzorem

$$b'(k) := \begin{cases} d(k) - c(k) & \text{jeśli } k \in I, \\ a(j) - \langle A(j), c \rangle & k = (j, 1) \text{ dla pewnego } j \in J, \\ b(j) - \langle A(j), c \rangle & k = (j, 2) \text{ dla pewnego } j \in J, \end{cases}$$

$(k \in J \times \{1, 2\})$ ,

(tzn.  $b' := (d - c, a - A \cdot c, b - A \cdot c)$ ). Wreszcie, jeśli dla wektorów  $a, b \in \mathbb{Z}^J$  i  $c, d \in \mathbb{Z}^I$  zdefiniujemy wielościan  $P(a, b, c, d)$  wzorem

$$P(a, b, c, d) := \{x \in \mathbb{Q}^I : c \leq x \leq d \text{ i } a \leq A \cdot x \leq b\},$$

to ponieważ wielościan  $P(a, b, c, d)$  jest przesunięciem o wektor  $c$  wielościanu  $P'(a, b, c, d)$ , więc wielościan  $P(a, b, c, d)$  jest całkowity wtedy i tylko wtedy, gdy wielościan  $P'(a, b, c, d)$  jest całkowity.  $\square$

#### WNIOSEK 5.9.

Macierz  $A \in \mathbb{M}_{J \times I}(\mathbb{Z})$  jest całkowicie unimodularna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\max\{\langle c, x \rangle : x \in \mathbb{N}^I \text{ i } A \cdot x \leq b\} = \min\{\langle b, y \rangle : y \in \mathbb{N}^J \text{ i } A^T \cdot y \geq c\}$$

dla wszystkich wektorów  $b \in \mathbb{Z}^J$  i  $c \in \mathbb{Z}^I$  takich, że

$$\{x \in \mathbb{Q}_+^I : A \cdot x \leq b\} \neq \emptyset \quad \text{i} \quad \{y \in \mathbb{Q}_+^J : A^T \cdot y \geq c\} \neq \emptyset.$$

Dowód.

Założmy najpierw, że macierz  $A$  jest całkowicie unimodularna. Ustalmy wektory  $b \in \mathbb{Z}^J$  i  $c \in \mathbb{Z}^I$  takie, że

$$\{x \in \mathbb{Q}_+^I : A \cdot x \leq b\} \neq \emptyset \quad \text{i} \quad \{y \in \mathbb{Q}_+^J : A^T \cdot y \geq c\} \neq \emptyset.$$

Zdefiniujmy wielościany  $P$  i  $Q$  wzorami

$$P := \{x \in \mathbb{Q}_+^I : A \cdot x \leq b\} \quad \text{i} \quad Q := \{y \in \mathbb{Q}_+^J : A^T \cdot y \geq c\}.$$

Korzystając z Wniosku 5.7 wiemy, że wielościany  $P$  i  $Q$  są całkowite. W szczególności,

$$\max\{\langle c, x \rangle : x \in P\} = \max\{\langle c, x \rangle : x \in \mathbb{N}^I \text{ i } A \cdot x \leq b\}$$

i

$$\min\{\langle b, y \rangle : y \in Q\} = \min\{\langle b, y \rangle : y \in \mathbb{N}^J \text{ i } A^T \cdot y \geq c\},$$

co kończy dowód wobec Twierdzenia 1.61.

Założmy teraz, że

$$\max\{\langle c, x \rangle : x \in \mathbb{N}^I \text{ i } A \cdot x \leq b\} = \min\{\langle b, y \rangle : y \in \mathbb{N}^J \text{ i } A^T \cdot y \geq c\}$$

dla wszystkich wektorów  $b \in \mathbb{Z}^J$  i  $c \in \mathbb{Z}^I$  takich, że

$$\{x \in \mathbb{Q}_+^I : A \cdot x \leq b\} \neq \emptyset \quad \text{i} \quad \{y \in \mathbb{Q}_+^J : A^T \cdot y = c\} \neq \emptyset.$$

Aby udowodnić, że macierz  $A$  jest całkowicie unimodularna, wystarczy, korzystając z Wniosku 5.7, pokazać, że wielościan

$$\{x \in \mathbb{Q}_+^I : A \cdot x \leq b\}$$

jest całkowity dla każdego wektora  $b \in \mathbb{Z}^J$ . Ustalmy zatem wektor  $b \in \mathbb{Z}^J$  i zdefiniujmy wielościan  $P$  wzorem

$$P := \{x \in \mathbb{Q}_+^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Jeśli wielościan  $P$  jest pusty, to oczywiście  $P = P_I$ . Założmy zatem, że wielościan  $P$  jest niepusty. Korzystając z Faktu 2.7 wiemy, że lin. space  $P = \{0\}$ , zatem ściany minimalne wielościanu  $P$  są wierzchołkami na mocy Faktu 2.43. Ustalmy wierzchołek z wielościanu  $P$ . Z definicji istnieje wektor  $c \in \mathbb{Z}^I$  taki, że

$$(*) \quad \langle c, z \rangle > \langle c, x \rangle$$

dla wszystkich wektorów  $x \in P$  takich, że  $x \neq z$ . W szczególności

$$\langle c, z \rangle \geq \max\{\langle c, x \rangle : x \in P \cap \mathbb{N}_+^I\}.$$

Z drugiej strony, korzystając z Twierdzenia 1.61 i założenia otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \langle c, z \rangle &= \max\{\langle c, x \rangle : x \in P\} \\ &= \min\{\langle b, y \rangle : y \in \mathbb{Q}_+^J \text{ i } A^T \cdot y \geq c\} \\ &\leq \min\{\langle b, y \rangle : y \in \mathbb{N}^J \text{ i } A^T \cdot y \geq c\} \\ &= \max\{\langle c, x \rangle : x \in P \cap \mathbb{N}^I\}. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\langle c, z \rangle = \max\{\langle c, x \rangle : x \in P \cap \mathbb{N}^I\},$$

a więc  $z \in \mathbb{Z}^I$  na mocy (\*). Wobec Faktu 4.9 oznacza to, że wielościan  $P$  jest całkowity, co kończy dowód.  $\square$

## 5.2. CHARAKTERYZACJE MACIERZY CAŁKOWICIE UNIMODULARNYCH

LEMAT 5.10.

Jeśli macierz  $A \in \mathbb{M}_{J \times I}(\mathbb{Z})$  jest całkowicie unimodularna, to dla każdego podzbioru  $I_0$  zbioru  $I$  istnieją zbiory  $I_1$  i  $I_2$  takie, że  $I_0 = I_1 \cup I_2$ ,  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$  i

$$A \cdot (\mathbf{e}_{I_1} - \mathbf{e}_{I_2}) \in \{-1, 0, 1\}^J.$$

Dowód.

Ustalmy podzbiór  $I_0$  zbioru  $I$  i zdefiniujmy wielościan  $P$  wzorem

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : 0 \leq x \leq \mathbf{e}_{I_0} \text{ i } \lfloor \frac{1}{2} \cdot A \cdot \mathbf{e}_{I_0} \rfloor \leq A \cdot x \leq \lceil \frac{1}{2} \cdot A \cdot \mathbf{e}_{I_0} \rceil\}.$$

Wniosek 5.8 implikuje, że wielościan  $P$  jest całkowity. Zauważmy, że wielościan  $P$  jest niepusty, gdyż  $\frac{1}{2} \cdot \mathbf{e}_{I_0} \in P$ . Wybierzmy  $z \in P \cap \mathbb{Z}^I$ . Wtedy  $x \in \{0, 1\}^I$ . Definiujemy zbiory  $I_1$  i  $I_2$  wzorami

$$I_1 := \{i \in I_0 : x(i) = 0\} \quad \text{ i } \quad I_2 := \{i \in I_0 : x(i) = 1\}.$$

W szczególności,  $x = \mathbf{e}_{I_2}$  i  $\mathbf{e}_{I_1} + \mathbf{e}_{I_2} = \mathbf{e}_{I_0}$ . Oczywiście,  $I_0 = I_1 \cup I_2$  i  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ . Ponadto,

$$A \cdot (\mathbf{e}_{I_1} - \mathbf{e}_{I_2}) = A \cdot \mathbf{e}_{I_0} - 2 \cdot A \cdot x.$$

Stąd

$$A \cdot (\mathbf{e}_{I_1} - \mathbf{e}_{I_2}) \leq A \cdot \mathbf{e}_{I_0} - 2 \cdot \lfloor \frac{1}{2} \cdot A \cdot \mathbf{e}_{I_0} \rfloor$$

i

$$A \cdot (\mathbf{e}_{I_1} - \mathbf{e}_{I_2}) \geq A \cdot \mathbf{e}_{I_0} - 2 \cdot \lceil \frac{1}{2} \cdot A \cdot \mathbf{e}_{I_0} \rceil,$$

więc

$$A \cdot (\mathbf{e}_{I_1} - \mathbf{e}_{I_2}) \in \{-1, 0, 1\}^J. \quad \square$$

LEMAT 5.11.

Niech  $A \in \mathbb{M}_{J \times I}(\{-1, 0, 1\})$  i  $|I| = |J|$ . Jeśli  $|\det A_{J', I'}| \in \{0, 1\}$  dla wszystkich podzbiorów  $J' \subset J$  i  $I' \subset I$  takich, że  $|I'| = |J'|$ , to

$$|\det A| = 0 \quad \text{lub} \quad 2 \nmid |\det A|$$

lub

$$A \cdot \mathbf{e}_I \equiv 0 \pmod{2} \quad \text{i} \quad A^T \cdot \mathbf{e}_J \equiv 0 \pmod{2}.$$

Dowód.

Jeśli wektory  $A^T(i)$ ,  $i \in I$ , są liniowo niezależne nad ciałem  $\mathbb{F}_2$ , to  $2 \nmid |\det A|$ , założmy zatem, że istnieje niepusty podzbiór  $I'$  zbioru  $I$  taki, że

$$A \cdot \mathbf{e}_{I'} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Wtedy istnieje także niepusty podzbiór  $J'$  zbioru  $J$  taki, że

$$A^T \cdot \mathbf{e}_{J'} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Jeśli  $I' = I$  i  $J' = J$ , to dowód jest zakończony. Załóżmy zatem, że  $I' \neq I$ . Wtedy  $2 \mid |\det A_{J'', I'}|$  dla każdego podzbioru  $J''$  zbioru  $J$  takiego, że  $|J''| = |I'|$ . Z założeń wynika, że wtedy  $|\det A_{J'', I'}| = 0$  dla każdego podzbioru  $J''$  zbioru  $J$  takiego, że  $|J''| = |I'|$ , co implikuje, że  $|\det A| = 0$ . Analogicznie pokazujemy, że jeśli  $J' \neq J$ , to  $|\det A| = 0$ .  $\square$

LEMAT 5.12.

Niech  $A \in \mathbb{M}_{J \times I}(\{-1, 0, 1\})$  i  $|I| = |J|$ . Jeśli  $|\det A_{J', I'}| \neq 2$  dla wszystkich podzbiorów  $J' \subseteq J$  i  $I' \subseteq I$  takich, że  $|I'| = |J'|$ , to

$$|\det A| \in \{0, 1\}.$$

Dowód.

Tezę udowodnimy przez indukcję ze względu na  $|I|$ . Jeśli  $|I| = 1$ , to teza jest oczywista, więc założmy, że  $|I| > 1$ , i wybierzmy  $i_0 \in I$ . Jeśli  $A(j, i_0) = 0$  dla wszystkich  $j \in J$ , to  $|\det A| = 0$ , założmy zatem, że istnieje  $j_0 \in J$  takie, że  $A(j_0, i_0) \neq 0$ . Definiujemy  $I' := I \setminus \{i_0\}$  i  $J' := J \setminus \{j_0\}$ . Definiujemy macierz  $J' \times I'$ -macierz  $A'$  wzorem

$$A'(j, i) := A(j, i) - A(j, i_0) \cdot \frac{A(j_0, i)}{A(j_0, i_0)} \quad (i \in I', j \in J').$$

Zauważmy, że

$$|\det A'_{J'', I''}| = |\det A_{J'' \cup \{j_0\}, I'' \cup \{i_0\}}|$$

dla wszystkich podzbiorów  $I'' \subseteq I'$  i  $J'' \subseteq J'$ . W szczególności,

$$|\det A'_{J'', I''}| \neq 2$$

dla wszystkich podzbiorów  $I'' \subseteq I'$  i  $J'' \subseteq J'$ . Ponadto,

$$|A'(j, i)| \leq 2$$

dla wszystkich  $i \in I'$  i  $j \in J'$ . Łącznie z wcześniejszą obserwacją oznacza to, że  $A' \in \mathbb{M}_{J' \times I'}(\{-1, 0, 1\})$ . Korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy zatem, że

$$|\det A| = |\det A'| \in \{0, 1\},$$

co kończy dowód. □

**TWIERDZENIE 5.13.**

Dla macierzy  $A \in \mathbb{M}_{J \times I}(\{-1, 0, 1\})$  następujące warunki są równoważne.

- (1) Macierz  $A$  jest całkowicie unimodularna.
- (2) Wielościan

$$\{x \in \mathbb{Q}_+^I : A \cdot x \leq b\}$$

jest całkowity dla każdego wektora  $b \in \mathbb{Z}^J$ .

- (3) Wielościan

$$\{x \in \mathbb{Q}^I : c \leq x \leq d \text{ i } a \leq A \cdot x \leq b\}$$

jest całkowity dla wszystkich wektorów  $a, b \in \mathbb{Z}^J$  i  $c, d \in \mathbb{Z}^I$ .

- (4) Dla każdego podzbioru  $I_0$  zbioru  $I$  istnieją podzbiory  $I_1$  i  $I_2$  takie, że  $I_0 = I_1 \cup I_2$ ,  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$  i

$$A \cdot (\mathbf{e}_{I_1} - \mathbf{e}_{I_2}) \in \{-1, 0, 1\}^J.$$

- (5) Jeśli  $I'$  jest podzbiorem zbioru  $I$ ,  $J'$  jest podzbiorem zbioru  $J$ ,  $|I'| = |J'|$  i

$$A_{J',I'} \cdot \mathbf{e}_{I'} \equiv 0 \pmod{2},$$

to  $|\det A_{J',I'}| = 0$ .

- (6) Jeśli  $I'$  jest podzbiorem zbioru  $I$ ,  $J'$  jest podzbiorem zbioru  $J$ ,  $|I'| = |J'|$ ,

$$A_{J',I'} \cdot \mathbf{e}_{I'} \equiv 0 \pmod{2} \quad \text{i} \quad A_{J',I'}^T \cdot \mathbf{e}_{J'} \equiv 0 \pmod{2},$$

to

$$\langle \mathbf{e}_{J'}, A_{J',I'} \cdot \mathbf{e}_{I'} \rangle \equiv 0 \pmod{4}.$$

- (7) Jeśli  $I'$  jest podzbiorem zbioru  $I$ ,  $J'$  jest podzbiorem zbioru  $J$  i  $|I'| = |J'|$ , to  $|\det A_{J',I'}| \neq 2$ .

Dowód.

- (1)  $\iff$  (2): Wynika z Wniosku 5.7.  
 (1)  $\iff$  (3): Wynika z Wniosku 5.8.  
 (1)  $\implies$  (4): Wynika z Lematu 5.10.  
 (4)  $\implies$  (5): Ustalmy podzbiory  $I' \subseteq I$  i  $J' \subseteq J$  takie, że  $|I'| = |J'|$  i

$$A_{J',I'} \cdot \mathbf{e}_{I'} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Warunek (4) implikuje, że istnieje wektor  $x \in \{-1, 1\}^{J'}$  taki, że

$$A_{J',I'} \cdot x \in \{-1, 0, 1\}^{J'}.$$

Ponieważ  $x \equiv \mathbf{e}_{I'} \pmod{2}$ , więc

$$A_{J',I'} \cdot x \equiv A_{J',I'} \cdot \mathbf{e}_{I'} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Ostatecznie,  $A_{J',I'} \cdot x = 0$ . Ponieważ  $x \neq 0$ , więc  $|\det A_{J',I'}| = 0$ .

- (4)  $\implies$  (6): Ustalmy podzbiory  $I' \subseteq I$  i  $J' \subseteq J$  takie, że  $|I'| = |J'|$  i

$$A_{J',I'} \cdot \mathbf{e}_{I'} \equiv 0 \pmod{2} \quad \text{i} \quad A_{J',I'}^T \cdot \mathbf{e}_{J'} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Warunek (4) implikuje, że istnieją podzbiory  $I_1$  i  $I_2$  zbioru  $I$  takie, że  $I' = I_1 \cup I_2$ ,  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$  i

$$A_{J',I'} \cdot (\mathbf{e}_{I_1} - \mathbf{e}_{I_2}) \in \{-1, 0, 1\}^{J'}.$$

Ponieważ  $\mathbf{e}_{I'} = \mathbf{e}_{I_1} + \mathbf{e}_{I_2} \equiv \mathbf{e}_{I_1} - \mathbf{e}_{I_2} \pmod{2}$ , więc

$$A_{J',I'} \cdot (\mathbf{e}_{I_1} - \mathbf{e}_{I_2}) \equiv A_{J',I'} \cdot \mathbf{e}_{I'} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Ostatecznie,  $A_{J',I'} \cdot (\mathbf{e}_{I_1} - \mathbf{e}_{I_2}) = 0$ , a więc

$$A_{J',I'} \cdot \mathbf{e}_{I_1} = A_{J',I'} \cdot \mathbf{e}_{I_2}.$$

Stąd

$$A_{J',I'} \cdot \mathbf{e}_{I'} = A_{J',I'} \cdot \mathbf{e}_{I_1} + A_{J',I'} \cdot \mathbf{e}_{I_2} = 2 \cdot A_{J',I'} \cdot \mathbf{e}_{I_1}.$$

W konsekwencji,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}_{J'}, A_{J',I'} \cdot \mathbf{e}_{I'} \rangle &= 2 \cdot \langle \mathbf{e}_{J'}, A_{J',I'} \cdot \mathbf{e}_{I_1} \rangle \\ &= 2 \cdot \langle A_{J',I'}^T \cdot \mathbf{e}_{J'}, \mathbf{e}_{I_1} \rangle \equiv 0 \pmod{4}, \end{aligned}$$

gdyż  $A_{J',I'}^T \cdot \mathbf{e}_{J'} \equiv 0 \pmod{2}$ .

(5)  $\implies$  (1): Przez indukcję ze względu na  $|I'|$  udowodnimy, że

$$|\det A_{J',I'}| \in \{0, 1\}$$

dla wszystkich podzbiorów  $I' \subseteq I$  i  $J' \subseteq J$  takich, że  $|I'| = |J'|$ . Jeśli  $|I'| = 1$ , to teza jest oczywista, założmy zatem, że  $|I'| > 1$ . Korzystając z założenia indukcyjnego, Lematu 5.11 i warunku (5) otrzymujemy, że

$$|\det A_{J',I'}| = 0 \quad \text{lub} \quad 2 \nmid |\det A_{J',I'}|.$$

W szczególności,  $|\det A_{J',I'}| \neq 2$ , a więc teza wynika z założenia indukcyjnego i Lematu 5.12.

(6)  $\implies$  (1): Przez indukcję ze względu na  $|I'|$  udowodnimy, że

$$|\det A_{J',I'}| \in \{0, 1\}$$

dla wszystkich podzbiorów  $I' \subseteq I$  i  $J' \subseteq J$  takich, że  $|I'| = |J'|$ . Jeśli  $|I'| = 1$ , to teza jest oczywista, założmy zatem, że  $|I'| > 1$ . Korzystając z założenia indukcyjnego i Lematu 5.11 otrzymujemy, że

$$|\det A_{J',I'}| = 0 \quad \text{lub} \quad 2 \nmid |\det A_{J',I'}|$$

lub

$$A_{J',I'} \cdot \mathbf{e}_{I'} \equiv 0 \pmod{2} \quad \text{i} \quad A_{J',I'}^T \cdot \mathbf{e}_{J'} \equiv 0 \pmod{2}.$$

W pierwszych dwóch przypadkach teza wynika z Lematu 5.12 podobnie jak wyżej, załóżmy zatem, że

$$A_{J',I'} \cdot \mathbf{e}_{I'} \equiv 0 \pmod{2} \quad \text{i} \quad A_{J',I'}^T \cdot \mathbf{e}_{J'} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Wybermy  $j_0 \in J'$  i zdefiniujmy zbiór  $J''$  wzorem

$$J'' := J' \setminus \{j_0\}.$$

Z założenia indukcyjnego macierz  $A_{J'',I'}$  jest całkowicie unimodularna, więc na mocy Lematu 5.10 istnieje wektor  $x \in \{-1, 1\}^{J''}$  taki, że

$$A_{J'',I'} \cdot x \in \{-1, 0, 1\}^{J''}.$$

Ponieważ

$$A_{J'',I'} \cdot \mathbf{e}_{I'} \equiv 0 \pmod{2} \quad \text{i} \quad x \equiv \mathbf{e}_{I'} \pmod{2},$$

wiec  $A_{J'',I'} \cdot x = 0$ . Wybiermy  $i_0 \in I'$  i zdefiniujmy zbiór  $I''$  wzorem

$$I'' := I' \setminus \{i_0\}.$$

Zdefiniujmy macierz  $A' \in \mathbb{M}_{J' \times I'}(\mathbb{Z})$  wzorem

$$A'(j, i) := \begin{cases} \langle A(j), x \rangle & \text{jeśli } i = i_0, \\ A(j, i) & \text{jeśli } i \neq i_0, \end{cases} \quad (i \in I', j \in J').$$

Wtedy  $|\det A'| = |\det A_{J,I}|$ . Z drugiej strony,

$$A'(j, i_0) = 0$$

dla wszystkich  $j \in J''$ , więc

$$|\det A'| = |A'(j_0, i_0)| \cdot |\det A_{J'',I''}|,$$

zatem

$$|\det A'| = 0 \quad \text{lub} \quad |\det A'| = |A'(j_0, i_0)|$$

na mocy założenia indukcyjnego. W pierwszym przypadku dowód jest zakończony, w drugim otrzymujemy, że

$$|\det A_{J',I'}| = |A'(j_0, i_0)| = |\langle \mathbf{e}_{J'}, A'^T(i_0) \rangle| = |\langle \mathbf{e}_{J'}, A_{J',I'} \cdot x \rangle|$$

$$= |\langle A_{J',I'}^T \cdot \mathbf{e}_{J'}, x \rangle| \equiv |\langle A_{J',I'}^T \cdot \mathbf{e}_{J'}, \mathbf{e}_{I'} \rangle| \pmod{4},$$

gdyż

$$x \equiv \mathbf{e}_{I'} \pmod{2} \quad \text{i} \quad A_{J',I'}^T \cdot \mathbf{e}_{J'} \equiv 0 \pmod{2}.$$

W szczególności, wykorzystując warunek (6), otrzymujemy, że  $|\det A_{J',I'}| \neq 2$ , a więc teza wynika z założenia indukcyjnego i Lematu 5.12.

(1)  $\implies$  (7): Oczywiste.

(7)  $\implies$  (1): Wynika z Lematu 5.12. □

**Twierdzenie 5.14.**

Macierz  $A \in \mathbb{M}_{J \times I}(\mathbb{Z})$  jest całkowicie unimodularna wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej  $k$  i dowolnych wektorów  $b \in \mathbb{Z}^J$  i  $y \in \mathbb{N}^I$  takich, że

$$A \cdot y \leq k \cdot b,$$

istnieją wektory  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}^I$  takie, że

$$A \cdot x_p \leq b$$

dla każdego  $p \in [1, k]$  oraz

$$y = \sum_{p \in [1, k]} x_p.$$

**Dowód.**

Założmy najpierw, że powyższy warunek jest spełniony. Ustalmy wektor  $b \in \mathbb{Z}^J$  i zdefiniujmy wielościan  $P$  wzorem

$$P := \{x \in \mathbb{Q}_+^I : A \cdot x \leq b\}.$$

Ustalmy wektor  $x \in P$ . Wtedy istnieje dodatnia liczba całkowita  $k$  taka, że  $k \cdot x \in \mathbb{N}^I$ . Ponadto

$$A \cdot (k \cdot x) \leq k \cdot b,$$

zatem z założenia istnieją wektory  $x_1, \dots, x_k \in P \cap \mathbb{N}^I$  takie, że

$$k \cdot x = \sum_{p \in [1, k]} x_p,$$

zatem

$$x = \sum_{p \in [1, k]} \frac{1}{k} \cdot x_p.$$

Korzystając z Lematu 1.39, otrzymujemy, że  $x \in P_I$ . Z dowolności wektora  $x$  wynika, że wielościan  $P$  jest całkowity, a więc macierz  $A$  jest całkowicie unimodularna na mocy Wniosku 5.7.

Założmy teraz, że macierz  $A$  jest całkowicie unimodularna i ustalmy wektor  $b \in \mathbb{Z}^I$ . Przez indukcję ze względu na  $k$  pokażemy, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej  $k$  oraz dowolnego wektora  $y \in \mathbb{N}^I$  takich, że  $A \cdot y \leq k \cdot b$ , istnieją wektory  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{N}^I$  takie, że  $A \cdot x_p \leq b$  dla każdego  $p \in [1, k]$  oraz

$$y = \sum_{p \in [1, k]} x_p.$$

Dla  $k = 1$  teza jest oczywista, założmy zatem, że  $k > 1$ , i zdefiniujmy wielościan  $P$  wzorem

$$P := \{x \in \mathbb{Q}^I : 0 \leq x \leq y \text{ i } A \cdot y - (k-1) \cdot b \leq A \cdot x \leq b\}.$$

Ponieważ macierz  $A$  jest całkowicie unimodularna, więc wielościan  $P$  jest całkowity na mocy Wniosku 5.8. Ponadto  $\frac{1}{k} \cdot y \in P$ , więc wielościan  $P$  jest niepusty. W szczególności,  $P \cap \mathbb{N}^I \neq \emptyset$ . Wybierzmy wektor  $x_k \in P \cap \mathbb{N}^I$ . Wtedy  $A \cdot x_k \leq b$ . Ponadto  $y - x_k \in \mathbb{N}^I$  i  $A \cdot (y - x_k) \leq (k-1) \cdot b$ , zatem na mocy założenia indukcyjnego istnieją wektory  $x_1, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{N}^I$  takie, że  $A \cdot x_p \leq b$  dla każdego  $p \in [1, k-1]$  oraz

$$y - x_k = \sum_{p \in [1, k-1]} x_p,$$

co kończy dowód. □

#### TWIERDZENIE 5.15.

Dla  $J \times I$ -macierzy  $A$  takiej, że  $\text{rk } A = |J|$ , następujące warunki są równoważne.

- (1)  $A_{J, I_0}^{-1} \cdot A \in \mathbb{M}_{I_0 \times I}(\mathbb{Z})$  dla każdego podzbioru  $I_0$  zbioru  $I$  takiego, że  $|I_0| = |I|$  i  $|\det A_{J, I_0}| \neq 0$ .
- (2) Macierz  $A_{J, I_0}^{-1} \cdot A$  jest całkowicie unimodularna dla każdego podzbioru  $I_0$  zbioru  $I$  takiego, że  $|I_0| = |I|$  i  $|\det A_{J, I_0}| \neq 0$ .
- (3) Istnieje podzbiór  $I_0 \subseteq I$  taki, że  $|I_0| = |J|$ ,  $|\det A_{J, I_0}| \neq 0$  i macierz  $A_{J, I_0}^{-1} \cdot A$  jest całkowicie unimodularna.

Dowód.

W dowodzie będziemy korzystać z następującej obserwacji: jeśli  $I_0 \subseteq I$ ,  $|I_0| = |J|$ ,  $|\det A_{J, I_0}| \neq 0$  i

$$A' := A_{J, I_0}^{-1} \cdot A,$$

to

$$A_{J,I'} = A_{J,I_0} \cdot A'_{I_0,I'}$$

dla każdego podzbioru  $I'$  zbioru  $I$ .

(1)  $\implies$  (2): Ustalmy podzbiór  $I_0$  zbioru  $I$  taki, że  $|I_0| = |J|$  i  $|\det A_{J,I_0}| \neq 0$ . Definiujemy  $I_0 \times I$ -macierz  $A'$  wzorem

$$A' := A_{J,I_0}^{-1} \cdot A.$$

Ustalmy podzbiory  $I_1 \subseteq I_0$  i  $I' \subseteq I$  takie, że  $|I_1| = |I'|$  i  $|\det A'_{I_1,I'}| \neq 0$ . Definiujemy podzbiór  $I_2$  wzorem

$$I_2 := I_0 \setminus I_1.$$

Z warunku  $|\det A_{I_1,I'}| \neq 0$  wynika, że  $I' \cap I_2 = \emptyset$ . W szczególności,

$$|\det A'_{I_0,I' \cup I_2}| = |\det A'_{I_1,I'}| \neq 0.$$

Z równości

$$A_{J,I' \cup I_2} = A_{J,I_0} \cdot A'_{I_0,I' \cup I_2}$$

wynika zatem, że  $|\det A_{J,I' \cup I_2}| \neq 0$ . Stąd z warunku (1) otrzymujemy, że

$$A_{I_0,I' \cup I_2}^{-1} \cdot A' = A_{J,I' \cup I_2}^{-1} \cdot A \in \mathbb{M}_{(I' \cup I_2) \times I}(\mathbb{Z}).$$

W szczególności,

$$A_{I_0,I' \cup I_2}^{-1} \cdot A' \cdot \mathbf{e}_j \in \mathbb{Z}^{I' \cup I_2}$$

dla każdego  $i \in I_0$ , a więc  $A_{I_0,I' \cup I_2}^{-1} \in \mathbb{M}_{(I' \cup I_2) \times I_0}(\mathbb{Z})$ . Stąd

$$|\det A'_{I_1,I'}| = |\det A'_{I_0,I' \cup I_2}| = 1.$$

(2)  $\implies$  (3): Oczywiście wobec warunku  $\text{rk } A = |J|$ .

(3)  $\implies$  (1): Wybierzmy podzbiór  $I_0$  zbioru  $I$  taki, że  $|I_0| = |J|$ ,  $|\det A_{J,I_0}| \neq 0$  i macierz  $A' := A_{J,I_0}^{-1} \cdot A$  jest całkowicie unimodularna. Następnie, ustalmy podzbiór  $I'_0$  zbioru  $I$  taki, że  $|I'_0| = |J|$  oraz  $|\det A_{J,I'_0}| \neq 0$ . Z równości

$$A_{J,I'_0} = A_{J,I_0} \cdot A'_{I_0,I'_0},$$

wynika, że  $|\det A'_{I_0,I'_0}| \neq 0$  oraz

$$A_{J,I'_0}^{-1} \cdot A = A_{I_0,I'_0}^{-1} \cdot A'.$$

Ponieważ macierz  $A'$  jest całkowicie unimodularna, więc

$$A_{I_0,I'_0}^{-1} \cdot A' \in \mathbb{M}_{I'_0 \times I}(\mathbb{Z}),$$

co kończy dowód. □

LEMAT 5.16.

Jeśli  $|I| = |J|$  i  $A \in \mathbb{M}_{J \times I}(\mathbb{Z})$  jest macierzą rzędu  $|I|$ , to  $|\det A_{J,I}| = 1$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{NWD}(A \cdot y) = \text{NWD}(y)$$

dla każdego wektora  $y \in \mathbb{Z}^I$ .

Dowód.

Założmy najpierw, że macierz  $A$  jest unimodularna i ustalmy wektor  $y \in \mathbb{Z}^I$ . Wtedy oczywiście  $\text{NWD}(y) \mid k$ , gdzie

$$k := \text{NWD}(A \cdot y).$$

Jeśli  $k = 0$ , to  $A \cdot y = 0$ , a więc  $y = 0$  i  $\text{NWD}(y) = 0$ . Jeśli  $k \neq 0$ , to wykorzystując równość  $|\det A| = 1$ , otrzymujemy, że

$$\frac{1}{k} \cdot y = A^{-1} \cdot \left( \frac{1}{k} \cdot A \cdot y \right) \in \mathbb{Z}^I,$$

zatem  $k \mid \text{NWD}(y)$ .

Założmy teraz, że

$$\text{NWD}(A \cdot y) = \text{NWD}(y)$$

dla każdego wektora  $y \in \mathbb{Z}^I$ . Aby pokazać, że macierz  $A$  jest unimodularna, wystarczy pokazać, że

$$A^{-1} \cdot \mathbf{e}_j \in \mathbb{Z}^I$$

dla każdego  $j \in J$ . Ustalmy  $j \in J$ . Istnieje dodatnia liczba całkowita  $k$  taka, że

$$k \cdot A^{-1} \cdot \mathbf{e}_j \in \mathbb{Z}^I.$$

Jeśli  $y := k \cdot A^{-1} \cdot \mathbf{e}_j$ , to

$$A \cdot y = k \cdot \mathbf{e}_j,$$

zatem, wykorzystując założenie, otrzymujemy, że

$$k = \text{NWD}(k \cdot \mathbf{e}_j) = \text{NWD}(k \cdot A^{-1} \cdot \mathbf{e}_j).$$

W szczególności,

$$A^{-1} \cdot \mathbf{e}_j = \frac{1}{k} \cdot (k \cdot A^{-1} \cdot \mathbf{e}_j) \in \mathbb{Z}^I,$$

co kończy dowód. □

STWIERDZENIE 5.17.

Dla macierzy  $A \in \mathbb{M}_{J \times I}(\mathbb{Z})$  następujące warunki są równoważne:

- (1) Macierz  $A$  jest całkowicie unimodularna.
- (2) Jeśli  $I' \subseteq I$ ,  $J' \subseteq J$ ,  $|I'| = |J'|$  i  $|\det A_{J',I'}| \neq 0$ , to

$$\text{NWD}(A_{J',I'} \cdot y) = 1$$

dla każdego wektora  $y \in \{-1, 0, 1\}^{I'}$  takiego, że  $y \neq 0$ .

- (3) Jeśli  $I' \subseteq I$ ,  $J' \subseteq J$ ,  $|I'| = |J'|$  i  $|\det A_{J',I'}| \neq 0$ , to

$$\text{NWD}(A_{J',I'} \cdot \mathbf{e}_{I'}) = 1.$$

Dowód.

(1)  $\implies$  (2): Załóżmy, że macierz  $A$  jest całkowicie unimodularna. Ustalmy podzbiory  $I' \subseteq I$  i  $J' \subseteq J$  takie, że  $|I'| = |J'|$  i  $|\det A_{J',I'}| \neq 0$ . Ponieważ macierz  $A$  jest całkowicie unimodularna, więc  $|\det A_{J',I'}| = 1$ . Korzystając z Lematu 5.16 otrzymujemy warunek (2).

(2)  $\implies$  (3): Oczywiste.

(3)  $\implies$  (1): Zauważmy najpierw, że  $A(j, i) \in \{-1, 0, 1\}$  dla wszystkich  $i \in I$  i  $j \in J$ . Istotnie, jeśli  $i \in I$ ,  $j \in J$  i  $A(j, i) \neq 0$ , to

$$1 = \text{NWD}(A_{\{j\},\{i\}} \cdot \mathbf{e}_i) = \text{NWD}(A(j, i)) = |A(j, i)|.$$

Ustalmy teraz podzbiory  $I' \subseteq I$  i  $J' \subseteq J$  takie, że  $|I'| = |J'|$  i  $|\det A_{J',I'}| \neq 0$ . Ponieważ  $\text{NWD}(A_{J',I'} \cdot \mathbf{e}_{I'}) = 1$ , więc istnieje  $j \in J'$  takie, że

$$2 \nmid A(j) \cdot \mathbf{e}_{I'}.$$

Z dowolności podzbiorów  $I'$  i  $J'$  wynika, że macierz  $A$  spełnia warunek (5) z Twierdzenia 5.13, a więc jest całkowicie unimodularna.  $\square$

PRZYKŁAD.

Jeśli

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

to macierz  $A$  nie jest całkowicie unimodularna, ale  $\det A \neq 0$  i

$$\text{NWD}(A \cdot y) = 1$$

dla każdego wektora  $y \in \{-1, 0, 1\}^4$  takiego, że  $y \neq 0$ .