

Spis treści

1	Podstawowe definicje	4
1.1	Grafy	4
1.2	Przykłady grafów	12
1.2.1	Grafy puste i pełne	12
1.2.2	Grafy dwudzielne	13
1.2.3	Ścieżki i cykle	15
1.2.4	Grafy krawędziowe	18
2	Wielomian charakterystyczny grafu	20
2.1	Podstawowe definicje	20
2.2	Spektra wybranych grafów	25
2.3	Wartości własne macierzy symetrycznych	37
2.4	Interpretacja współczynników wielomianu charakterystycznego	41
2.5	Wielomiany charakterystyczne drzew	47
2.6	Promień spektralny grafu nieskierowanego	49
2.6.1	Przeplatanie	49
2.6.2	Ograniczenia	52
2.6.3	Grafy o promieniu spektralnym nie większym niż 2 . .	57
3	Grafy silnie regularne	64
3.1	Parametry	64
3.2	Wartości własne	68
3.3	Inne własności grafów silnie regularnych	74
3.4	Grafy pochodzące od kwadratów łacińskich	80
3.5	Małe grafy silnie regularne	86
3.6	Lokalne wartości własne	88
3.7	Jedyność małych grafów silnie regularnych	93
3.8	Ograniczenia Kreina	102
3.9	Czworokąty uogólnione	110

Oznaczenia

Jeśli K jest niepustym zbiorem, to elementy przestrzeni $\mathbb{C}^K$ traktujemy jako wektory kolumnowe, tzn. traktujemy je jako $K \times \{*\}$ -macierze, gdzie $*$ jest ustalonym obiektem (w szczególności, skalary utożsamiamy z $\{*\} \times \{*\}$ -macierzami). Ponadto, jeśli K i L są niepustymi podzbiórmi takimi, że $K \subseteq L$, to przestrzeni $\mathbb{C}^K$ utożsamiamy z podzbiorem przestrzeni $\mathbb{C}^L$, gdzie wektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^K$ utożsamiamy z wektorem $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^L$ danym wzorem

$$\mathbf{w}(l) := \begin{cases} \mathbf{v}(l) & \text{jeśli } l \in K, \\ 0 & \text{jeśli } l \notin K, \end{cases} \quad (l \in L).$$

Z drugiej strony, jeśli $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^L$, to definiujemy wektor $\mathbf{v}|_K \in \mathbb{C}^K$ wzorem

$$\mathbf{v}|_K(k) := \mathbf{v}(k) \quad (k \in K)$$

(innymi słowy, wektor $\mathbf{v}|_K$ jest ograniczeniem wektora $\mathbf{v}$ do zbioru K). Jeśli K jest niepustym zbiorem i $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^K$, to definiujemy wektor $\overline{\mathbf{v}} \in \mathbb{C}^K$ wzorem

$$\overline{\mathbf{v}}(k) := \overline{\mathbf{v}(k)} \quad (k \in K).$$

Jeśli K jest niepustym zbiorem skończonym, to:

- przez $\mathbf{0}_K$ oznaczamy wektor w przestrzeni $\mathbb{C}^K$ dany wzorem

$$\mathbf{0}_K(k) := 0 \quad (k \in K);$$

- przez $\mathbf{1}_K$ oznaczamy wektor w przestrzeni $\mathbb{C}^K$ dany wzorem

$$\mathbf{1}_K(k) := 1 \quad (k \in K);$$

w szczególności, jeśli $k \in K$, to $\mathbf{1}_k := \mathbf{1}_{\{k\}}$ oznacza k -ty wektor standardowej bazy przestrzeni $\mathbb{C}^K$;

- przez I_K oznaczamy $K \times K$ -macierz daną wzorem

$$I_K(k, l) := \begin{cases} 1 & \text{jeśli } k = l, \\ 0 & \text{jeśli } k \neq l, \end{cases} \quad (k, l \in K).$$

Jeśli K i L są niepustymi zbiorami skończonymi, to

- przez $\mathbf{0}_{K \times L}$ oznaczamy $K \times L$ -macierz daną wzorem

$$\mathbf{0}_K(k, l) := 0 \quad (k \in K, l \in L);$$

- przez $J_{K \times L}$ oznaczamy $K \times L$ -macierz daną wzorem

$$J_K(k, l) := 1 \quad (k \in K, l \in L).$$

Jeśli A jest $K \times L$ -macierzą, $K' \subseteq K$ i $L' \subseteq L$, to $A|_{K' \times L'}$ jest $K' \times L'$ -macierzą daną wzorem

$$A|_{K' \times L'}(k, l) := A(k, l) \quad (k \in K', l \in L').$$

Jeśli $\phi : K \rightarrow L$ jest funkcją, $K' \subseteq K$, $L' \subseteq L$ i $\phi(K') \subseteq L'$, to definiujemy funkcję $\phi|_{K'}^{L'} : K' \rightarrow L'$ wzorem

$$(\phi|_{K'}^{L'})(k) := \phi(k) \quad (k \in K').$$

Jeśli K jest zbiorem, to przez $\mathfrak{S}_K$ oznaczamy grupę permutacji zbioru K .

Rozdział 1

Podstawowe definicje

1.1 Grafy

Rozpocznijmy od podstawowych definicji dla naszego wykładu.

Grafem skierowanym D nazywamy każdą trójkę $D = (V_D, E_D, p_D)$ taką, że:

- V_D jest skończonym niepustym zbiorem, którego elementy nazywamy *wierzchołkami* grafu D ,
- E_D jest skończonym zbiorem, którego elementy nazywamy *krawędziami* grafu D ,
- $p_D: E_D \rightarrow V_D \times V_D$ jest funkcją, którą nazywamy odwzorowaniem *incydencji*.

Jeśli $\pi_1, \pi_2: V_D \times V_D \rightarrow V_D$ są naturalnymi rzutowaniami (tzn. $\pi_1(u, v) = u$ i $\pi_2(u, v) = v$ dla wszystkich wierzchołków u i v grafu D), to definiujemy funkcje $s_D, t_D: E_D \rightarrow V_D$ wzorami

$$s_D := \pi_1 \circ p_D \quad \text{ i } \quad t_D := \pi_2 \circ p_D.$$

Jeśli e jest krawędzią grafu D i $p_D(e) = (u, v)$, to mówimy, że wierzchołek u jest *początkiem* a wierzchołek v *końcem* krawędzi e . Jeśli $u = v$, to krawędź e nazywamy *pętlą*.

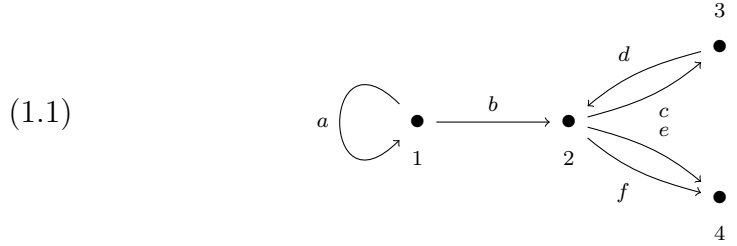
Grafy skierowane przedstawiamy zwykle za pomocą rysunków, w których wierzchołki reprezentowane są przez punkty, zaś krawędzie przez strzałki, których początki i końce pokrywają się z początkami i końcami odpowiednich krawędzi. Na przykład, jeśli

$$V_D := \{1, 2, 3, 4\}, \quad E_D := \{a, b, c, d, e, f\}$$

oraz

$$\begin{aligned} p_D(a) &:= (1, 1), & p_D(b) &:= (1, 2), & p_D(c) &:= (2, 3), \\ p_D(d) &:= (3, 2), & p_D(e) &:= (2, 4), & p_D(f) &:= (2, 4), \end{aligned}$$

to odpowiedni rysunek ma postać



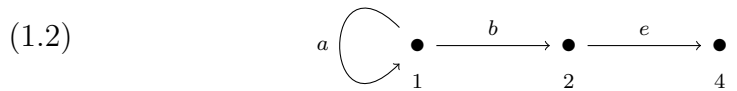
Oczywistym jest, że dany graf można narysować na wiele sposobów. Z drugiej strony, jeśli dla dwóch różnych grafów możemy wykonać identyczne rysunki, to grafy te powinniśmy też traktować jako identyczne. Ten efekt osiągamy poprzez wprowadzenie pojęcia izomorfizmu grafów.

Izomorfizmem grafów skierowanych C i D nazywamy każdą bijekcję $\phi: V_C \rightarrow V_D$ taką, że

$$\#\{e \in E_C : p_C(e) = (u, v)\} = \#\{f \in E_D : p_D(f) = (\phi(u), \phi(v))\}$$

dla wszystkich wierzchołków u i v grafu C . Oczywiście, jeśli ϕ jest izomorfizmem grafów C i D , to ϕ^{-1} jest izomorfizmem grafów D i C . Jeśli istnieje izomorfizm grafów C i D , to grafy C i D nazywamy *izomorficznymi* i piszemy $C \simeq D$. *Automorfizmem* grafu skierowanego D nazywamy każdy izomorfizm grafu D ze sobą. Zbiór automorfizmów grafu D oznaczamy symbolem $\text{Aut}(D)$. Zbiór automorfizmów grafu D tworzy grupę.

Podgrafem grafu skierowanego D nazywamy każdy graf skierowany C taki, że $V_C \subseteq V_D$, $E_C \subseteq E_D$ oraz $p_C = p_X|_{E_C}^{V_C \times V_C}$. Na przykład, następujący graf

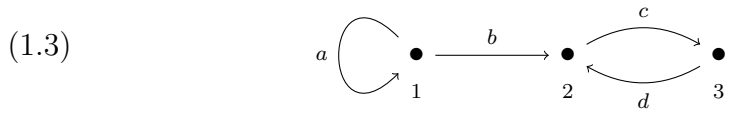


jest podgrafem grafu z rysunku (1.1). Zauważmy, że aby zdefiniować podgraf C grafu D wystarczy zdefiniować zbiory V_C i E_C , które muszą spełniać warunek $p_D(E_C) \subseteq V_C \times V_C$.

Jeśli D jest grafem skierowanym i $U \subseteq V_D$, to przez $\langle U \rangle_D$ oznaczamy podgraf *indukowany* przez zbiór U : jest to podgraf, którego zbiorem wierzchołków jest zbiór U oraz którego krawędziami są wszystkie krawędzie, których początek i koniec znajdują się w zbiorze U . Formalnie,

$$V_{\langle U \rangle_D} := U, \quad E_{\langle U \rangle_D} := p_D^{-1}(U \times U) \quad \text{ i } \quad p_{\langle U \rangle_D} := p_D|_{E_{\langle U \rangle_D}}^{U \times U}.$$

Na przykład, podgraf grafu z rysunku (1.1) indukowany przez wierzchołki 1, 2 i 3 jest postaci



Podgraf, który jest indukowany przez pewny zbiór wierzchołków, nazywamy *silnym podgrafem*.

Jeśli zbiór W jest właściwym podzbiorem zbioru wierzchołków grafu skierowanego D , to definiujemy graf $D \setminus W$ wzorem $D \setminus W := \langle V_D \setminus W \rangle_D$. Innymi słowy, graf $D \setminus W$ powstaje przez usunięcie z grafu D wierzchołków należących do zbioru W oraz wszystkich krawędzi, których końce lub początki należą do zbioru W . W szczególności, jeśli $W = \{v\}$ dla pewnego wierzchołka $v \in V_G$, to piszemy również $D - v$ zamiast $D \setminus \{v\}$. Podobnie, jeśli $e \in E$, to $D - e := (V_D, E_D \setminus \{e\}, p_D|_{E_D \setminus \{e\}})$, a więc graf $D - e$ powstaje z grafu D przez usunięcie krawędzi e .

Aby zdefiniować grafy nieskierowane potrzebujemy dodatkowego oznaczenia. Jeśli X jest zbiorem oraz n jest liczbą naturalną, to przez $\mathcal{P}_n(X)$ oznaczamy rodzinę wszystkich n -elementowych podzbiorów zbioru X .

Grafem nieskierowanym G nazywamy każdą trójkę $G = (V_G, E_G, p_G)$ taką, że:

- V_G jest skończonym niepustym zbiorem, którego elementy nazywamy *wierzchołkami* grafu G ,
- E_G jest skończonym zbiorem, którego elementy nazywamy *krawędziami* grafu G ,
- $p_G: E_G \rightarrow \mathcal{P}_1(V_G) \cup \mathcal{P}_2(V_G)$ jest funkcją, którą nazywamy odwzorowaniem *incydencji*.

Jeśli e jest krawędzią grafu G i $p_G(e) = \{u, v\}$ (jeśli $p_G(e) \in \mathcal{P}_1(V_G)$, to $u = v$), to mówimy, że wierzchołki u i v są *końcami* krawędzi e . Jeśli $u = v$ (tzn. $p_G(e) \in \mathcal{P}_1(V_G)$), to krawędź e nazywamy *pętlą*.

Jeśli będziemy używać słowa graf bez dodatkowego przymiotnika, będzie to oznaczało, że mamy do czynienia z grafem, który może być skierowany lub nieskierowany.

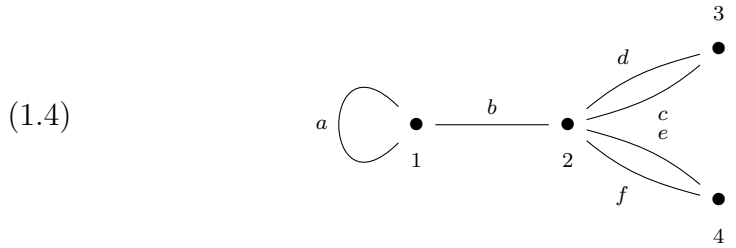
Podobnie jak w przypadku grafów skierowanych, również grafy nieskierowane będziemy przedstawiać za pomocą rysunków. Ponownie wierzchołki reprezentowane są przez punkty, zaś krawędzie przez łuki łączące końce odpowiednich krawędzi. Na przykład, jeśli

$$V_G := \{1, 2, 3, 4\}, \quad E_G := \{a, b, c, d, e, f\}$$

oraz

$$\begin{aligned} p_G(a) &:= \{1\}, & p_G(b) &:= \{1, 2\}, & p_G(c) &:= \{2, 3\}, \\ p_G(d) &:= \{3, 2\}, & p_G(e) &:= \{2, 4\}, & p_G(f) &:= \{2, 4\}, \end{aligned}$$

to odpowiedni rysunek ma postać



Podobnie jak dla grafów skierowanych, także dla grafów nieskierowanych definiujemy pojęcia izomorfizmu i podgrafu (oraz pojęcia pochodne). Sformułowanie stosowanych definicji pozostawiamy Czytelnikowi.

Niech G będzie grafem nieskierowanym. Wierzchołki u i w grafu G nazywamy *sąsiednimi*, jeśli $u \neq w$ oraz istnieje krawędź e grafu G taka, że $p_G(e) = \{u, w\}$. W powyższej sytuacji mówimy również, że wierzchołek w jest *sąsiadem* wierzchołka u w grafie G (i na odwrót). Jeśli v jest wierzchołkiem grafu G , to przez $N_G(v)$ oznaczamy zbiór wierzchołków grafu G sąsiednich z wierzchołkiem v . Jeśli v jest wierzchołkiem grafu G , to krawędź e nazywamy *incydentną* z wierzchołkiem v , jeśli $v \in p_G(e)$. Podobnie, dwie krawędzie e i f nazywamy *incydentnymi*, jeśli $p_G(e) \cap p_G(f) \neq \emptyset$. Liczbę krawędzi incydentnych z wierzchołkiem v nazywamy *stopniem* wierzchołka v i oznaczamy $\deg_G v$. Jeśli $\deg_G v = 0$, to wierzchołek v nazywamy *izolowanym*. Graf G nazywamy *regularnym stopnia k* (w skrócie, *k -regularnym*), $k \in \mathbb{N}$, jeśli $\deg_G v = k$ dla każdego wierzchołka $v \in V_G$.

Mamy następującą prostą obserwację.

Stwierdzenie 1.1.1. *Jeśli G jest grafem nieskierowanym bez pętli, to*

$$\sum_{v \in V_G} \deg_G(v) = 2 \cdot |E_G|. \quad \square$$

Dowód. Policzmy na dwa sposoby liczbę par (e, v) takich, że e jest krawędzią grafu G i $v \in p_G(e)$. Ponieważ graf nie ma pętli, więc liczba takich par jest równa $2 \cdot |E_G|$. Z drugiej strony, dla każdego wierzchołka $v \in V_G$ mamy dokładnie $\deg_G(v)$ krawędzi $e \in E_G$ takich, że $v \in p_G(e)$. $\square$

Graf X nazywamy *prostym*, jeśli funkcja p_X jest różnowartościowa. Innymi słowy, graf skierowany jest prosty jeśli nie istnieją dwie krawędzie o tym samym początku i tym samym końcu. Natomiast graf nieskierowany jest prosty, jeśli w każdym wierzchołku mamy co najwyżej jedną pętlę oraz dla dowolnych wierzchołków istnieje co najwyżej jedna krawędź łącząca te wierzchołki. Zauważmy, że grafy z rysunków (1.1) i (1.4) nie są proste. Przykładu skierowanych grafów prostych dostarczają nam rysunki (1.2) i (1.3). Jeśli graf X jest prosty, to będziemy zwykle utożsamiać zbiór E_X ze zbiorem $p_X(E_X)$ oraz zakładać, że funkcja p_X jest naturalnym włożeniem.

Jeśli G jest prostym grafem nieskierowanym bez pętli, to definiujemy *dopełnienie* $\overline{G}$ grafu G usuwając istniejące krawędzie oraz łącząc krawędziami wierzchołki, które nie były sąsiednie w grafie G . Innymi słowy,

$$V_{\overline{G}} := V_G, \quad E_{\overline{G}} := \mathcal{P}_2(V_G) \setminus E_G$$

i

$$p_{\overline{G}}(e) := e \quad (e \in E_{\overline{G}})$$

(w powyższym wzorach zakładamy, że, zgodnie z wcześniejszą umową, funkcja p_G jest naturalnym włożeniem). Zauważmy, że dopełnienie dopełnienia jest wyjściowym grafem, tzn. $\overline{\overline{G}} = G$. Ponadto, jeśli graf G jest k -regularny, to graf $\overline{G}$ jest $(n - k - 1)$ -regularny, gdzie $n := |V_G|$.

Niech X będzie grafem. Mówimy, że graf X jest *sumą* grafów Y i Z (co zapisujemy, $X = Y \cup Z$), jeśli istnieją podzbiory U i W zbioru V_G takie, że $Y = \langle U \rangle_X$, $Z = \langle W \rangle_X$ i $E_X = E_Y \cup E_Z$ (tzn. każda strzałka łączy dwa wierzchołki należące do zbioru U lub dwa wierzchołki należące do zbioru W). Jeśli dodatkowo $U \cap W = \emptyset$ (a więc również $E_Y \cap E_Z = \emptyset$), to mówimy, że X jest *sumą rozłączną* grafów Y i Z oraz piszemy $X = Y \sqcup Z$. Dla przykładu graf z rysunku 1.4 jest sumą (która nie jest rozłączna) podgrafów generowanych przez zbiory $\{1, 2\}$ i $\{2, 3, 4\}$. Natomiast graf

$$(1.5) \quad \bullet \text{ --- } \bullet \quad \bullet$$

jest sumą rozłączną grafów



Graf nazywamy *spójnym*, jeśli nie może być przedstawiony w postaci sumy rozłącznej dwóch grafów. Oczywiście graf z rysunku (1.5) nie jest spójny. Przykłady grafów spójnych przedstawiają rysunki (1.1) i (1.4). Dla każdego grafu X istnieją jednoznacznie (z dokładnością do kolejności) wyznaczone grafy spójne $Y_1, \dots, Y_m$ takie, że

$$X = Y_1 \sqcup \dots \sqcup Y_m.$$

Grafy $Y_1, \dots, Y_m$ nazywamy *składowymi* grafu X . Liczbę składowych grafu X będziemy oznaczać przez $\kappa(X)$.

W przypadku grafów nieskierowanych spójność grafu można wyrazić również za pomocą istnienia dróg w grafie. *Drogą z wierzchołka u do wierzchołka w (u - w -drogą) w grafie nieskierowanym G nazywamy ciąg $\sigma = (e_1, \dots, e_n)$, $n \in \mathbb{N}_+$, krawędzi grafu G taki, że istnieją wierzchołki $v_1, \dots, v_{n-1}$ takie, że $p_G(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ dla każdego $i \in [1, n]$, gdzie $v_0 := u$ i $v_n := w$. Liczbę n nazywamy *długością* drogi σ (i oznaczamy symbolem $\ell(\sigma)$), zaś ciąg $(v_0, \dots, v_n)$ *śladem* drogi σ . Dla każdego wierzchołka v definiujemy również *drogę trywialną* w wierzchołku v , którą oznaczamy symbolem 1_v . Długość $\ell(1_v)$ drogi 1_v wynosi 0, a jej ślad to ciąg (v) . Drogę dodatniej długości nazywamy *obiegiem*, jeśli jej początek i koniec pokrywają się.*

Jeśli u i w są wierzchołkami grafu nieskierowanego G , to przez $\text{dist}_G(u, w)$ będziemy oznaczać długość najkrótszej drogi z u do w . Jeśli taka droga nie istnieje, to $\text{dist}_G(u, w) := \infty$. Liczbę $\text{dist}_G(u, w)$ nazywamy *odległością* z u do w . *Średnicą* $\text{diam } G$ grafu G nazywamy największą z liczb $\text{dist}_G(u, w)$, gdzie u i w przebiegają wierzchołki grafu G . Mamy następujący związek między średnicą a spójnością grafu G .

Stwierdzenie 1.1.2. *Graf nieskierowany G jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{diam } G < \infty$, tzn. dla dowolnych wierzchołków u i w w grafu G istnieje droga z u do w .*

Dowód. Załóżmy najpierw, że graf G nie jest spójny. Wtedy istnieją niepuste podzbiory U i W zbioru wierzchołków takie, że $G = \langle U \rangle_G \sqcup \langle W \rangle_G$. Wybierzmy wierzchołek $u \in U$. Przez indukcję na $\text{dist}_G(u, v)$ pokażemy, że jeśli $v \in V_G$ i $\text{dist}_G(u, v) < \infty$, to $v \in U$. W szczególności, jeśli wybierzemy wierzchołek $w \in W$, to otrzymamy $\text{dist}_G(u, w) = \infty$.

Jeśli $\text{dist}_G(u, v) = 0$, to $v = u$, więc teza jest oczywista. Jeśli $\text{dist}_G(u, v) > 0$, to istnieje wierzchołek $w \in V_G$ taki, że $\text{dist}_G(u, w) = \text{dist}_G(u, v) - 1$. W

szczegółności, istnieje krawędź $e \in E_G$ taka, że $p_G(e) = \{u, w\}$. Z założenia indukcyjnego, $w \in U$. Ponieważ $p_G(e) \subseteq U$ lub $p_G(e) \subseteq W$, więc otrzymujemy stąd, że $u \in U$.

Założmy teraz, że $\text{diam } G = \infty$. Wybierzmy wierzchołek $v \in V_G$. Niech

$$U := \{u \in V_G : \text{dist}_G(v, u) < \infty\}$$

i

$$W := \{w \in V_G : \text{dist}_G(v, w) = \infty\}.$$

Wtedy $U \neq \emptyset$ (ponieważ $u \in U$), $W \neq \emptyset$ (ponieważ $\text{diam } G = \infty$) oraz $U \cap W = \emptyset$ i $U \cup W = V_G$ (oczywiste). Aby pokazać, że $G = \langle U \rangle_G \sqcup \langle W \rangle_G$ (co zakończy dowód), wystarczy pokazać, że nie istnieje krawędź $e \in E_G$ taka, że $p_G(e) \not\subseteq U$ i $p_G(e) \not\subseteq W$. Przypuśćmy, że jest przeciwnie, tzn. istnieje krawędź $e \in E_G$ taka, że $p_G(e) = \{u, w\}$, gdzie $u \in U$ i $w \in W$. Wtedy z nierówności trójkąta otrzymujemy, że

$$\text{dist}_G(v, w) \leq \text{dist}_G(v, u) + 1 < \infty,$$

sprzeczność. □

Spójność grafu narzuca ograniczenia na liczbę wierzchołków. Mamy następujący fakt.

Stwierdzenie 1.1.3. *Jeśli G jest grafem spójnym, to istnieje podzbiór $E' \subseteq E_G$ taki, że $|E'| = |V_G| - 1$ oraz graf $(V_G, E', p_G|_{E'})$ jest spójny. W szczególności, $|E_G| \geq |V_G| - 1$.*

Dowód. Tezę udowodnimy przez indukcję na $|V_G| + |E_G|$. Jeśli $|V_G| + |E_G| = 1$, to $|V_G| = 1$ i $|E_G| = 0$, więc teza jest oczywista.

Założmy teraz, że $|V_G| + |E_G| > 1$. Ze spójności grafu G wynika, że $E_G \neq \emptyset$. Wybierzmy krawędź $e \in E_G$ i niech $G' := G - e$. Jeśli graf G' jest spójny, to tezę otrzymujemy przez indukcję. Założmy zatem, że graf G' nie jest spójny. Wtedy $p_G(e) = \{u, w\}$ dla różnych wierzchołków u i w grafu G . Niech

$$U := \{v \in V_G : \text{istnieje droga z } u \text{ do } v\}$$

i

$$W := \{v \in V_G : \text{istnieje droga z } w \text{ do } v\}.$$

Ze spójności grafu G wynika, że $V_G = U \cup W$. Ponadto grafy $\langle U \rangle_G$ i $\langle W \rangle_G$ są spójne. Z założenia indukcyjnego istnieją podzbiory $E_1 \subseteq E_{\langle U \rangle_G}$ i $E_2 \subseteq E_{\langle W \rangle_G}$ takie, że $|E_1| = |U| - 1$, $|E_2| = |W| - 1$ oraz grafy $(U, E_1, p_{\langle U \rangle_G}|_{E_1})$ i $(W, E_2, p_{\langle W \rangle_G}|_{E_2})$ są spójne. Wtedy teza zachodzi dla zbioru $E' := E_1 \cup E_2 \cup \{e\}$. $\square$

Minimalne grafy spójne nazywamy drzewami, tzn. graf nieskierowany G nazywamy *drzewem*, jeśli jest spójny i $|E_G| = |V_G| - 1$. W Stwierdzeniu 1.2.2 podamy inną charakterystykę drzew.

Dla grafu skierowanego D *stowarzyszony graf nieskierowany* $\bar{D}$ otrzymywany jest przez „zapomnienie” orientacji strzałek. Formalnie

$$\bar{D} := (V_D, E_D, \pi \circ p_D),$$

gdzie $\pi : V_D \times V_D \rightarrow \mathcal{P}_1(V_D) \cup \mathcal{P}_2(V_D)$ jest funkcją zdefiniowaną wzorem

$$\pi(u, v) := \{u, v\} \quad (u, v \in V_D).$$

Na przykład graf przedstawiony na rysunku (1.4) jest grafem nieskierowanym stowarzyszonym z grafem z rysunku (1.1). Jeśli graf nieskierowany G jest stowarzyszony z grafem skierowanym D , to mówimy również, że graf D jest *ukierunkowaniem* grafu G .

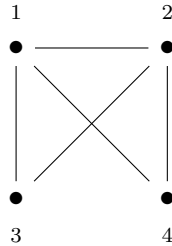
Operacja sumy (rozłącznej) łączy grafy bez dodawania nowych krawędzi. Opiszemy operację, w którym łączymy sumowane grafy dodatkowymi krawędziami. Niech G i H będą dwoma grafami nieskierowanymi takimi, że $V_G \cap V_H = \emptyset = E_G \cap E_H$. *Złączeniem* $G + H$ grafów G i H nazywamy graf otrzymany z sumy rozłącznej $G \sqcup H$ grafów G i H przez dodanie krawędzi łączących każdy wierzchołek grafu G z każdym wierzchołkiem grafu H . Formalnie,

$$V_{G+H} := V_G \cup V_H, \quad E_{G+H} := E_G \cup E_H \cup \{\{u, w\} : u \in V_G \text{ i } w \in V_H\}$$

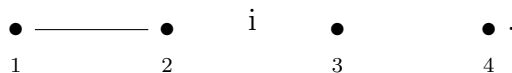
i

$$p_{G+H}(e) := \begin{cases} p_G(e) & \text{jeśli } e \in E_G, \\ p_H(e) & \text{jeśli } e \in E_H, \\ e & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases} \quad (e \in E_{G+H}).$$

Dla przykładu, graf



jest złączeniem grafów



Podzbiór U zbioru wierzchołków grafu nieskierowanego G nazywamy *niezależnym*, jeśli żadne dwa wierzchołki ze zbioru U nie są sąsiednie. Przez $\alpha(G)$ oznaczamy największą liczbę elementów niezależnego zbioru wierzchołków w grafie G . Z drugiej strony, przez $\chi(G)$ oznaczamy minimalną liczbę $k \in \mathbb{N}_+$ taką, że istnieją zbiory niezależne $U_1, \dots, U_k$ takie, że $V_G = U_1 \cup \dots \cup U_k$. Liczbę $\chi(G)$ nazywamy *liczbą chromatyczną grafu G* , gdyż jest to minimalna liczba kolorów, która jest potrzebna do pokolorowania wierzchołków grafu G w taki sposób, że żadne dwa wierzchołki pokolorowane tym samym kolorem nie są sąsiednie.

1.2 Przykłady grafów

W tym podrozdziale przedstawimy kilka podstawowych klas grafów, które będą się pojawiać w naszej pracy.

1.2.1 Grafy puste i pełne

Niech V będzie niepustym zbiorem skończonym. Przez N_V będziemy oznaczać graf nieskierowany o zbiorze wierzchołków V i bez krawędzi, który będziemy nazywać *grafem pustym*. Innymi słowy,

$$V_{N_V} := V \quad \text{oraz} \quad E_{N_V} := \emptyset.$$

Z drugiej strony, przez K_V będziemy oznaczać graf nieskierowany o zbiorze wierzchołków V , w którym każde dwa wierzchołki połączone są krawędzią. Formalnie,

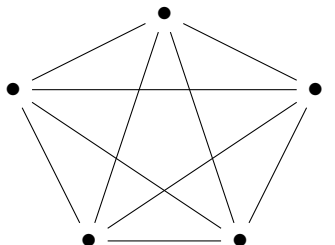
$$V_{K_V} := V, \quad E_{K_V} := \mathcal{P}_2(V)$$

i

$$p_{K_V}(e) := e \quad (e \in E_{K_V}).$$

Graf K_V nazywamy *grafem pełnym*. Oczywiście, jeśli zbiory U i W są dwoma zbiorami skończonymi, to $N_U \simeq N_W$ wtedy i tylko wtedy, gdy $K_U \simeq K_W$, co ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $|U| = |W|$. Zauważmy, że $\overline{K_V} = N_V$ i, w konsekwencji, $\overline{N_V} = K_V$. Ponadto, gdy zbiory U i W są rozłączne, to

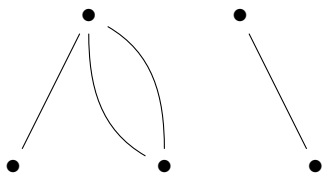
$K_{U \cup W} = K_U + K_W$. Jeśli n jest dodatnią liczbą całkowitą, to definiujemy $N_n := N_{[1,n]}$ i $K_n := K_{[1,n]}$. Poniższy rysunek przedstawia graf pełny o 5 wierzchołkach.



Zauważmy, że jeśli U jest podzbiorem zbioru wierzchołków grafu nieskierowanego G , to zbiór U jest niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle U \rangle_G = N_U$.

1.2.2 Grafy dwudzielne

Ważną klasą grafów, które pojawiają się między innymi przy badaniu skojarzeń (np. w kontekście twierdzenia Halla o małżeństwach) są grafy dwudzielne. Graf nieskierowany G nazywamy *dwudzielnym*, jeśli istnieją podzbiory U i W zbioru wierzchołków takie, że $V_G = U \cup W$, $U \cap W = \emptyset$ oraz każda krawędź łączy wierzchołek należący do zbioru U z wierzchołkiem należącym do zbioru W . Przykład grafu dwudzielnego przedstawia następujący rysunek:



Będziemy potrzebować następującej charakteryzacji grafów dwudzielnych. ■

Stwierdzenie 1.2.1. *Graf nieskierowany G jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera obiegów nieparzystej długości.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że graf G jest dwudzielny. Wybierzmy podzbiory U i W zbioru V_G takie, że $V_G = U \cup W$, $U \cap W = \emptyset$ oraz każda krawędź łączy wierzchołek należący do zbioru U z wierzchołkiem należącym do zbioru W . Ustalmy również wierzchołek v grafu G oraz obieg σ w grafie G o początku i końcu w wierzchołku v . Bez straty ogólności możemy założyć, że $v \in U$. Jeśli $(v_0, v_1, \dots, v_m)$ jest śladem drogi σ , to przez indukcję pokazujemy, że jeśli $i \in [0, m]$, to $v_i \in U$ wtedy i tylko wtedy, gdy i jest liczbą parzystą. W szczególności, m jest liczbą parzystą, gdyż $v_m = v \in U$.

Założmy teraz, że graf G nie zawiera obiegów nieparzystej długości. Ponieważ wystarczy pokazać, że każda składowa grafu G jest grafem dwudzielnym,

więc bez straty ogólności możemy założyć, że graf G jest spójny. Wybierzmy wierzchołek v grafu V i zdefiniujmy zbiory U i W wzorami:

$$U := \{u \in V : \text{dist}_G(v, u) \text{ jest liczbą parzystą}\},$$

i

$$W := \{w \in V : \text{dist}_G(v, w) \text{ jest liczbą nieparzystą}\}.$$

Oczywiście $U \cap W = \emptyset$. Ponieważ graf G jest spójny, więc $U \cup W = V_G$ (korzystamy tutaj ze Stwierdzenia 1.1.2). Dla zakończenia dowodu wystarczy zatem pokazać, że każda krawędź w grafie G łączy wierzchołek ze zbioru U z wierzchołkiem ze zbioru W . Przypuśćmy, że istnieje krawędź e w grafie G taka, że $p_G(e) \subseteq U$. Jeśli $p_G(e) = \{u', u''\}$, to istnieją drogi $(e'_1, \dots, e'_m)$ i $(e''_1, \dots, e''_n)$ o z v do u' i u'' , odpowiednio, takie, że m i n są liczbami parzystymi. Wtedy droga

$$(e'_1, \dots, e'_m, e, e''_n, \dots, e''_1)$$

jest obiegiem nieparzystej długości w grafie G , co prowadzi do sprzeczności. Podobnie dochodzimy do sprzeczności, gdy istnieje krawędź e w grafie G łącząca dwa wierzchołki ze zbioru W , co kończy dowód. $\square$

Niech U i W będą niepustymi rozłącznymi zbiorami skończonymi. Przez $K_{U,W}$ oznaczamy graf nieskierowany o zbiorze wierzchołków $U \cup W$, w którym dla dowolnych wierzchołków $u \in U$ i $w \in W$ istnieje dokładnie jedna krawędź łącząca te wierzchołki oraz nie ma innych krawędzi. Formalnie,

$$V_{K_{U,W}} := U \cup W, \quad E_{K_{U,W}} := U \times W,$$

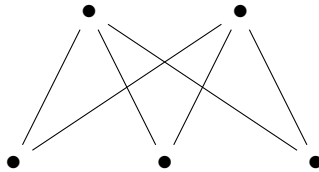
i

$$p_{K_V}(u, w) := \{u, w\} \quad (u \in U, w \in W).$$

Zauważmy, że $K_{U,W} = N_U + N_W$. Graf $K_{U,W}$ jest grafem dwudzielnym, który nazywamy *pełnym grafem dwudzielnym*. Jeśli U', W', U'' i W'' są niepustymi zbiorami skończonymi, to $K_{U',W'} \simeq K_{U'',W''}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{|U'|, |W'|\} = \{|U''|, |W''|\}$ (tzn. $|U'| = |U''|$ i $|W'| = |W''|$ lub $|U'| = |W''|$ i $|W'| = |U''|$). Jeśli p i q są dodatnimi liczbami całkowitymi, to

$$K_{p,q} := K_{[1,p],[p+1,p+q]}.$$

Poniższy rysunek przedstawia graf $K_{2,3}$.



1.2.3 Ścieżki i cykle

Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Przez P_{n-1} oznaczać będziemy *ścieżkę długości $n - 1$* , tzn. graf zdefiniowany wzorami

$$V_{P_{n-1}} := [1, n], \quad E_{P_{n-1}} := \{\{p, p+1\} : p \in [1, n-1]\},$$

i

$$p_{P_{n-1}}(e) := e \quad (e \in E_{P_{n-1}}).$$

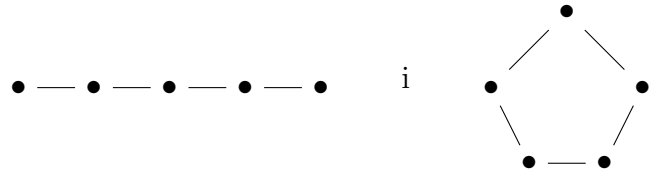
Podobnie definiujemy *cykl C_n długości n* wzorami

$$V_{C_n} := [1, n], \quad E_{C_n} := \{\{p, p+1\} : i \in [1, n-1]\} \cup \{e_0\},$$

i

$$p_{C_n}(e) := \begin{cases} e & \text{jeśli } e \neq e_0, \\ \{n, 1\} & \text{jeśli } e = e_0, \end{cases} \quad (e \in E_{C_n}).$$

Oznaczenie ostatniej krawędzi przez e_0 zamiast $\{n, 1\}$ jest konieczne, aby odróżnić krawędzie $\{1, 2\}$ i $\{2, 1\}$ w przypadku $n = 2$. Zauważmy, że $P_0 = N_1$, $P_1 = K_2$ i $C_3 = K_3$. Ścieżkę i cykl długości 5 przedstawiają następujące rysunki:



odpowiednio. Ogólnie, graf nieskierowany G będziemy nazywać *ścieżką* (*cyklem nieskierowanym*), jeśli jest izomorficzny z grafem P_{n-1} (C_n , odpowiednio), dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n .

Stwierdzenie 1.2.2. *Graf spójny G jest drzewem wtedy i tylko wtedy, gdy graf G nie zawiera podgrafu, który jest cyklem nieskierowanym.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że graf G zawiera cykl nieskierowany H . Wybierzmy $e \in V_H$. Korzystając ze Stwierdzenia 1.1.2, pokazujemy, że wtedy graf $G - e$ jest spójny. Stąd otrzymujemy, na mocy Stwierdzenia 1.1.3, że

$$|E_G| > |E_{G-e}| \geq |V_G| - 1,$$

a więc graf G nie jest drzewem.

Założmy teraz, że graf G nie jest drzewem, a więc $|E_G| > |V_G| - 1$. Ze Stwierdzenia 1.1.3 wynika, że istnieje krawędź e grafu G taka, że graf $G - e$ jest spójny. Niech $p_G(e) = \{u, w\}$ dla $u, w \in V_G$. Niech $\sigma = (e_1, \dots, e_m)$ będzie najkrótszą u - w -drogą w grafie $G - e$ oraz niech ciąg $(u = v_0, v_1, \dots, v_m = w)$ będzie śladem drogi σ . Wtedy $v_i \neq v_j$ jeśli $i, j \in [0, m]$ i $i \neq j$. Stąd wynika, że podgraf H taki, że

$$V_H := \{v_0, \dots, v_m\} \quad \text{i} \quad E_H := \{e, e_1, \dots, e_m\}$$

jest cyklem nieskierowanym. $\square$

Wykorzystując Stwierdzenie 1.2.2, możemy udowodnić następującą prostą obserwację.

Stwierdzenie 1.2.3. *Jeśli graf G jest drzewem takim, że $|V_G| > 1$, to istnieje wierzchołek $v \in V_G$ taki, że $\deg_G(v) = 1$.*

Dowód. Stwierdzenie 1.2.2 implikuje w szczególności, że w grafie G nie ma pętli. Ze Stwierdzenia 1.1.1 wiemy wtedy, że

$$\sum_{v \in V_G} \deg_G(v) = 2 \cdot |V_G| - 2,$$

zatem istnieje wierzchołek $v \in V_G$ taki, że $\deg_G(v) < 2$. Ponieważ graf G jest spójny i $|V_G| > 1$, więc $\deg_G(v) > 0$, co kończy dowód. $\square$

Omówimy teraz związek pomiędzy cyklami i obiegami, który wykorzystamy do zmodyfikowania charakteryzacji grafów dwudzielnych przedstawionej w Stwierdzeniu 1.2.1.

Stwierdzenie 1.2.4. *Graf nieskierowany G zawiera podgraf, który jest cyklem nieskierowanym nieparzystej długości, wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera obieg nieparzystej długości.*

Dowód. Założmy najpierw, że graf nieskierowany G zawiera podgraf H , który jest cyklem nieskierowanym. Z definicji cyklu nieskierowanego wynika, że istnieją parami różne wierzchołki $v_1, \dots, v_m$ oraz parami różne krawędzie $e_1, \dots, e_m$ grafu G takie, że

$$V_G = \{v_1, \dots, v_m\}, \quad E_G = \{e_1, \dots, e_m\}$$

oraz $p_G(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ dla każdego $i \in [1, m]$, gdzie $v_0 := v_m$. Wtedy droga $\sigma := (e_1, \dots, e_m)$ jest obiegiem w grafie H . Zauważmy również, że m jest wspólną długością cyklu H oraz obiegu σ . W szczególności, jeśli długość cyklu H jest nieparzysta, to długość obiegu σ też jest nieparzysta.

Założmy teraz, że w grafie G istnieje obieg $\sigma = (e_1, \dots, e_m)$ nieparzystej długości. Przez indukcję ze względu na m pokażemy, że w grafie G istnieje podgraf H , który jest cyklem nieparzystej długości. Niech $(v_0, v_1, \dots, v_m)$ będzie śladem drogi σ . Ponieważ σ jest obiegiem, więc $v_0 = v_m$.

Jeśli wierzchołki $v_1, \dots, v_m$ oraz krawędzie $e_1, \dots, e_m$ są parami różne, to definiujemy podgraf H wzorami

$$V_H := \{v_1, \dots, v_m\} \quad \text{i} \quad E_H := \{e_1, \dots, e_m\}.$$

Wtedy H jest cyklem długości m , co kończy dowód w tym przypadku.

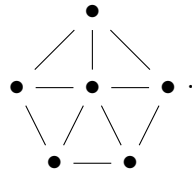
Założmy teraz, że istnieją indeksy $i, j \in [1, m]$ takie, że $i < j$ oraz $v_i = v_j$. Niech $\sigma' := (e_1, \dots, e_i, e_{j+1}, \dots, e_m)$ i $\sigma'' := (e_{i+1}, \dots, e_j)$. Wtedy σ' i σ'' są obiegami w grafie G długości mniejszej niż m . Ponadto, długość jednego z obiegów σ' i σ'' jest nieparzysta. Zatem tezę twierdzenia otrzymujemy przez indukcję.

Założmy na zakończenie, że wierzchołki $v_1, \dots, v_m$ są parami różne, ale istnieją indeksy $i, j \in [1, m]$ takie, że $i < j$ oraz $e_i = e_j$. Wtedy $\{v_{i-1}, v_i\} = \{v_{j-1}, v_j\}$. Ponieważ wierzchołki $v_1, \dots, v_m$ są parami różne oraz $v_0 = v_m$, oznacza to, że $i = j - 1$, $i - 1 = 0$ i $j = m$, skąd wynika, że $m = 2$, co jest niemożliwe, gdyż m jest liczbą nieparzystą. $\square$

Wykorzystując Stwierdzenie 1.2.1, otrzymujemy natychmiast następujący wniosek.

Wniosek 1.2.5. *Graf nieskierowany G jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafu, który jest izomorficzny z cyklem nieparzystej długości.* $\square$

Graf $N_{\{0\}} + C_n$ nazywamy *kołem z n szprychami* i oznaczamy W_n . Poniższy rysunek przedstawia koło z 5 szprychami.



Ponownie, niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Przez Q_n będziemy oznaczać *n -wymiarowy sześcián*, tzn.

$$V_{Q_n} := \{0, 1\}^{[1, n]}, \quad E_{Q_n} := \{\{\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{1}_i\} : \mathbf{v} \in V_{Q_n}, i \in [1, n], \mathbf{v}(i) = 0\},$$

i

$$p_{Q_n}(e) := e \quad (e \in E_{Q_n}).$$

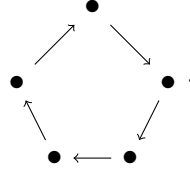
W naszych rozważaniach będziemy również potrzebować cykli skierowanych. Permutację zbioru V nazywamy *cykliczną*, jeśli jej rząd (jako elementu grupy symetrycznej) jest równy $|V|$ (dopuszczamy tutaj możliwość, że $|V| = 1$ i $\sigma = \text{Id}_V$). Niech A będzie $V \times V$. Typowym przykładem permutacji cyklicznej jest permutacja $(1, 2, \dots, n)$ zbioru $[1, n]$. Niech σ będzie permutacją cykliczną niepustego zbioru skończonego V . Definiujemy graf $\vec{C}_\sigma$, który nazywamy *cyklem skierowanym stowarzyszonym z permutacją σ* , wzorami:

$$V_{\vec{C}_\sigma} := V, \quad E_{\vec{C}_\sigma} := \{(v, \sigma(v)) : v \in V\}$$

i

$$p_{\vec{C}_\sigma}(e) := e \quad (e \in E_{\vec{C}_\sigma}).$$

W szczególności, jeśli n jest dodatnią liczbą całkowitą, to definiujemy $\vec{C}_n := \vec{C}_{(1,2,\dots,n)}$, gdzie $(1, 2, \dots, n)$ jest „standardową” permutacją cykliczną zbioru $[1, n]$. Graf $\vec{C}_n$ nazywamy również *skierowanym grafem cyklicznym długości n* . Oczywiście cykl C_n jest (izomorficzny z) grafem nieskierowanym stowarzyszonym z grafem $\vec{C}_n$. Poniższy rysunek przedstawia graf $\vec{C}_n$.



1.2.4 Grafy krawędziowe

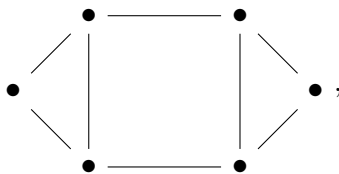
Ogólną metodę konstrukcji grafów z danego grafu dostarczają nam grafy krawędziowe. Niech G będzie prostym grafem nieskierowanym bez pętli. Przez $L(G)$ oznaczamy prosty graf nieskierowany bez pętli, którego wierzchołkami są krawędzie grafu G oraz dwie krawędzie grafu G są sąsiednie w grafie $L(G)$ wtedy i tylko wtedy, gdy są incydentne w grafie G . Innymi słowy, graf $L(G)$ dany jest wzorami

$$V_{L(G)} := E_G, \quad E_{L(G)} := \{(e, f) : e, f \in E_G, e \neq f \text{ i } p_G(e) \cap p_G(f) \neq \emptyset\}$$

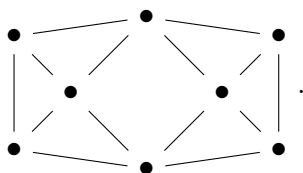
i

$$p_{L(G)}(\alpha) := \alpha \quad (\alpha \in E_{L(G)}).$$

Graf $L(G)$ nazywamy *grafem krawędziowym* grafu G . Dla przykładu, jeśli graf G jest postaci



to graf $L(G)$ jest postaci



W przyszłości przydatna będzie następująca obserwacja.

Stwierdzenie 1.2.6. *Jeśli G jest prostym grafem nieskierowanym bez pętli, który jest k -regularny, to graf $L(G)$ jest $(2 \cdot k - 2)$ -regularny.*

Dowód. Ustalmy krawędź e grafu G . Wtedy $p_G(e) = \{u, w\}$ dla pewnych wierzchołków u i w grafu G takich, że $u \neq w$ (gdyż graf G nie ma pętli). Ponieważ graf G jest prosty i k -regularny, więc istnieje $k - 1$ krawędzi f grafu G takich, że $f \neq e$ i $p_G(f) \cap p_G(e) = \{u\}$. Podobnie, istnieje $k - 1$ krawędzi f grafu G takich, że $f \neq e$ i $p_G(f) \cap p_G(e) = \{w\}$. Oczywiście powyższe zbiory krawędzi są rozłączne oraz każdą krawędź incydentną z krawędzią e jest jednej z powyższych postaci. $\square$

Rozdział 2

Wielomian charakterystyczny grafu

Celem tego rozdziału będzie przedstawienie podstawowych informacji na temat wielomianów charakterystycznych grafów.

2.1 Podstawowe definicje

Następujące definicje będą odgrywały kluczową rolę w naszym wykładzie.

Niech D będzie grafem skierowanym. *Macierzą sąsiedztwa* grafu D nazywamy $V_D \times V_D$ -macierz A_D zdefiniowaną wzorem:

$$A_D(u, v) := \#\{e \in E_D : p_D(e) = (u, v)\} \quad (u, v \in V_D).$$

Wielomian charakterystyczny macierzy A_D nazywamy *wielomianem charakterystycznym* grafu D i oznaczamy P_D .

Jeśli D jest grafem z rysunku (1.1), to

$$A_D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(oczywiście numeracja wierszy i kolumn jest identyczna z numeracją wierzchołków) i

$$P_D = t^4 - t^3 - t^2 + t.$$

Mamy następujące oczywiste własności wielomianu charakterystycznego.

Stwierdzenie 2.1.1. *Jeśli D jest grafem skierowanym, to P_D jest wielomianem unormowanym stopnia $|V_D|$. Jeśli λ jest pierwiastkiem wymiernym, to $\lambda \in \mathbb{Z}$.*

Dowód. Pierwsza część wynika natychmiast z własności wielomianów charakterystycznych macierzy. Druga część wynika z własności wielomianów o współczynnikach całkowitych (dowód zostawiamy jako proste ćwiczenie). $\square$

Mamy analogiczne definicje dla grafów nieskierowanych.

Niech G będzie grafem nieskierowanym. *Macierzą sąsiedztwa* grafu G nazywamy $V_G \times V_G$ -macierz A_G zdefiniowaną wzorem:

$$A_G(u, v) := \#\{e \in E_D : p_D(e) = \{u, v\}\} \quad (u, v \in V_D).$$

Wielomian charakterystyczny macierzy A_G nazywamy *wielomianem charakterystycznym* grafu G i oznaczamy P_G .

Zauważmy, że macierz sąsiedztwa grafu nieskierowanego jest symetryczna. Jeśli G jest grafem z rysunku (1.4), to

$$A_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i

$$P_G = t^4 - t^3 - 9t^2 + 8t.$$

Ponadto, jeśli V jest niepustym zbiorem skończonym, to

$$A_{N_V} = \mathbf{0}_{V \times V} \quad \text{oraz} \quad A_{K_V} = J_{V \times V} - I_V.$$

Wreszcie, jeśli U i W są niepustymi zbiorami skończonymi, to w postaci blokowej mamy

$$A_{K_{U,W}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{U \times U} & J_{U \times W} \\ J_{W \times U} & \mathbf{0}_{W \times W} \end{bmatrix}.$$

Ogólniej, jeśli G i H są grafami nieskierowanymi takimi, że $V_G \cap V_H = \emptyset = E_G \cap E_H$, to

$$A_{G+H} = \begin{bmatrix} A_G & J_{V_G \times V_H} \\ J_{V_H \times V_G} & A_H \end{bmatrix}.$$

Z drugiej strony,

$$A_{G \sqcup H} = \begin{bmatrix} A_G & \mathbf{0}_{V_G \times V_H} \\ \mathbf{0}_{V_H \times V_G} & A_H \end{bmatrix}.$$

Odpowiednik Stwierdzenia 2.1.1 dla grafów nieskierowanych ma następującą postać.

Stwierdzenie 2.1.2. *Jeśli G jest grafem nieskierowanym, to P_G jest wielomianem unormowanym stopnia $|V_G|$. Jeśli λ jest pierwiastkiem wymiernym, to $\lambda \in \mathbb{Z}$. Ponadto wszystkie pierwiastki wielomianu P_G są rzeczywiste oraz istnieje baza ortonormalna przestrzeni $\mathbb{R}^{V_G}$ złożona z wektorów własnych macierzy A_G .*

Dowód. Dowód pierwszej części jest identyczny jak dowód Stwierdzenia 2.1.1. Druga część jest konsekwencją faktu, że macierz A_G jest symetryczna. $\square$

Podamy teraz interpretację współczynników potęg macierzy symetrycznych.

Stwierdzenie 2.1.3. *Jeśli X jest grafem, $u, w \in V_X$ i $k \in \mathbb{N}$, to $A_X^k(u, w)$ jest liczbą u - w -dróg długości k w grafie X .*

Dowód. Jeśli $k = 0$ i $k = 1$, to teza jest oczywista. Gdy $k > 1$, to mamy następujący indukcyjny wzór

$$a_k(u, w) = \sum_{v \in V_G} a_{k-1}(u, v) \cdot a_1(v, w),$$

gdzie dla $l \in \mathbb{N}$ i $x, y \in V_X$ $a_l(x, y)$ oznacza liczbę x - y -dróg długości l w grafie X . Z drugiej strony,

$$A_X^k(u, w) = \sum_{v \in V_G} A_X^{k-1}(u, v) \cdot A_X(v, w),$$

więc teza wynika przez prostą indukcję. $\square$

Macierz sąsiedztwa grafu możemy wykorzystać do badania, czy dwa grafy są izomorficzne. Mamy bowiem następującą obserwację (przypomnijmy, że *macierz permutacji* nazywamy macierz, która ma w każdym wierszu i w każdej kolumnie dokładnie jedną jedynkę, a wszystkie pozostałe jej współczynniki są równe 0).

Stwierdzenie 2.1.4. *Niech X i Y będą grafami (tego samego typu, tzn. oba grafy są skierowane lub oba grafy są nieskierowane). Wtedy grafy X i Y są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $V_Y \times V_X$ -macierz permutacji B taka, że*

$$A_Y \cdot B = B \cdot A_X.$$

Dowód. Zauważmy, że $V_Y \times V_X$ -macierze permutacji odpowiadają bijekcjom pomiędzy V_X a V_Y : istotnie, jeśli B jest $V_Y \times V_X$ -macierzą permutacji, to

stosowna bijekcja $\phi : V_X \rightarrow V_Y$ dana jest poprzez warunek: jeśli $x \in V_X$ i $y \in V_Y$, to

$$\phi(x) = y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } B(y, x) = 1.$$

Funkcja odwrotną ϕ^{-1} do funkcji ϕ jest funkcja wyznaczona przez macierz B^{-1} .

Dla ustalenia uwagi załóżmy teraz, że grafy X i Y są skierowane. Niech B i ϕ będą odpowiadającymi sobie macierzą permutacji i bijekcją. Wtedy warunek

$$A_Y \cdot B = B \cdot A_X$$

jest równoważny warunkowi: dla dowolnych wierzchołków u i v grafu X

$$\#\{e \in E_G : p_X(e) = (u, v)\} = \#\{f \in E_G : p_Y(f) = (\phi(u), \phi(v))\}.$$

Istotnie,

$$\#\{e \in E_G : p_X(e) = (u, v)\} = A_X(u, v)$$

oraz

$$\begin{aligned} \#\{f \in E_G : p_Y(f) = (\phi(u), \phi(v))\} \\ = A_Y(\phi(u), \phi(v)) = (B^{-1} \cdot A_Y \cdot B)(u, v). \end{aligned}$$

To kończy dowód. □

Zauważmy, że wielomian unormowany jest wyznaczony jednoznacznie przez swoje pierwiastki i ich krotności. Powyższa obserwacja motywuje następujące definicje.

Niech X będzie grafem (skierowanym lub nie). Wartości i wektory własne macierzy A_X nazywamy *wartościami i wektorami własnymi* grafu X , odpowiednio. Przez *spektrum* $\text{Spec } X$ grafu X rozumiemy zbiór jego wartości własnych wraz z informacją o ich krotności. Spektrum grafu X zapisujemy w postaci macierzy, której pierwszy wiersz zawiera pierwiastki wielomianu P_X a drugi ich krotności, odpowiednio.

Jeśli D jest grafem z rysunku (1.1), to

$$\text{Spec } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy, że jeśli graf G jest nieskierowany, to ze Stwierdzenia 2.1.2 wynika, że wszystkie wartości własne grafu G są rzeczywiste.

Odnajmy teraz kilka prostych własności spektrum grafów.

Stwierdzenie 2.1.5. *Jeśli graf X jest sumą rozłączną grafów Y i Z , to*

$$P_X = P_Y \cdot P_Z,$$

równoważnie

$$\text{Spec } X = \text{Spec } Y \cup \text{Spec } Z.$$

Dowód. Teza wynika natychmiast z równości:

$$A_X = \begin{bmatrix} A_Y & \mathbf{0}_{V_Y \times V_Z} \\ \mathbf{0}_{V_Z \times V_Y} & A_Z \end{bmatrix}. \quad \square$$

Stwierdzenie 2.1.6. *Niech $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ będą wszystkimi wartościami własnymi grafu X (liczonymi wraz z krotnościami, a więc w szczególności $n = |V_X|$). Wtedy*

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \#\{e \in E_X : e \text{ jest pętlą}\}.$$

Dowód. Mamy, że

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \text{tr } A_X,$$

skąd natychmiast wynika teza. $\square$

Przy dodatkowych założeniach mamy podobny wynik dla sumy kwadratów wartości własnych.

Stwierdzenie 2.1.7. *Niech G będzie prostym grafem nieskierowanym bez pętli. Jeśli $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ są wszystkimi wartościami własnymi grafu G (liczonymi wraz z krotnościami, a więc w szczególności $n = |V_G|$), to*

$$\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 = 2 \cdot |E_G|.$$

Dowód. Wiadomo, że

$$\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 = \text{tr}(A_G^2).$$

Wykorzystując Stwierdzenia 2.1.3 i nasze założenia, łatwo można zauważyć, że $A_G^2(v, v) = \deg_G v$ dla każdego wierzchołka $v \in V_G$, zatem teza wynika ze Stwierdzenia 1.1.1. $\square$

Na zakończenie tego podrozdziału przedstawimy związek między liczbą wartości własnych grafu G i jego średnicą.

Stwierdzenie 2.1.8. *Jeśli G jest nieskierowanym grafem spójnym i $d := \text{diam } G$, to graf G ma co najmniej $d + 1$ różnych wartości własnych.*

Dowód. Niech $\mathcal{V}$ będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni $V_G \times V_G$ -macierzy o współczynnikach rzeczywistych generowaną przez potęgi macierzy A_G . Wtedy $\dim \mathcal{V} = k$, gdzie k jest liczbą wartości własnych. Z drugiej strony, macierze $I_{V_G}, A_G, \dots, A_G^d$ są liniowo niezależne. Istotnie, dla każdego $p \in [0, d]$ istnieją wierzchołki $u, v \in V_G$ takie, że najkrótsza u - v -droga ma długość p . Stwierdzenia 2.1.3 implikuje, że wtedy $A_G^p(u, v) \neq 0$, ale $A_G^q(u, v) = 0$ dla każdego $q \in [0, p - 1]$. To kończy dowód. $\square$

2.2 Spektra wybranych grafów

Opiszemy teraz spektrum dla niektórych klas grafów opisanych w podrozdziale 1.2. Rozpocznijmy od grafów pustych.

Stwierdzenie 2.2.1. (1) *Jeśli n jest dodatnią liczbą całkowitą, to*

$$\text{Spec } N_n = \binom{0}{n}.$$

(2) *Jeśli G jest grafem nieskierowanym takim, że*

$$\text{Spec } G = \binom{0}{n}$$

dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n , to $G \simeq N_n$.

Dowód. (1) Teza wynika natychmiast z tego, że $A_{N_n} = \mathbf{0}_{V_{N_n}, V_{N_n}}$.

(2) Załóżmy, że

$$\text{Spec } G = \binom{0}{n}$$

dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n . Oczywiście $n = |V_G|$. Ponadto $\text{rk } A_G = 0$, więc

$$A_G = \mathbf{0}_{V \times V} = A_{N_{V_G}}.$$

Stąd natychmiast wynika, że

$$G \simeq N_{V_G} \simeq N_n,$$

gdzie dla dowodu pierwszego izomorfizmu można skorzystać ze Stwierdzenia 2.1.4. □

Kolejnym naszym celem będzie opis spektrum grafu pełnego.

Stwierdzenie 2.2.2. (1) *Jeśli n jest dodatnią liczbą całkowitą, to*

$$\text{Spec } K_n = \begin{pmatrix} -1 & n-1 \\ n-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) *Jeśli G jest nieskierowanym grafem takim, że*

$$\text{Spec } G = \begin{pmatrix} -1 & n-1 \\ n-1 & 1 \end{pmatrix}$$

dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n , to $G \simeq K_n$.

Dowód. (1) Definiujemy macierz B wzorem

$$B := A_{K_n} + I_{V_{K_n}}.$$

Wtedy $B = J_{V_{K_n}, V_{K_n}}$, zatem

$$\text{Spec } B = \begin{pmatrix} 0 & n \\ n-1 & 1 \end{pmatrix},$$

gdyż $\text{rk } B = 1$ oraz $B \cdot \mathbf{1}_{V_{K_n}} = n \cdot \mathbf{1}_{V_{K_n}}$. Powyższy wzór natychmiast implikuje tezę.

(2) Załóżmy, że

$$\text{Spec } G = \begin{pmatrix} -1 & n-1 \\ n-1 & 1 \end{pmatrix}$$

dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n . Oczywiście $n = |V_G|$. Korzystając ze Stwierdzenia 2.1.6, wiemy, że w grafie G nie ma pętli. Zdefiniujmy macierz B wzorem

$$B := A_G + I_{V_G}.$$

Wtedy B jest macierzą symetryczną rzędu 1 taką, że $B(u, u) = 1$ dla każdego wierzchołka u grafu G . W szczególności, jeśli u i v są dwoma różnymi wierzchołkami grafu G , to

$$0 = \det B|_{\{u,v\} \times \{u,v\}} = B(u, u) \cdot B(v, v) - B(u, v) \cdot B(v, u) = 1 - (B(u, v))^2.$$

Ponieważ $B(u, v) \geq 0$, więc $B(u, v) = 1$. Ostatecznie $B = J_{V_G, V_G}$, więc $A_G = A_{K_{V_G}}$, skąd

$$G \simeq K_{V_G} \simeq K_n. \quad \square$$

Naszym kolejnym celem będzie opisanie spektrum pełnych grafów dwudzielnych. W tym celu sformułujemy ogólne własności, które będą przydatne także przy badaniu innych klas grafów.

Twierdzenie 2.2.3. *Niech G będzie grafem k -regularnym, $k \in \mathbb{N}$.*

- (1) *Wektor $\mathbf{1}_{V_G}$ jest wektorem własnym grafu G odpowiadającym wartości własnej k .*
- (2) *Krotność liczby k jako wartości własnej grafu G jest równa liczbie składowych grafu G .*
- (3) *Jeśli λ jest wartością własną grafu G , to $|\lambda| \leq k$.*

Dowód. (1) Łatwo sprawdzić, że

$$A_G \cdot \mathbf{1}_{V_G} = k \cdot \mathbf{1}_{V_G}.$$

(2) Korzystając ze Stwierdzenia 2.1.5, wystarczy pokazać, że jeśli graf G jest spójny, to k jest jednokrotną wartością własną grafu G . Jeśli dodatkowo $k = 0$, to G jest grafem pustym i teza wynika ze Stwierdzenia 2.2.1. Załóżmy zatem, że graf G jest spójny i $k > 0$. Ustalmy wektor własny $\mathbf{v}$ odpowiadający wartości własnej k i wybierzmy wierzchołek v taki, że

$$\mathbf{v}(v) = \max\{\mathbf{v}(u) : u \in V_G\}.$$

Przez indukcję ze względu na $\text{dist}_G(v, u)$ pokażemy, że $\mathbf{v}(u) = \mathbf{v}(v)$ dla każdego wierzchołka u grafu G . W konsekwencji, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(v) \cdot \mathbf{1}_{V_G}$, co zakończy dowód.

Ustalmy zatem wierzchołek u grafu G . Jeśli $\text{dist}_G(v, u) = 0$, to $u = v$, więc oczywiście $\mathbf{v}(u) = \mathbf{v}(v)$. Załóżmy zatem, że $\text{dist}_G(v, u) > 0$. Z założenia indukcyjnego istnieje wierzchołek w grafu G sąsiadujący z wierzchołkiem u taki, że $\mathbf{v}(w) = \mathbf{v}(v)$. Wtedy

$$\begin{aligned} k \cdot \mathbf{v}(v) &= k \cdot \mathbf{v}(w) = (k \cdot \mathbf{v})(w) = (A_G \cdot \mathbf{v})(w) \\ &= \sum_{\substack{e \in E_G \\ p_G(e) = \{x, w\}}} \mathbf{v}(x) \leq \mathbf{v}(u) + (k - 1)\mathbf{v}(v), \end{aligned}$$

co kończy dowód.

(3) Wybierzmy wektor własny $\mathbf{v}$ grafu G odpowiadający wartości własnej λ oraz wierzchołek v grafu G taki, że

$$|\mathbf{v}(v)| = \max\{|\mathbf{v}(u)| : u \in V_G\}.$$

Wtedy $|\mathbf{v}(v)| > 0$. Ponadto,

$$\begin{aligned} |\lambda| \cdot |\mathbf{v}(v)| &= |(\lambda \cdot \mathbf{v})(v)| = |(A_G \cdot \mathbf{v})(v)| = \left| \sum_{\substack{e \in E_G \\ p_G(e) = \{v, u\}}} \mathbf{v}(u) \right| \\ &\leq \sum_{\substack{e \in E_G \\ p_G(e) = \{v, u\}}} |\mathbf{v}(u)| \leq k \cdot |\mathbf{v}(v)|, \end{aligned}$$

skąd wynika teza. □

Jako pierwszy wniosek opiszemy związek pomiędzy spektrum grafu regularnego i jego dopełnienia.

Wniosek 2.2.4. *Jeśli G jest grafem k -regularnym takim, że*

$$P_G = (t - k) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (t - \lambda_i),$$

to

$$P_{\overline{G}} = (t - (n - k - 1)) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (t - (-\lambda_i - 1)).$$

Dowód. Zauważmy, że n jest liczbą wierzchołków grafu G . Wiemy, że istnieją liniowo niezależne wektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ takie, że

$$A_G \cdot \mathbf{v}_i = \lambda_i \cdot \mathbf{v}_i \quad \text{ i } \quad \mathbf{v}_i^{\text{tr}} \cdot \mathbf{1}_{V_G} = 0$$

dla każdego $i \in [1, n-1]$. Wiemy też, że graf $\overline{G}$ jest $(n - k - 1)$ -regularny, zatem na mocy Twierdzenia 2.2.3 liczba $n - k - 1$ jest wartością własną grafu $\overline{G}$, której odpowiada wektor $\mathbf{1}_{V_G}$. Ponadto $A_{\overline{G}} = J_{V_G \times V_G} - A_G - I_{V_G \times V_G}$, więc

$$A_{\overline{G}} \cdot \mathbf{v}_i = (-\lambda_i - 1) \cdot \mathbf{v}_i$$

dla każdego $i \in [1, n-1]$, co kończy dowód. $\square$

Wykorzystując Twierdzenie 2.2.3, możemy sformułować ogólną regułę, pozwalającą wyznaczyć spektrum złączenia dwóch grafów regularnych.

Twierdzenie 2.2.5. *Jeśli G i H są grafami k - i l -regularnymi, odpowiednio, to*

$$P_{G+H} = (t - \lambda_-) \cdot (t - \lambda_+) \cdot \frac{P_G}{t - k} \cdot \frac{P_H}{t - l},$$

gdzie

$$\lambda_{\pm} := \frac{(k + l) \pm \sqrt{(k - l)^2 + 4 \cdot m \cdot n}}{2},$$

$n := |V_G|$ i $m := |V_H|$.

Dowód. Zauważmy, że

$$A_{G+H} = \begin{bmatrix} A_G & J_{V_G \times V_H} \\ J_{V_H \times V_G} & A_H \end{bmatrix}$$

Z Twierdzenia 2.2.3 wiemy, że wektory $\mathbf{1}_{V_G}$ i $\mathbf{1}_{V_H}$ są wektorami własnymi grafów G i H , odpowiednio, których wartości własne są równe k i l , odpowiednio. Zatem istnieją wektory własne $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}$ oraz $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{m-1}$ grafów G i H , odpowiednio, takie, że wektory $\mathbf{1}_{V_G}$, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}$ oraz $\mathbf{1}_{V_H}$, $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{m-1}$ tworzą bazy przestrzeni $\mathbb{R}^{V_G}$ i $\mathbb{R}^{V_H}$, odpowiednio, oraz $\mathbf{1}_{V_G}^T \cdot \mathbf{u}_p = 0$ i

$\mathbf{1}_{V_H}^T \cdot \mathbf{w}_q = 0$ dla wszystkich $p \in [1, n-1]$ i $q \in [1, m-1]$. Wtedy wektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{m-1}$ (traktowane jako elementy przestrzeni $\mathbb{R}^{V_G \cup V_H}$) są wektorami własnymi grafu $G + H$ (z tymi samymi wartościami własnymi). Pozostałych dwóch wartości własnych grafu $G + H$ możemy szukać wśród wektorów postaci $\mathbf{v}_{\lambda, \mu} := \lambda \cdot \mathbf{1}_{V_G} + \mu \cdot \mathbf{1}_{V_H}$, gdzie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Zauważmy, że

$$A_{G+H} \cdot \mathbf{v}_{\lambda, \mu} = (k \cdot \lambda + m \cdot \mu) \cdot \mathbf{1}_{V_G} + (n \cdot \lambda + l \cdot \mu) \cdot \mathbf{1}_{V_H},$$

zatem wektor $\mathbf{v}_{\lambda, \mu}$ jest wektorem własnym grafu G wtedy i tylko wtedy, gdy wektor $[\lambda, \mu]^T$ jest wektorem własnym macierzy

$$B := \begin{bmatrix} k & m \\ n & l \end{bmatrix}$$

(o tej samej wartości własnej). Wyliczając wartości własne macierzy B , dostajemy tezę. $\square$

Stwierdzenie 2.2.6. (1) *Jeśli p i q są dodatnimi liczbami całkowitymi, to*

$$\text{Spec } K_{p,q} = \begin{pmatrix} -\sqrt{p \cdot q} & 0 & \sqrt{p \cdot q} \\ 1 & p+q-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) *Jeśli G nieskierowanym spójnym grafem prostym takim, że*

$$\text{Spec } G = \begin{pmatrix} -\sqrt{p \cdot q} & 0 & \sqrt{p \cdot q} \\ 1 & p+q-2 & 1 \end{pmatrix}$$

dla pewnych dodatnich liczb całkowitych p i q , to $G \simeq K_{p,q}$.

Dowód. (1) Zauważmy, że $K_{p,q} = N_{[1,p]} + N_{[p+1,p+q]}$, więc teza wynika natychmiast z Twierdzenia 2.2.5 i Swierdzenia 2.2.1 (zauważmy, że graf pusty jest 0-regularny).

(2) Załóżmy, że G jest nieskierowanym spójnym grafem prostym takim, że

$$\text{Spec } G = \begin{pmatrix} -\sqrt{p \cdot q} & 0 & \sqrt{p \cdot q} \\ 1 & p+q-2 & 1 \end{pmatrix}$$

dla pewnych dodatnich liczb całkowitych p i q . Korzystając ze Stwierdzenia 2.1.6, wiemy, że w grafie G nie ma pętli, a więc $A_G(v, v) = 0$ dla każdego wierzchołka v grafu G . Ponadto, $\text{rk } A_G = 2$, więc istnieją wierzchołki u i w takie, że wiersze u -ty i w -ty stanowią bazę przestrzeni generowanej przez wiersze macierzy A_G . Innymi słowy, dla każdego wierzchołka v istnieją (jednoznacznie wyznaczone) skalary λ_v i μ_v takie, że

$$A_G(v, x) = \lambda_v \cdot A_G(u, x) + \mu_v \cdot A_G(w, x)$$

dla każdego wierzchołka x grafu G . Z symetryczności macierzy A_G wynika, że wtedy również

$$A_G(x, v) = \lambda_v \cdot A_G(x, u) + \mu_v \cdot A_G(x, w)$$

dla dowolnych wierzchołków v i x grafu G .

Zauważmy najpierw, że $A_G(u, w) \neq 0$. Istotnie, w przeciwnym przypadku

$$A_G(v, w) = \lambda_v \cdot A_G(u, w) + \mu_v \cdot A_G(w, w) = 0$$

dla każdego wierzchołka v grafu G , więc

$$G = \langle \{w\} \rangle_G \sqcup (G - w),$$

co przeczy spójności grafu G .

Ustalmy teraz wierzchołek v grafu G . Wtedy

$$\begin{aligned} 0 &= A_G(v, v) = \lambda_v \cdot A_G(u, v) + \mu_v \cdot A_G(w, v) = \\ &= \lambda_v \cdot (\lambda_v \cdot A_G(u, u) + \mu_v \cdot A_G(u, w)) + \mu_v \cdot (\lambda_v \cdot A_G(w, u) + \mu_v \cdot A_G(w, w)) \\ &= 2 \cdot \lambda_v \cdot \mu_v \cdot A_G(u, w), \end{aligned}$$

zatem $\lambda_v = 0$ lub $\mu_v = 0$.

Niech

$$U := \{v \in V_G : \lambda_v = 0\} \quad \text{ i } \quad W := \{v \in V_G : \mu_v = 0\}.$$

Z powyższej obserwacji wiemy, że $V_G = U \cup W$. Z drugiej strony, $U \cap W = \emptyset$. Istotnie, jeśli $v \in U \cap W$, to $A_G(v, x) = 0$ dla każdego wierzchołka x , więc

$$G = \langle \{v\} \rangle_G \sqcup (G - v),$$

co przeczy spójności grafu G .

Pokażemy teraz, że $A_G(x, y) = 0$, jeśli $x, y \in U$ lub $x, y \in W$, oraz $A_G(x, y) \neq 0$, jeśli $x \in U$ i $y \in W$ (lub $x \in W$ i $y \in U$). Dla dowodu pierwszej równości założymy, że $x, y \in U$. Wtedy

$$A(x, y) = \mu_x \cdot A(w, y) = \mu_x \cdot \mu_y \cdot A(w, w) = 0.$$

Podobnie, gdy $x \in U$ i $y \in W$, to

$$A(x, y) = \mu_x \cdot A(w, y) = \mu_x \cdot \lambda_y \cdot A(w, u) \neq 0.$$

Korzystając z tego, że graf G jest prosty, otrzymujemy ostatecznie, że $G \simeq K_{m,n}$, gdzie $m := |U|$ i $n := |W|$. Zatem z części pierwszej mamy, że

$$\text{Spec } G = \begin{pmatrix} -\sqrt{m \cdot n} & 0 & \sqrt{m \cdot n} \\ 1 & m+n-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

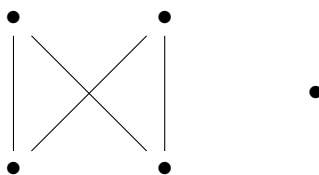
Korzystając dodatkowo z założenia na temat $\text{Spec } G$, mamy

$$p \cdot q = m \cdot n \quad \text{i} \quad p + q = m + n,$$

a więc $\{m, n\} = \{p, q\}$, co kończy dowód. $\square$

Przedstawimy teraz przykłady wskazujące, że teza punktu (2) powyższego twierdzenia nie zachodzi, jeśli nie założymy, że graf jest spójny i prosty.

Niech G będzie następującym grafem:

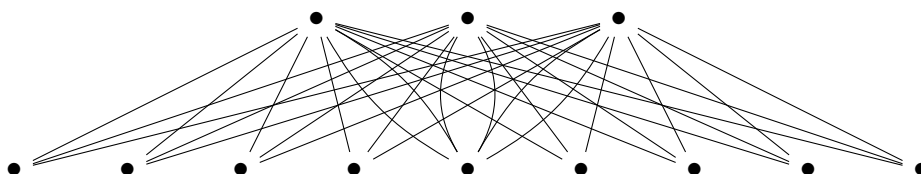


(tzn. $G = K_{2,2} \sqcup N_1$). Wtedy

$$\text{Spec } G = \text{Spec } K_{2,2} \cup \text{Spec } N_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \text{Spec } K_{1,4},$$

ale $G \not\simeq K_{1,4}$. Zauważmy, że graf G jest prosty, ale nie jest spójny.

Niech G będzie następującym grafem:



(każdy dolny wierzchołek, z wyjątkiem centralnego, jest połączony dokładnie jedną krawędzią z każdym wierzchołkiem górnym; wierzchołek centralny jest połączony z każdym wierzchołkiem górnym dokładnie dwiema krawędziami).

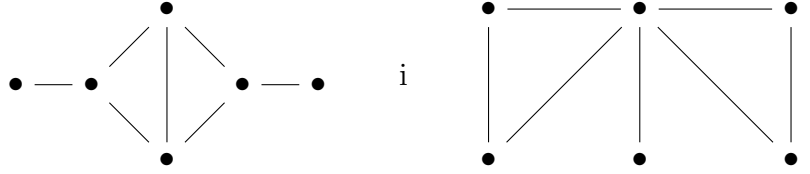
Wtedy graf G jest spójny, ale nie jest prosty. Ponadto

$$\text{Spec } G = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix} = \text{Spec } K_{6,6},$$

ale $G \not\simeq K_{6,6}$.

Stwierdzenia 2.2.1 i 2.2.2 mogłyby sugerować, że jeśli $\text{Spec } G = \text{Spec } H$ dla grafów nieskierowanych G i H , to $G \simeq H$. Powyższe przykłady pokazują, że ta implikacja nie jest w ogólności prawdziwa, jeśli nie założymy, że grafy G i H są proste i spójne. Poniższy przykład pokazuje, że nawet jeśli grafy G są spójne i proste, to z równości $\text{Spec } G = \text{Spec } H$ nie musi wynikać, że $G \simeq H$.

Niech G i H będą grafami



odpowiednio. Wtedy

$$P_G = t^6 - 7 \cdot t^4 - 4 \cdot t^3 + 7 \cdot t^2 + 4 \cdot t - 1 = P_H,$$

ale grafy G i H nie są izomorficzne.

Kolejnymi grafami, dla których opiszemy spektrum, są cykle i ścieżki.

Aby opisać spektrum cyklu, opiszemy teraz ogólną metodę opisu spektrum specjalnej klasy macierzy.

Niech V będzie niepustym zbiorem skończonym. Macierz A nazywamy *cykliczną*, jeśli istnieje permutacja cykliczna σ zbioru V taka, że

$$A(\sigma(u), \sigma(w)) = A(u, w)$$

dla dowolnych elementów u i w zbioru V . Bardziej obrazowo, macierz A jest cykliczna, jeśli elementy zbioru V można uporządkować w taki sposób, że kolejne wiersze macierzy A są kolejnymi cyklicznymi przesunięciami pierwszego wiersza. Przykładami macierzy cyklicznych są macierze sąsiedztwa grafów K_n i C_n , gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą.

Opiszemy teraz metodę znajdowania spektrum macierzy cyklicznej.

Stwierdzenie 2.2.7. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą, V zbiorem n elementowym, A $V \times V$ -macierz taką, że istnieje σ permutacja cykliczna zbioru V taka, że

$$A(\sigma(u), \sigma(w)) = A(u, w)$$

dla dowolnych elementów u i w zbioru V . Wybierzmy element v zbioru V i zdefiniujemy wektory $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{n-1} \in \mathbb{C}^V$ oraz liczby $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ wzorami:

$$\mathbf{v}_m(\sigma^p(v)) := \omega^{m \cdot p} \quad (m, p \in [0, n-1]),$$

oraz

$$\lambda_m := \sum_{p=0}^{n-1} A(v, \sigma^p(v)) \cdot \omega^{p \cdot m}, \quad m \in [0, n-1],$$

gdzie $\omega := \cos(\frac{2\pi}{n}) + \iota \cdot \sin(\frac{2\pi}{n})$ jest pierwotnym pierwiastkiem n -tego stopnia z jedynki. Wtedy wektory $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ są wektorami własnymi macierzy A tworzącymi bazę przestrzeni $\mathbb{C}^V$, przy czym

$$A \cdot \mathbf{v}_m = \lambda_m \cdot \mathbf{v}_m$$

dla każdego $m \in [0, n-1]$.

Dowód. Niech B będzie macierzą permutacji σ^{-1} , tzn.

$$B(u, w) := \begin{cases} 1 & \text{jeśli } w = \sigma(u), \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases} \quad (u, w \in V).$$

Zauważmy, że

$$B^p \cdot \mathbf{v}_m = \omega^{p \cdot m} \cdot \mathbf{v}_m$$

dla wszystkich $m, p \in [0, n-1]$. Ponadto

$$A = \sum_{p=0}^{n-1} A(v, \sigma^p(v)) \cdot B^p.$$

W konsekwencji

$$A \cdot \mathbf{v}_m = \lambda_m \cdot \mathbf{v}_m$$

dla każdego $m \in [0, n-1]$. Ponieważ $\bar{\mathbf{v}}_p^T \cdot \mathbf{v}_q = 0$ dla wszystkich $p, q \in [0, n-1]$ takich, że $p \neq q$, to kończy dowód. $\square$

Zgodnie z zapowiedzią zastosujemy teraz powyższą metodę, aby wyznaczyć spektrum cyklu.

Stwierdzenie 2.2.8. Niech $n \geq 2$ będzie liczbą całkowitą. Zdefiniujmy wektory $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{n-1} \in \mathbb{C}^n$ wzorem:

$$\mathbf{v}_m(p) := \omega^{m \cdot (p-1)} \quad (m \in [0, n-1], p \in [1, n]).$$

Wtedy wektory $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ są wektorami własnymi grafu C_n tworzącymi bazę przestrzeni $\mathbb{C}^n$, przy czym

$$(2.1) \quad A_{C_n} \cdot \mathbf{v}_m = 2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot m}{n} \cdot \pi\right) \cdot \mathbf{v}_m$$

dla każdego $m \in [0, n-1]$. W szczególności,

$$P_{C_n} = \prod_{m=0}^{n-1} \left(t - 2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot m}{n} \cdot \pi\right) \right),$$

a więc

$$\text{Spec } C_n = \begin{cases} \begin{pmatrix} -2 & 2 \cdot \cos\left(\frac{n-2}{n} \cdot \pi\right) & \cdots & 2 \cdot \cos\left(\frac{2}{n} \cdot \pi\right) & 2 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{jeśli } n \text{ jest liczbą parzystą,} \\ \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos\left(\frac{n-1}{n} \cdot \pi\right) & \cdots & 2 \cdot \cos\left(\frac{2}{n} \cdot \pi\right) & 2 \\ 2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{jeśli } n \text{ jest liczbą nieparzystą.} \end{cases}$$

Dowód. Zauważmy, że A_G jest macierzą cykliczną – stosowana permutacja σ jest równa $(1, 2, \dots, n)$. Mamy

$$A(1, p) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } p = 2, n, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Zauważmy, że $2 = \sigma(1)$ i $n = \sigma^{-1}(1)$. Zatem, korzystając ze Stwierdzenia 2.2.7, wiemy, że wektory $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ są wektorami własnymi macierzy A_{C_n} tworzącymi bazę przestrzeni $\mathbb{C}^n$. Ponadto, jeśli $m \in [0, n-1]$ i $A \cdot \mathbf{v}_m = \lambda \cdot \mathbf{v}_m$, to

$$\begin{aligned} \lambda &= \left(\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{n}\right) \right)^m + \left(\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{n}\right) \right)^{-m} \\ &= 2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot m \cdot \pi}{n}\right), \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Stwierdzenie 2.2.8 można by udowodnić, sprawdzając bezpośrednim rachunkiem równość (2.1). Zaprezentowany powyżej dowód pokazuje, jako można znaleźć wartości i wektory własne cyklu nie znając wcześniej odpowiedzi.

Stwierdzenie 2.2.8 możemy wykorzystać, aby policzyć spektrum koła.

Stwierdzenie 2.2.9. *Jeśli $n \geq 2$ jest liczbą całkowitą, to*

$$P_{W_n} = (t - 1 - \sqrt{n+1}) \cdot (t - 1 + \sqrt{n+1}) \cdot \prod_{p=1}^{n-1} \left(t - 2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot p}{n} \cdot \pi\right) \right).$$

Dowód. Przypomnijmy, że $V_{W_n} = N_{\{0\}} + V_{C_n}$. Graf $N_{\{0\}}$ jest 0-regularny, podczas gdy graf V_{C_n} jest 2-regularny, zatem teza wynika z Twierdzenia 2.2.5 oraz Stwierżeń 2.2.1 i 2.2.8. □

Wykorzystamy teraz Stwierdzenie 2.2.8, aby opisać spektrum ścieżki.

Stwierdzenie 2.2.10. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Zdefiniujemy wektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{C}^n$ wzorem:

$$\mathbf{v}_m(p) := \sin\left(\frac{m \cdot p}{n+1} \cdot \pi\right) \quad (m, p \in [1, n]).$$

Wtedy wektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ są wektorami własnymi grafu P_{n-1} tworzącymi bazę przestrzeni $\mathbb{C}^n$, przy czym

$$A_{P_n} \cdot \mathbf{v}_m = 2 \cdot \cos\left(\frac{m}{n+1} \cdot \pi\right) \cdot \mathbf{v}_m$$

dla każdego $m \in [1, n]$. W szczególności,

$$(2.2) \quad \text{Spec } P_{n-1} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos\left(\frac{n}{n+1} \cdot \pi\right) & 2 \cdot \cos\left(\frac{n-1}{n+1} \cdot \pi\right) & \cdots & 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{n+1} \cdot \pi\right) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Dowód. Dla każdego wektora $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ definiujemy wektor $\hat{\mathbf{v}} \in \mathbb{C}^{2 \cdot n+2}$ wzorem:

$$\hat{\mathbf{v}}(p) := \begin{cases} \mathbf{v}(p) & \text{jeśli } p \in [1, n], \\ -\mathbf{v}(2 \cdot n + 2 - p) & \text{jeśli } p \in [n+2, 2 \cdot n+1], \\ 0 & \text{jeśli } p = n+1, 2 \cdot n+2, \end{cases}$$

(tzn.

$$\hat{\mathbf{v}} = [\mathbf{v}(1) \ \dots \ \mathbf{v}(n) \ 0 \ -\mathbf{v}(n) \ \dots \ -\mathbf{v}(1) \ 0].$$

Bezpośrednim rachunkiem można sprawdzić, że jeśli $A_{P_{n-1}} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$ dla pewnych $\lambda \in \mathbb{C}$ i $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, to $A_{C_{2 \cdot n+2}} \cdot \hat{\mathbf{v}} = \lambda \cdot \hat{\mathbf{v}}$. Ze Stwierdzenia 2.2.8 wynika zatem, że jeśli λ jest wartością własną grafu P_{n-1} , to $\lambda = 2 \cdot \cos\left(\frac{m}{n+1} \cdot \pi\right)$ dla pewnego $m \in [0, n+1]$. Wiemy jednak również, że $\mathbf{w}(2 \cdot n+2) \neq 0$ dla każdego wektora własnego $\mathbf{w}$ grafu $C_{2 \cdot n+2}$ odpowiadającego wartościom własnym 2 i -2 , zatem liczby 2 i -2 nie mogą wartościami własnymi grafu P_{n-1} . Z drugiej strony, jeśli $m \in [1, n]$, to liczba $2 \cdot \cos\left(\frac{m}{n+1} \cdot \pi\right)$ jest dwukrotną wartością własną $C_{2 \cdot n+2}$ oraz istnieje wektor własny grafu $C_{2 \cdot n+2}$ odpowiadający wartości własnej $2 \cdot \cos\left(\frac{m}{n+1} \cdot \pi\right)$ taki, że $\mathbf{w}(2 \cdot n+2) \neq 0$. W szczególności, liczba $2 \cdot \cos\left(\frac{m}{n+1} \cdot \pi\right)$ jest co najwyżej jednokrotną wartością własną grafu P_{n-1} . Z drugiej jednak strony, graf P_{n-1} musi mieć n wartości własnych, skąd wynika opis spektrum grafu P_n .

Ustalmy teraz $m \in [1, n]$. Ze Stwierdzenia 2.2.8 wiemy, że przestrzeń wektorów własnych grafu $C_{2 \cdot n+2}$ odpowiadających wartości własnej $2 \cdot \cos\left(\frac{m}{n+1} \cdot \pi\right)$ jest generowana przez wektory $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$, gdzie

$$\mathbf{u}_1(p) := \omega^{m \cdot (p-1)} \quad (p \in [1, 2 \cdot n+2])$$

i

$$\mathbf{u}_2(p) := \omega^{-m \cdot (p-1)} \quad (p \in [1, 2 \cdot n + 2]).$$

Zauważmy, że

$$\omega^m \cdot \mathbf{u}_1(p) - \omega^{-m} \cdot \mathbf{u}_2(p) = 2 \cdot \iota \cdot \hat{\mathbf{v}}_m,$$

co kończy dowód. $\square$

Podobnie jak Stwierdzenie 2.2.8, również Stwierdzenie 2.2.10 można by udowodnić, sprawdzając bezpośrednim rachunkiem równość (2.2). Jednakże również w tym przypadku zaprezentowany dowód pokazuje metodę znalezienia wartości i wektorów własnych ścieżki.

Kolejną rodziną grafów, dla których opiszemy spektrum, są sześciiany.

Stwierdzenie 2.2.11. *Jeśli n jest dodatnią liczbą całkowitą, to*

$$P_{Q_n} = \prod_{i=0}^n (t - n + 2 \cdot i)^{\binom{n}{i}}.$$

Dowód. Tezę stwierdzenia udowodnimy przez indukcję ze względu na n . Zauważmy, że $Q_1 \simeq K_2$, więc w tym przypadku teza wynika ze Stwierdzenia 2.2.2.

Założmy zatem, że $n > 1$. Mamy

$$A_{Q_n} = \begin{bmatrix} A_{Q_{n-1}} & I_{\{0,1\}^{n-1}} \\ I_{\{0,1\}^{n-1}} & A_{Q_{n-1}} \end{bmatrix}$$

W konsekwencji, jeśli $\mathbf{v}$ jest wektorem własnym grafu Q_{n-1} odpowiadającym wartości własnej λ , to wektory $[\mathbf{v}, \pm \mathbf{v}]^T$ są wektorami własnymi grafu Q_n odpowiadającymi wartościom własnym $\lambda \pm 1$, odpowiednio. Z założenia indukcyjnego wartościami własnymi macierzy Q_{n-1} są $n-1, n-3, \dots, -(n-1)$, więc wartościami własnymi grafu Q_n są $n, n-2, \dots, -n$. Krotność liczby $\pm n$ jako wartości własnej macierzy Q_n jest równa krotności liczby $\pm(n-1)$ jako wartości własnej grafu Q_{n-1} , czyli $1 = \binom{n}{0} = \binom{n}{n}$. Ponadto, jeśli $i \in [1, n-1]$, to krotność liczby $n-2 \cdot i$ jako wartości własnej grafu Q_n jest równa sumie krotności liczb $n-2 \cdot i \pm 1$ jako wartości własnych grafu Q_{n-1} , a więc

$$\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} = \binom{n}{i},$$

co kończy dowód. $\square$

2.3 Wartości własne macierzy symetrycznych

Głównym obiektem naszych zainteresowań są spektra grafów nieskierowanych. Macierze sąsiedztwa grafów nieskierowanych są symetryczne. W związku z tym przyjrzymy się teraz dokładniej wartościom własnym macierzy symetrycznych o współczynnikach rzeczywistych.

Niech K będzie niepustym zbiorem skończonym oraz A $K \times K$ -macierzą symetryczną o współczynnikach rzeczywistych. Jeśli $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^K$ jest niezerowym wektorem, to definiujemy *iloraz Rayleigha* $R_A(\mathbf{v})$ wektora $\mathbf{v}$ względem macierzy A wzorem

$$R_A(\mathbf{v}) := \frac{\mathbf{v}^T \cdot A \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v}}.$$

Jeśli A jest macierzą symetryczną, to największą i najmniejszą wartość własną macierzy A oznaczamy przez λ_A i Λ_A , odpowiednio. Mamy następujące twierdzenie opisujące podstawowe własności ilorazów Rayleigha.

Twierdzenie 2.3.1. *Niech K będzie niepustym podzbiorem i A $K \times K$ -macierzą symetryczną o współczynnikach rzeczywistych. Ponadto, niech*

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$$

będą wszystkimi wartościami własnymi macierzy A (liczonymi wraz z krotnościami, w szczególności $n = |K|$) i $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni $\mathbb{R}^K$ taką, że $A \cdot \mathbf{v}_p = \lambda_p \cdot \mathbf{v}_p$ dla każdego $p \in [1, n]$. Jeśli $p, q \in [1, n]$, $p \leq q$, i niezerowy wektor $\mathbf{v}$ należy do podprzestrzeni generowanej przez wektory $\mathbf{v}_p, \dots, \mathbf{v}_q$, to

$$\lambda_p \leq R_A(\mathbf{v}) \leq \lambda_q.$$

Ponadto, $R_A(\mathbf{v}) = \lambda_p$ ($R_A(\mathbf{v}) = \lambda_q$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{v}$ jest wektorem wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ_p (λ_q , odpowiednio).

W szczególności, jeśli $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^K$ jest niezerowym wektorem, to

$$\lambda_A \leq R_A(\mathbf{v}) \leq \Lambda_A$$

oraz $R_A(\mathbf{v}) = \lambda_A$ ($R_A(\mathbf{v}) = \Lambda_A$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{v}$ jest wektorem wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ_A (Λ_A , odpowiednio).

Dowód. Wiemy, że

$$\mathbf{v} = \sum_{i=p}^q \xi_i \cdot \mathbf{v}_i$$

dla pewnych liczb rzeczywistych $\xi_p, \dots, \xi_q$. Wtedy

$$R_A(\mathbf{v}) = \frac{\sum_{i=p}^q \lambda_i \cdot \xi_i^2}{\sum_{i=p}^q \xi_i^2}.$$

Ponieważ, $\lambda_p \leq \lambda_i \leq \lambda_q$ dla każdego $i \in [p, q]$, więc

$$\lambda_p \leq R_A(\mathbf{v}) \leq \lambda_q.$$

Ponadto, jeśli $R_A(\mathbf{v}) = \lambda_p$, to $\xi_i = 0$ dla każdego $i \in [p, q]$ takiego, że $\lambda_i > \lambda_p$, więc $A \cdot \mathbf{v} = \lambda_p \cdot \mathbf{v}$. Podobnie pokazujemy, że jeśli $R_A(\mathbf{v}) = \lambda_q$, to $A \cdot \mathbf{v} = \lambda_q \cdot \mathbf{v}$. Oczywiście, jeśli $A \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$ dla pewnej liczby rzeczywistej λ , to $R_A(\mathbf{v}) = \lambda$. $\square$

Jeśli K jest niepustym zbiorem, to dla wektora $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^K$ definiujemy wektor $|\mathbf{v}| \in \mathbb{R}^K$ wzorem:

$$|(\mathbf{v})|(k) := |\mathbf{v}(k)| \quad (k \in K).$$

Wykorzystując powyższe twierdzenie, otrzymujemy następujący fakt.

Wniosek 2.3.2. *Niech K będzie niepustym podzbiorem i A będzie $K \times K$ -macierzą symetryczną o nieujemnych współczynnikach.*

- (1) *Jeśli $\mathbf{v}$ jest wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej Λ_A , to $|\mathbf{v}|$ jest również wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej Λ_A (i, w szczególności, $R_A(|\mathbf{v}|) = \Lambda_A = R_A(\mathbf{v})$).*
- (2) *Mamy $|\lambda_A| \leq \Lambda_A$. W szczególności,*

$$\Lambda_A = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ jest wartością własną macierzy } A\}.$$

Dowód. Zauważmy, że jeśli $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^K$, to

$$(2.3) \quad R_A(\mathbf{w}) \leq |R_A(\mathbf{w})| \leq R_A(|\mathbf{w}|),$$

gdzie druga nierówność wynika z nierówności trójką i tego, że $A(k, l) \geq 0$ dla wszystkich $k, l \in K$.

(1) Załóżmy, że $\mathbf{v}$ jest wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej Λ_A . Mamy ciąg nierówności

$$\Lambda_A = R_A(\mathbf{v}) \leq R_A(|\mathbf{v}|) \leq \Lambda_A,$$

gdzie pierwsza równość i ostatnia nierówność wynikają z Twierdzenia 2.3.1, natomiast nierówność środkowa wynika z nierówności (2.3). Ostatecznie mamy, że $R_A(|\mathbf{v}|) = \Lambda_A$. Korzystając jeszcze raz z Twierdzenia 2.3.1, otrzymujemy tezę.

(2) Niech $\mathbf{w}$ będzie wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej λ_A . Z Twierdzenia 2.3.1 wiemy, że $R_A(\mathbf{w}) = \lambda_A$. Stąd

$$|\lambda_A| = |R_A(\mathbf{w})| \leq R_A(|\mathbf{w}|) \leq \Lambda_A,$$

gdzie środkowa nierówność jest konsekwencją nierówności (2.3), a ostatnia nierówność jest konsekwencją Twierdzenia 2.3.1.

Dla dowodu drugiej części punktu (2) ustalmy wartość własną λ macierzy A . Jeśli $\lambda \geq 0$, to oczywiście $|\lambda| = \lambda \leq \Lambda_A$. Gdy $\lambda \leq 0$, to

$$|\lambda| = -\lambda \leq -\lambda_A \leq |\lambda_A| \leq \Lambda_A$$

na mocy udowodnionej części, co kończy dowód. $\square$

Wykorzystamy teraz powyższe fakty do badania własności grafów. Dla grafu nieskierowanego G oznaczamy $\lambda_G := \lambda_{A_G}$ i $\Lambda_G := \Lambda_{A_G}$. Liczbę Λ_G nazywamy *promieniem spektralnym* grafu G .

Twierdzenie 2.3.3. *Niech G będzie spójnym grafem nieskierowanym.*

- (1) *Jeśli $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{V_G}$ jest wektorem własnym grafu G odpowiadającym wartości własnej Λ_G , to albo $\mathbf{v}(v) > 0$ dla każdego wierzchołka $v \in V_G$ albo $\mathbf{v}(v) < 0$ dla każdego wierzchołka $v \in V_G$.*
- (2) *Krotność Λ_G jako wartości własnej grafu G wynosi 1.*
- (3) *Jeśli λ jest wartością własną grafu G , dla której istnieje wektor własny $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{V_G}$ grafu G taki, że $\mathbf{u}(v) \geq 0$ dla każdego wierzchołka $v \in V_G$, to $\lambda = \Lambda_G$.*

Dowód. (1) Niech $\mathbf{v}$ będzie wektorem odpowiadającym wartości własnej Λ_G .

Pokażemy najpierw, że $\mathbf{v}(v) \neq 0$ dla każdego wierzchołka v grafu G . Istotnie, niech

$$U := \{v \in V_G : \mathbf{v}(v) \neq 0\} \quad \text{ i } \quad W := \{v \in V_G : \mathbf{v}(v) = 0\}.$$

Musimy pokazać, że $W = \emptyset$. Z Wniosku 2.3.2 wiemy, że $A_G \cdot |\mathbf{v}| = \Lambda_G \cdot |\mathbf{v}|$. Zatem, jeśli $w \in W$, to

$$0 = \Lambda_G \cdot |\mathbf{v}(w)| = (\Lambda_G \cdot |\mathbf{v}|)(w) = (A_G \cdot |\mathbf{v}|)(w)$$

$$= \sum_{v \in V_G} A_G(w, v) \cdot |\mathbf{v}(v)| = \sum_{v \in U} A_G(w, v) \cdot |\mathbf{v}(v)|,$$

skąd wynika, że $A_G(w, v) = 0$ dla każdego wierzchołka $v \in U$. Stąd, jeśli $U \neq \emptyset$ i $W \neq \emptyset$, to

$$A_G = \begin{bmatrix} A_{\langle U \rangle_G} & \mathbf{0}_{U \times W} \\ \mathbf{0}_{W \times U} & A_{\langle W \rangle_G} \end{bmatrix},$$

a więc $A_G = \langle U \rangle_G \sqcup \langle W \rangle_G$. To prowadzioby do sprzeczności, więc $U = \emptyset$ lub $W = \emptyset$. W pierwszym przypadku $\mathbf{v} = \mathbf{0}_{V_G}$, co jest niemożliwe, gdyż $\mathbf{v}$ jest wektorem własnym. Otrzymujemy zatem, że $W = \emptyset$.

Pokażemy teraz, że wszystkie współrzędne wektora $\mathbf{v}$ mają ten sam znak. Niech

$$U := \{v \in V_G : \mathbf{v}(v) > 0\} \quad \text{ i } \quad W := \{v \in V_G : \mathbf{v}(v) < 0\}.$$

Z Wniosku 2.3.2 wiemy, że $R_{A_G}(|\mathbf{v}|) = R_{A_G}(\mathbf{v})$. Stąd

$$0 = R_{A_G}(\mathbf{v}) - R_{A_G}(|\mathbf{v}|) = \frac{4}{\mathbf{v}^{\text{tr}} \cdot \mathbf{v}} \cdot \sum_{u \in U} \sum_{w \in W} A_G(u, w) \cdot \mathbf{v}(u) \cdot \mathbf{v}(w).$$

W konsekwencji, $A_G(u, w) = 0$ dla wszystkich wierzchołków $u \in U$ i $w \in W$, co podobnie jak wcześniej prowadzi do wniosku, że $U = \emptyset$ lub $W = \emptyset$ (wobec spójności grafu G) i kończy dowód.

(2) Niech $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{V_G}$ będą wektorami własnymi odpowiadającymi wartości własnej Λ_G . Wtedy $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}^T \neq 0$ na mocy części pierwszej, co kończy dowód (przypomnijmy, że dla macierzy symetrycznej o współczynnikach rzeczywistych istnieje baza ortonormalna złożona z wektorów własnych o współczynnikach rzeczywistych).

(3) Niech λ będzie wartością własną grafu G , dla której istnieje wektor własny $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{V_G}$ taki, że $\mathbf{u}(v) > 0$ dla każdego wierzchołka $v \in V_G$. Niech $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{V_G}$ będzie wektorem własnym grafu G odpowiadającym wartości własnej Λ_G . Wtedy $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}^T \neq 0$ na mocy części pierwszej, co kończy dowód. $\square$

Innym sformułowaniem punktu (3) z Twierdzenia 2.3.3 jest następujący wniosek.

Wniosek 2.3.4. *Niech G będzie spójnym grafem nieskierowanym. Jeśli $\mathbf{v}$ jest wektorem własnym grafu G odpowiadającym wartości własnej $\lambda \neq \Lambda_G$, to istnieją wierzchołki u i w w grafu G takie, że $\mathbf{v}(u) < 0 < \mathbf{v}(w)$.* $\square$

2.4 Interpretacja współczynników wielomianu charakterystycznego

Naszym kolejnym celem będzie zinterpretowanie, w terminach struktury wyjściowego grafu, współczynników wielomianu charakterystycznego. Zaczniemy od przypadku grafów skierowanych.

Twierdzenie 2.4.1. *Jeśli D jest grafem skierowanym o n wierzchołkach, to*

$$P_D = \sum_{p=0}^n a_p \cdot t^{n-p},$$

gdzie $a_0 := 1$ oraz

$$a_p := \sum_{L \in \mathcal{L}_p} (-1)^{\kappa(L)} \quad (p \in [1, n]),$$

przy czym, dla $p \in [1, n]$, $\mathcal{L}_p$ jest zbiorem wszystkich podgrafów grafu D o p wierzchołkach, których wszystkie składowe są zorientowanymi cyklami.

Dowód. Wiadomo, że

$$a_p = (-1)^{n-p} \cdot \sum_{\substack{U \subseteq V_G \\ |U|=p}} \det((A_D)|_{U,U})$$

dla każdego $p \in [0, n]$. Korzystając dodatkowo z definicji wyznacznika, otrzymujemy, że jeśli $U \subseteq V_G$, to

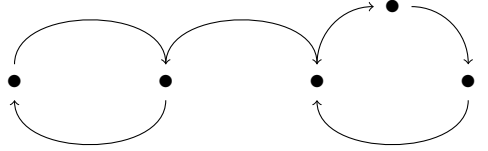
$$\det((A_D)|_{U,U}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_U} \text{sign}(\sigma) \cdot \prod_{v \in U} A_D(v, \sigma(v)).$$

Ustalmy podzbiór $U \subseteq V_G$ oraz permutację $\sigma \in \mathfrak{S}_U$. Wtedy istnieje rozkład $U = U_1 \cup \dots \cup U_m$ zbioru U taki, że

$$\sigma = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_m,$$

gdzie, dla każdego $q \in [1, m]$, σ_q jest permutacją rzędu $|U_q|$ zbioru U_q . Zauważmy, że jeśli $q \in [1, m]$ i $v \in U_q$, to w grafie D mamy dokładnie $A_D(v, \sigma(v))$ krawędzi o początku v i końcu $\sigma(v)$. W konsekwencji, cykl σ_q indukuje $\prod_{v \in U_q} A_D(v, \sigma(v))$ cykli skierowanych, które są izomorficzne z cyklem C_{σ_q} . Zatem permutacja σ indukuje $\prod_{v \in U} A_D(v, \sigma(v))$ grafów, które są izomorficzne z sumą rozłączną $C_{\sigma_1} \sqcup \dots \sqcup C_{\sigma_m}$. Ponadto każdy graf ze zbioru $\mathcal{L}_p$ jest otrzymywany w ten sposób. Zauważmy jeszcze, że $\text{sign}(\sigma) = (-1)^{n-m}$ oraz m jest liczbą składowych każdego z grafów indukowanych przez permutację σ . Podsumowując powyższe obserwacje, otrzymujemy tezę. $\square$

W celu zilustrowania Twierdzenia 2.4.1 policzymy wielomian charakterystyczny następującego grafu:



Stosując notację z Twierdzenia 2.4.1, mamy

$$\mathcal{L}_1 = \emptyset,$$

$$\mathcal{L}_2 = \left\{ \begin{array}{c} \text{cycle of length 2} \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{L}_3 = \left\{ \begin{array}{c} \text{cycle of length 3} \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{L}_4 = \emptyset,$$

i

$$\mathcal{L}_5 = \left\{ \begin{array}{c} \text{cycle of length 2} \quad \text{cycle of length 3} \end{array} \right\},$$

więc szukany wielomian jest równy

$$t^5 - t^3 - t^2 + 1.$$

Wykorzystamy teraz Twierdzenie 2.4.1, aby przedstawić interpretację współczynników wielomianu charakterystycznego w przypadku grafów skierowanych.

Twierdzenie 2.4.2. *Jeśli G jest prostym grafem nieskierowanym bez pętli o n wierzchołkach, to*

$$P_G = \sum_{p=0}^n a_p \cdot t^{n-p},$$

przy czym $a_0 := 1$ oraz

$$a_p := \sum_{K \in \mathcal{K}_p} (-1)^{\kappa(K)} \cdot 2^{c(K)} \quad (p \in [1, n]),$$

gdzie,

- dla $p \in [1, n]$, $\mathcal{K}_p$ jest zbiorem wszystkich podgrafów grafu G o p wierzchołkach, których wszystkie składowe są izomorficzne z grafem K_2 lub niezorientowanym cyklem, oraz
- dla $p \in [1, n]$ i $K \in \mathcal{K}_p$, przez $c(K)$ oznaczamy liczbę składowych grafu K , które są niezorientowanymi cyklami.

Dowód. Niech D będzie grafem skierowanym takim, że $A_D = A_G$, tzn. graf D powstaje z grafu G przez zastąpienie każdej krawędzi grafu G dwiema nowymi przeciwnie skierowanymi krawędziami. Bardziej formalnie, niech graf C będzie (dowolnym) ukierunkowaniem grafu G . Wtedy definiujemy graf skierowany D wzorami:

$$V_D := V_C, \quad E_D := E_C \times \{1, 2\},$$

i

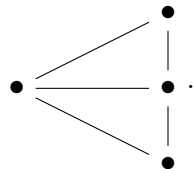
$$p_D(e, i) := \begin{cases} p_C(e) & \text{jeśli } i = 1, \\ \text{inv}(p_C(e)) & \text{jeśli } i = 2, \end{cases} \quad (e \in E_C, i \in \{1, 2\}),$$

gdzie funkcja $\text{inv} : V_C \times V_C \rightarrow V_C \times V_C$ dana jest wzorem

$$\text{inv}(u, w) := (w, u) \quad (u, w \in V_C).$$

Ponieważ $A_D = A_G$, więc $P_G = P_D$, zatem możemy wyliczyć wielomian charakterystyczny grafu G , korzystając z Twierdzenia 2.4.1 dla grafu D . Zauważmy, że w grafie D nie ma cykli długości 1, gdyż w grafie G nie ma pętli. Ponadto istnieje bijekcja pomiędzy cyklami długości 2 w grafie D i krawędziami w grafie G , przy czym krawędzie w grafie G odpowiadają podgrafom grafu G izomorficznym z grafem K_2 . Wreszcie, dla każdego podgrafu G' grafu G , który jest nieskierowanym cyklem, istnieją dokładnie dwa podgrafy D' grafu D , które są skierowanymi cyklami oraz $\overline{D'} = G'$. Powyższe obserwacje implikują tezę twierdzenia. $\square$

Ponownie zilustrujemy twierdzenia przykładem. Niech G będzie następującym grafem



Wtedy

$$\mathcal{K}_1 := \emptyset,$$

$$\mathcal{K}_2 := \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{K}_3 := \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad | \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad | \\ \bullet \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{K}_4 := \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad | \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad | \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \right\}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} P_G &= t^4 + 5 \cdot (-1) \cdot t^2 + (2 \cdot (-2)) \cdot t + ((-2) + 2 \cdot 1) \\ &= t^4 - 5 \cdot t^2 - 4 \cdot t. \end{aligned}$$

Jako kolejne zastosowanie Twierdzenia 2.4.1 przedstawimy charakteryzację grafów dwudzielnych w terminach ich wielomianów charakterystycznych.

Twierdzenie 2.4.3. *Niech G będzie grafem nieskierowanym o n wierzchołkach. Jeśli*

$$P_G = \sum_{p=0}^n a_p \cdot t^{n-p}$$

oraz

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$$

są wszystkimi wartościami własnymi grafu G (liczonymi wraz z krotnościami), to następujące warunki są równoważne:

- (1) graf G jest dwudzielny;
- (2) $a_{2p-1} = 0$ dla wszystkich $p \in [1, \lceil \frac{n}{2} \rceil]$;
- (3) $\lambda_p = -\lambda_{n+1-p}$ dla wszystkich $p \in [1, n]$.

Dowód. Niech D będzie grafem skierowanym takim, że $A_D = A_G$ (konstrukcję takiego grafu przedstawiliśmy w dowodzie Twierdzenia 2.4.2).

(1) $\implies$ (2): Załóżmy, że graf G jest dwudzielny. Z Wniosku 1.2.5 wiemy, że wtedy w grafie G nie ma podgrafów, które są cyklami nieparzystej długości. To w konsekwencji oznacza, że w grafie D nie ma podgrafów, które są zorientowanymi cyklami nieparzystej długości. Zatem Twierdzenia 2.4.1 implikuje, że $a_{2p-1} = 0$ dla wszystkich $p \in [1, \lceil \frac{n}{2} \rceil]$.

(2) $\implies$ (1): Załóżmy, że graf G nie jest dwudzielny. Z Wniosku 1.2.5 wiemy, że wtedy w grafie G istnieją podgrafy, które są cyklami nieparzystej długości. W konsekwencji, również w podgrafie D istnieją podgrafy, które są zorientowanymi cyklami nieparzystej długości. Niech p będzie najmniejszą nieparzystą liczbą całkowitą q taka, że w grafie D istnieje zorientowany cykl długości q . Niech $\mathcal{L}_p$ będzie zbiorem wszystkich podgrafów grafu D o p wierzchołkach, których wszystkie składowe są zorientowanymi cyklami. Wtedy $\mathcal{L}_p \neq \emptyset$ oraz wszystkie grafy należące do $\mathcal{L}_p$ są spójne. Twierdzenie 2.4.1 implikuje wtedy, że

$$a_{2p-1} = \sum_{L \in \mathcal{L}_p} (-1)^{\kappa(L)} = -|\mathcal{L}_p| \neq 0.$$

(2) $\implies$ (3): Jeśli założymy, że $a_{2p-1} = 0$ dla wszystkich $p \in [1, \lceil \frac{n}{2} \rceil]$, to otrzymamy, że

$$P_G(-\lambda) = (-1)^n \cdot P_G(\lambda)$$

dla każdej liczby rzeczywistej λ , zatem spektrum jest symetryczne względem 0.

(3) $\implies$ (4): Załóżmy, że $\lambda_p = -\lambda_{n+1-p}$ dla wszystkich $p \in [1, n]$. Zauważmy, że jeśli n jest liczbą nieparzystą, to wtedy $\lambda_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} = 0$. Ponadto

$$\begin{aligned} P_G &= \prod_{p \in [1, n]} (t - \lambda_p) = t^{n \bmod 2} \cdot \prod_{p \in [1, \lceil \frac{n}{2} \rceil]} ((t - \lambda_p) \cdot (t - \lambda_{n+1-p})) \\ &= t^{n \bmod 2} \cdot \prod_{p \in [1, \lceil \frac{n}{2} \rceil]} ((t - \lambda_p) \cdot (t + \lambda_p)) \\ &= t^{n \bmod 2} \cdot \prod_{p \in [1, \lceil \frac{n}{2} \rceil]} (t - \lambda_p^2), \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

W przypadku grafów spójnych otrzymujemy jeszcze jedną charakteryzację grafów dwudzielnych.

Wniosek 2.4.4. *Niech G będzie spójnym grafem nieskierowanym o n wierzchołkach. Wtedy graf G jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_G = -\Lambda_G$.*

Dowód. Jeśli graf G jest dwudzielny, to $\lambda_G = -\Lambda_G$ na mocy Twierdzenia 2.4.3. Załóżmy zatem, że $\lambda = -\Lambda_G$. Rozważmy najpierw przypadek $\lambda_G = \Lambda_G$. Wtedy $\lambda_G = 0 = \Lambda_G$, zatem $G \simeq N_n$ na mocy Stwierdzenia 2.2.1. W szczególności graf G jest dwudzielny.

Założmy zatem, że $\lambda_G < \Lambda_G$. Wtedy $\lambda_G < 0 < \Lambda_G$. Ustalmy wektor własny $\mathbf{v}$ odpowiadający wartości własnej λ_G . Bez straty ogólności możemy założyć, że $\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v} = 1$. Założenie $\lambda_G = -\Lambda_G$ oznacza w szczególności, że $|\lambda_G| = \Lambda_G$. Zatem, korzystając z nierówności trójkąta, otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} R_{A_G}(|\mathbf{v}|) &= \sum_{u,w \in V_G} A_G(u,w) \cdot |\mathbf{v}(u)| \cdot |\mathbf{v}(w)| \\ &\geq \left| \sum_{u,w \in V_G} A_G(u,w) \cdot \mathbf{v}(u) \cdot \mathbf{v}(w) \right| = |R_{A_G}(\mathbf{v})| = |\lambda_G| = \Lambda_G. \end{aligned}$$

Z drugiej strony, $R_{A_G}(|\mathbf{v}|) \leq \Lambda_G$ na mocy Twierdzenia 2.3.1, a więc ostatecznie $R_{A_G}(|\mathbf{v}|) = \Lambda_G$ i

$$\sum_{u,w \in V_G} A_G(u,w) \cdot |\mathbf{v}(u)| \cdot |\mathbf{v}(w)| = \left| \sum_{u,w \in V_G} A_G(u,w) \cdot \mathbf{v}(u) \cdot \mathbf{v}(w) \right|.$$

Twierdzenie 2.3.1 implikuje, że jest $|\mathbf{v}|$ wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej Λ_G . Ponadto $\mathbf{v}(v) \neq 0$ dla każdego wierzchołka $v \in V_G$ na mocy Twierdzenia 2.3.3. Wreszcie ponieważ $\lambda_G \neq \Lambda_G$, więc $\mathbf{v}^T \cdot |\mathbf{v}| = 0$.

Niech

$$U := \{u \in V_G : \mathbf{v}(u) < 0\} \quad \text{ i } \quad W := \{w \in V_G : \mathbf{v}(w) > 0\}.$$

Wtedy $U \cap W = \emptyset$ i $U \cup W = V_G$. Równość $\mathbf{v}^T \cdot |\mathbf{v}| = 0$ oznacza, że $U \neq \emptyset \neq W$. Wiemy, że

$$\sum_{u,w \in V_G} A_G(u,w) \cdot |\mathbf{v}(u)| \cdot |\mathbf{v}(w)| = \sum_{u,w \in V_G} A_G(u,w) \cdot \mathbf{v}(u) \cdot \mathbf{v}(w)$$

lub

$$\sum_{u,w \in V_G} A_G(u,w) \cdot |\mathbf{v}(u)| \cdot |\mathbf{v}(w)| = - \sum_{u,w \in V_G} A_G(u,w) \cdot \mathbf{v}(u) \cdot \mathbf{v}(w)$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \sum_{u,w \in V_G} A_G(u,w) \cdot |\mathbf{v}(u)| \cdot |\mathbf{v}(w)| &= \sum_{u,w \in U} A_G(u,w) \cdot \mathbf{v}(u) \cdot \mathbf{v}(w) \\ &+ \sum_{u,w \in W} A_G(u,w) \cdot \mathbf{v}(u) \cdot \mathbf{v}(w) - 2 \cdot \sum_{u \in U, w \in W} A_G(u,w) \cdot \mathbf{v}(u) \cdot \mathbf{v}(w). \end{aligned}$$

Zatem w pierwszym przypadku wnioskujemy, że $A_G(u,w) = 0$ dla wszystkich $u \in U$ i $w \in W$. Wtedy

$$A_G = \begin{bmatrix} A_{\langle U \rangle_G} & \mathbf{0}_{U \times W} \\ \mathbf{0}_{W \times U} & A_{\langle W \rangle_G} \end{bmatrix},$$

a więc graf G nie jest spójny. W drugim przypadku $A_G(u,w) = 0$ dla wszystkich $u, w \in U$ i dla wszystkich $u, w \in W$, zatem graf G jest dwudzielny. $\square$

2.5 Wielomiany charakterystyczne drzew

W tym podrozdziale przedstawimy kilka własności wielomianów charakterystycznych drzew. Najpierw zinterpretujemy współczynniki. W tym celu potrzebujemy następującej definicji. Krawędzie e' i e'' grafu nieskierowanego G nazywamy *rozłącznymi*, jeśli $p_G(e') \cap p_G(e'') = \emptyset$.

Stwierdzenie 2.5.1. *Jeśli G jest drzewem o n wierzchołkach, to*

$$P_G = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \cdot a_p \cdot t^{n-2p},$$

gdzie $a_0 := 1$ oraz

$$a_p := \#\{F \subseteq E_G : F \text{ jest zbiorem parami rozłącznych krawędzi i } |F| = p\} \\ \left(p \in \left[1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right] \right).$$

Dowód. Teza wynika natychmiast z Twierdzenia 2.4.2 oraz faktu, że drzewa nie mają podgrafów, które są izomorficzne z nieskierowanymi cyklami (Stwierdzenie 1.2.2). $\square$

Wielomiany charakterystyczne drzew można wyliczać wykorzystując regułę rekurencyjną. Regułę tę udowodnimy jako wniosek z bardziej ogólnego faktu.

Twierdzenie 2.5.2. *Niech G_1 i G_2 będą grafami takimi, że $V_{G_1} \cap V_{G_2} = \emptyset$ i $E_{G_1} \cap E_{G_2} = \emptyset$. Wybierzmy wierzchołki $u \in V_{G_1}$ i $w \in V_{G_2}$. Niech*

$$G := (V_{G_1} \cup V_{G_2}, E_{G_1} \cup E_{G_2} \cup \{e_0\}, p_G),$$

gdzie

$$p_G(e) := \begin{cases} p_{G_1}(e) & \text{jeśli } e \in E_{G_1}, \\ p_{G_2}(e) & \text{jeśli } e \in E_{G_2}, \\ \{u, w\} & \text{jeśli } e = e_0, \end{cases} \quad (e \in E_G)$$

(tzn. graf G powstaje z sumy rozłącznej grafów G_1 i G_2 przez połączenie krawędzią wierzchołków u i w).

(1) *Jeśli $|V_{G_1}| > 1$ i $|V_{G_2}| > 1$, to*

$$P_G = P_{G_1} \cdot P_{G_2} - P_{G_1-u} \cdot P_{G_2-w}.$$

(2) *Jeśli $|V_{G_1}| = 1$ i $|V_{G_2}| > 1$, to*

$$P_G = (t - |E_{G_1}|) \cdot P_{G_2} - P_{G_2-w}.$$

(3) *Jeśli $|V_{G_1}| = 1 = |V_{G_2}|$, to*

$$P_G = (t - |E_{G_1}|) \cdot (t - |E_{G_2}|) - 1.$$

Zauważmy, że przypadki (2) i (3) są szczególnymi wersjami przypadku (1), które jednak trzeba sformułować osobno, gdyż nie rozważamy grafów o pustym zbiorze wierzchołków.

Dowód. Zauważmy, że

$$A_G = \begin{bmatrix} A_{G_1} & B \\ B^T & A_{G_2} \end{bmatrix}$$

gdzie B jest $V_{G_1} \times V_{G_2}$ -macierzą daną wzorem

$$B(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x = u \text{ i } y = w, \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases} \quad (x \in V_{G_1}, y \in V_{G_2}).$$

Stąd

$$P_G = \det \begin{bmatrix} t \cdot I_{V_{G_1}} - A_{G_1} & -B \\ -B^T & t \cdot I_{V_{G_2}} - A_{G_2} \end{bmatrix},$$

więc, stosując rozwinięcie blokowe względem wierszy, których indeksy należą do zbioru V_{G_1} , otrzymujemy tezę. $\square$

Stosując Twierdzenie 2.5.2 dla drzew, otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 2.5.3. *Niech G będzie drzewem takim, że $|V_G| > 2$. Jeśli u i w są dwoma sąsiednimi wierzchołkami drzewa G takimi, że $\deg_G u = 1$, to*

$$P_G = t \cdot P_{G-u} - P_{G \setminus \{u,w\}}.$$

Dowód. Tezę otrzymujemy, stosując Twierdzenie 2.5.2 dla grafów $G_1 := \langle u \rangle_G$ i $G_2 := G - u$. $\square$

Szczególną wersją powyższego wniosku jest jego wersja dla ścieżek.

Wniosek 2.5.4. *Jeśli $n \geq 2$ jest liczbą całkowitą, to*

$$P_{P_n} = t \cdot P_{P_{n-1}} - P_{P_{n-2}}.$$

W szczególności,

$$P_{P_n} = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \cdot \binom{n-p}{p} \cdot t^{n-2p}.$$

Dowód. Pierwsza część wynika natychmiast z Wniosku 2.5.3. Druga wynika z pierwszej przez prostą indukcję. $\square$

2.6 Promień spektralny grafu nieskierowanego

Celem tego paragrafu będzie przedstawienie wybranych własności promienia spektralnego Λ_G grafu nieskierowanego G . W szczególności, na zakończenie tego paragrafu sklasyfikujemy grafy o promieniu spektralnym nie większym niż 2.

2.6.1 Przeplatanie

Rozpocniemy od następującej obserwacji dotyczącej związków promieni spektralnych grafu i jego podgrafów. $\blacksquare$

Twierdzenie 2.6.1. *Niech G będzie grafem nieskierowanym. Jeśli H jest podgrafem grafu G , to $\Lambda_H \leq \Lambda_G$. Jeśli dodatkowo grafy H i G są spójne, to $\Lambda_H < \Lambda_G$.*

Dowód. Korzystając z indukcji matematycznej, wystarczy udowodnić nierówność $\Lambda_H \leq \Lambda_G$ w dwóch przypadkach: gdy $H = G - e$, dla pewnej krawędzi e grafu G , i gdy $H = G - v$, dla pewnego wierzchołka v grafu G . Ponadto udowodnimy, że jeśli w pierwszym przypadku graf H jest spójny, to $\Lambda_H < \Lambda_G$. Podobnie pokażemy, że w drugim przypadku $\Lambda_H < \Lambda_G$, gdy graf G jest spójny.

Założmy najpierw, że $H = G - e$ dla pewnej krawędzi e grafu G . Wybierzmy niezerowy wektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{V_G}$ taki, że $A_H \cdot \mathbf{v} = \Lambda_H \cdot \mathbf{v}$. Na mocy Wniosku 2.3.2 możemy założyć, że $\mathbf{v}(v) \geq 0$ dla każdego wierzchołka $v \in V_G$. Wtedy, korzystając z Twierdzenia 2.3.1, otrzymujemy, że

$$\Lambda_H = R_{A_H}(\mathbf{v}) \leq R_{A_G}(\mathbf{v}) \leq \Lambda_G.$$

Zauważmy ponadto, że jeśli graf H jest spójny, to z Twierdzenia 2.3.3 wynika, że możemy założyć, iż $\mathbf{v}(v) > 0$ dla każdego wierzchołka $v \in V_G$. Stąd $R_{A_H}(\mathbf{v}) < R_{A_G}(\mathbf{v})$, a więc również $\Lambda_H < \Lambda_G$.

Założmy teraz, że $H = G - v$ dla pewnego wierzchołka v grafu G . Wybierzmy niezerowy wektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{V_G \setminus \{v\}}$ taki, że $A_H \cdot \mathbf{v} = \Lambda_H \cdot \mathbf{v}$. Przypomnijmy, że wektor $\mathbf{v}$ możemy traktować jako element zbioru $\mathbb{R}^{V_G}$ (przyjmujemy, że $\mathbf{v}(v) = 0$). Wtedy, korzystając ponownie z Twierdzenia 2.3.1, otrzymujemy, że

$$\Lambda_H = R_{A_H}(\mathbf{v}) = R_{A_G}(\mathbf{v}) \leq \Lambda_G.$$

Jeśli dodatkowo graf G jest spójny, to $R_{A_G}(\mathbf{v}) < \Lambda_G$, więc również $\Lambda_H < \Lambda_G$. Istotnie, ponieważ $\mathbf{v}(v) = 0$, więc z Twierdzenia 2.3.3 wynika, że wektor $\mathbf{v}$ nie jest wektorem własnym grafu G odpowiadającym wartości własnej Λ_G . Twierdzenie 2.3.1 implikuje zatem, że $R_{A_G}(\mathbf{v}) < \Lambda_G$. $\square$

Nierówność $\lambda_H \geq \lambda_G$ nie musi być prawdziwa. Dla przykładu, $\lambda_{K_3} = -1$ na mocy Stwierdzenia 2.2.2 oraz graf K_3 posiada podgraf H , który jest izomorficzny z grafem P_2 . Ponadto ze Stwierdzenia 2.2.10 wiemy, że $\lambda_{P_2} = -\sqrt{2}$. Z drugiej strony w przypadku podgrafów silnych mamy twierdzenie o przeplataniu przypisywane Cauchy'emu. Sformułujemy je najpierw w ogólnej wersji dla macierzy.

Twierdzenie 2.6.2. *Niech K i L będą niepustymi zbiorami, A symetryczną $K \times K$ -macierz oraz R $K \times L$ -macierz taką, że $R^T \cdot R = \text{Id}_L$. Niech $B := R^T \cdot A \cdot R$,*

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$$

będą wszystkimi wartościami własnymi macierz A (liczonymi wraz z krotnościami, w szczególności $n = |K|$) i

$$\mu_1 \leq \dots \leq \mu_m$$

będą wszystkimi wartościami własnymi macierz B (liczonymi wraz z krotnościami, w szczególności $m = |L|$).

(1) Jeśli $p \in [1, m]$, to

$$\lambda_p \leq \mu_p \leq \lambda_{p+n-m}.$$

(2) Jeśli $p \in [1, m]$ i $\mu_p = \lambda_p$, to istnieje niezerowy wektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^L$ taki, że

$$B \cdot \mathbf{u} = \mu_p \cdot \mathbf{u} \quad \text{oraz} \quad A \cdot (R \cdot \mathbf{u}) = \lambda_p \cdot (R \cdot \mathbf{u}).$$

(3) Jeśli $p \in [1, m]$ i $\mu_p = \lambda_{p+n-m}$, to istnieje niezerowy wektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^L$ taki, że

$$B \cdot \mathbf{u} = \mu_p \cdot \mathbf{u} \quad \text{oraz} \quad A \cdot (R \cdot \mathbf{u}) = \lambda_{p+n-m} \cdot (R \cdot \mathbf{u}).$$

Dowód. Niech $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ będzie ortonormalną bazą przestrzeni $\mathbb{R}^K$ taką, że $A \cdot \mathbf{v}_p = \lambda_p \cdot \mathbf{v}_p$ dla każdego $p \in [1, n]$. Podobnie, niech $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni $\mathbb{R}^L$ taką, że $B \cdot \mathbf{u}_q = \mu_q \cdot \mathbf{u}_q$ dla każdego $q \in [1, m]$.

Ustalmy $p \in [1, m]$. Wybierzmy niezerowy wektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^L$, który należy do podprzestrzeni generowanej przez wektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p$ oraz jest prostopadły do wektorów $R^T \cdot \mathbf{v}_1, \dots, R^T \cdot \mathbf{v}_{p-1}$. Wtedy wektor $R \cdot \mathbf{u}$ jest prostopadły do wektorów $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{p-1}$, zatem należy do podprzestrzeni generowanej przez wektory $\mathbf{v}_p, \dots, \mathbf{v}_n$. Zauważmy również, że $R_A(R \cdot \mathbf{u}) = R_B(\mathbf{u})$. Z Twierdzenia 2.3.1 wiemy, że $R_B(\mathbf{u}) \leq \mu_p$ oraz mamy równość wtedy i tylko wtedy, gdy $B \cdot \mathbf{u} = \mu_p \cdot \mathbf{u}$. Podobnie, $R_A(R \cdot \mathbf{u}) \geq \lambda_p$ oraz mamy równość wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cdot (R \cdot \mathbf{u}) = \lambda_p \cdot (R \cdot \mathbf{u})$. Stąd natychmiast otrzymujemy, że

$$\lambda_p \leq R_A(R \cdot \mathbf{u}) = R_B(\mathbf{u}) \leq \mu_p.$$

Ponadto, jeśli $\lambda_p = \mu_p$, to $R_B(\mathbf{u}) = \mu_p$ i $R_A(R \cdot \mathbf{u}) = \lambda_p$, więc otrzymujemy tezę punktu (2). Nierówność $\mu_p \leq \lambda_{p+n-m}$ oraz punkt (3) dowodzimy dualnie. $\square$

W wersji dla grafów otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.6.3. Niech H będzie silnym podgrafem grafu nieskierowanego G . Jeśli

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$$

są wszystkimi wartościami własnymi grafu G (liczonymi wraz z krotnościami, w szczególności $n = |V_G|$) i

$$\mu_1 \leq \dots \leq \mu_m$$

są wszystkimi wartościami własnymi grafu H (liczonymi wraz z krotnościami, w szczególności $m = |V_H|$), to

$$\lambda_p \leq \mu_p \leq \lambda_{p+n-m}$$

dla każdego $p \in [1, m]$.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że $A_H = R^T \cdot A_G \cdot R$, gdzie

$$R = \begin{bmatrix} I_{V_H} \\ \mathbf{0}_{(V_G \setminus V_H) \times V_H} \end{bmatrix}.$$

Oczywiście $R^T \cdot R = I_{V_H}$. □

2.6.2 Ograniczenia

Wyznaczenie promienia spektralnego nie jest zwykle łatwym zadaniem. Przedstawimy pewne ograniczenia dla promienia spektralnego. Rozpocznijmy od ograniczeń górnych.

Twierdzenie 2.6.4. *Jeśli G jest grafem prostym grafem nieskierowanym bez pętli, to*

$$\Lambda_G \leq \sqrt{\frac{2 \cdot |E_G| \cdot (|V_G| - 1)}{|V_G|}}.$$

Dowód. Niech $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ będą wszystkimi wartościami własnymi grafu G (liczonymi wraz z krotnościami, w szczególności $n = |V_G|$), przy czym $\lambda_n = \Lambda_G$. Korzystając, ze Stwierdzenia 2.1.6 wiemy, że

$$\Lambda_G = -\sum_{p=1}^{n-1} \lambda_p,$$

zatem

$$\Lambda_G^2 = \left(\sum_{p=1}^{n-1} \lambda_p \right)^2.$$

Z nierówności Cauchy'ego-Schwartz'a wynika, że

$$\left(\sum_{p=1}^{n-1} \lambda_p \right)^2 \leq (n-1) \cdot \left(\sum_{p=1}^{n-1} \lambda_p^2 \right).$$

Ze Stwierdzenia 2.1.7 wiemy, że

$$\sum_{p=1}^{n-1} \lambda_p^2 = 2 \cdot |E_G| - \Lambda_G^2.$$

Ostatecznie, otrzymujemy nierówność

$$\Lambda_G^2 \leq (n-1) \cdot (2 \cdot |E_G| - \Lambda_G^2).$$

Teza twierdzenia wynika przez proste przekształcenie powyższej nierówności. $\square$

Łatwo podać przykłady grafów, które nie są proste lub mają pętle, dla których powyższa nierówność nie jest spełniona.

Jeśli założymy dodatkowo, że w grafie G nie ma wierzchołków izolowanych, to otrzymujemy lepsze ograniczenie.

Twierdzenie 2.6.5. *Jeśli G jest grafem prostym grafem nieskierowanym bez pętli i wierzchołków izolowanych, to*

$$\Lambda_G \leq \sqrt{2 \cdot |E_G| - |V_G| + 1}.$$

Dowód. Z Twierdzenia 2.3.1 wiemy, że

$$\Lambda_G = \max\{R_{A_G}(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{V_G} \text{ i } \mathbf{v} \neq \mathbf{0}_{V_G}\},$$

zatem dla dowodu wystarczy pokazać, że

$$R_{A_G}(\mathbf{v}) \leq \sqrt{2 \cdot |E_G| - |V_G| + 1}$$

dla każdego wektora $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{V_G}$ takiego, że $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_{V_G}$.

Zatem ustalmy wektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{V_G}$ taki, że $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_{V_G}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v} = 1$. Wtedy

$$R_{A_G}(\mathbf{v}) = \sum_{u \in V_G} \sum_{w \in N_G(u)} \mathbf{v}(u) \cdot \mathbf{w}(w)$$

(w powyższej równości korzystamy z tego, że graf G jest prosty i nie ma pętli). Dla dowolnych liczb rzeczywistych x , y i z takich, że $z > 0$, wiemy, że

$$x \cdot y \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{z} \cdot x^2 + z \cdot y^2 \right).$$

Stąd

$$\begin{aligned} R_{A_G}(\mathbf{v}) &\leq \sum_{u \in V_G} \sum_{w \in N_G(u)} \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\deg_G w}{\deg_G u}} \cdot (\mathbf{v}(u))^2 + \sqrt{\frac{\deg_G u}{\deg_G w}} \cdot (\mathbf{v}(w))^2 \right) \\ &= \sum_{u \in V_G} \left(\sum_{w \in N_G(u)} \sqrt{\frac{\deg_G w}{\deg_G u}} \right) \cdot (\mathbf{v}(u))^2 \end{aligned}$$

(w powyższej nierówności korzystamy z tego, że graf G nie ma wierzchołków izolowanych, a więc $\deg_G v > 0$ dla każdego wierzchołka $v \in V_G$).

Jeśli $u \in V_G$, to, korzystając z nierówności Cauchy’ego-Schwartza, otrzymujemy, że

$$\sum_{w \in N_G(u)} \sqrt{\frac{\deg_G w}{\deg_G u}} \leq \sqrt{\sum_{w \in N_G(u)} \frac{1}{\deg_G u}} \cdot \sqrt{\sum_{w \in N_G(u)} \deg_G w}$$

Ponadto, korzystając ze Stwierdzenia 1.1.1, otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \sum_{w \in N_G(u)} \deg_G w &= \sum_{w \in V_G} \deg_G w - \deg_G u - \sum_{w \in V_G \setminus (N_G(u) \cup \{u\})} \deg_G w \\ &\leq 2 \cdot |E_G| - \deg_G u - (|V_G| - |N_G(u)| - 1) \\ &= 2 \cdot |E_G| - |V_G| + 1. \end{aligned}$$

Ostatecznie,

$$R_{A_G}(\mathbf{v}) \leq \sqrt{2 \cdot |E_G| - |V_G| + 1} \cdot \sum_{u \in V_G} (\mathbf{v}(u))^2 = \sqrt{2 \cdot |E_G| - |V_G| + 1}. \quad \square$$

Zauważmy, że jeśli G jest prostym grafem nieskierowanym bez pętli, to $|E_G| \leq \frac{|V_G| \cdot (|V_G| - 1)}{2}$. Stąd natychmiast wynika, że wtedy

$$2 \cdot |E_G| - |V_G| + 1 \leq \frac{2 \cdot |E_G| \cdot (|V_G| - 1)}{|V_G|}.$$

Podobnie jak wcześniej, łatwo podać przykłady grafów niespełniających założeń twierdzenia, dla których teza twierdzenia jest również nieprawdziwa.

Kolejne ograniczenie ma następującą postać.

Twierdzenie 2.6.6. *Jeśli G jest grafem nieskierowanym, to*

$$\frac{1}{|V_G|} \cdot \sum_{v \in V_G} \deg_G v \leq \Lambda_G \leq \max\{\deg_G v : v \in V_G\}.$$

Dowód. Zauważmy, że

$$R_{A_G}(\mathbf{1}_{V_G}) = \frac{1}{|V_G|} \cdot \sum_{v \in V_G} \deg_G v,$$

zatem pierwsza nierówność wynika z Twierdzenia 2.3.1.

Dla dowodu drugiej nierówności wybierzmy niezerowy wektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{V_G}$ taki, że $A \cdot \mathbf{v} = \Lambda_G \cdot \mathbf{v}$. Korzystając z Twierdzenia 2.3.3, możemy założyć, że

$\mathbf{v}(v) \geq 0$ dla każdego wierzchołka $v \in V_G$. Wybierzmy wierzchołek $u \in V_G$ taki, że

$$\mathbf{v}(u) = \max\{\mathbf{v}(v) : v \in V_G\}.$$

Wtedy $\mathbf{v}(u) > 0$. Ponadto,

$$\begin{aligned} \Lambda_G \cdot \mathbf{v}(u) &= (A_G \cdot \mathbf{v})(u) = \sum_{v \in V_G} A(u, v) \cdot \mathbf{v}(v) \leq \left(\sum_{v \in V_G} A(u, v) \right) \cdot \mathbf{v}(u) \\ &= \deg_G u \cdot \mathbf{v}(u) \leq \max\{\deg_G v : v \in V_G\} \cdot \mathbf{v}(u), \end{aligned}$$

co kończy dowód. $\square$

Wykorzystamy teraz Twierdzenie 2.6.6, aby powiązać promień spektralny grafu z jego liczbą chromatyczną. Jeśli G jest grafem nieskierowanym bez pętli, to *liczbą chromatyczną* χ_G grafu G nazywamy najmniejszą liczbę naturalną p taką, że istnieją podzbiory $V_1, \dots, V_p$ zbioru V_G takie, że

$$V_G = V_1 \cup \dots \cup V_p,$$

$V_i \cap V_j = \emptyset$ dla wszystkich $i, j \in [1, p]$ takich, że $i \neq j$, oraz jeśli $i \in [1, p]$, to albo $V_i = \emptyset$ albo graf $\langle V_i \rangle_G$ jest pusty (tzn. w grafie G nie ma krawędzi łączących wierzchołki ze zbioru V_i).

Kluczową rolę w dowodzie następnego twierdzenia będzie odgrywać następujący lemat.

Lemat 2.6.7. *Niech G będzie grafem nieskierowanym bez pętli. Jeśli U jest podzbiorem zbioru wierzchołków, to*

$$\chi_G \leq \max(\{\chi_U\} \cup \{\deg_G v + 1 : v \in V_G \setminus U\}),$$

gdzie

$$\chi_U := \begin{cases} \chi_{\langle U \rangle_G} & \text{jeśli } U \neq \emptyset, \\ 0 & \text{jeśli } U = \emptyset. \end{cases}$$

Dowód. Tezę udowodnimy przez indukcję na $|V_G| - |U|$.

Jeśli $|V_G| = |U|$, to $H = G$ i teza jest oczywista.

Założmy teraz, że $|U| < |V_G|$, i wybierzmy wierzchołek $u \in V_G \setminus U$. Jeśli $|V_G| = 1$, to $U = \emptyset$, $\chi_G = 1$ oraz

$$\max\{\deg_G v : v \in V_G\} = \deg_G u = 0,$$

gdyż w grafie G nie ma pętli. Możemy zatem założyć, że $|V_G| > 1$. Niech $G' := G - u$ i

$$p := \max(\{\chi_{H'}\} \cup \{\deg_G v + 1 : v \in V_G \setminus (U \cup \{u\})\}).$$

Ponieważ $\deg_G v \geq \deg_{G'} v$ dla każdego wierzchołka $v \in V_G \setminus (U \cup \{u\})$, więc z założenia indukcyjnego $\chi_{G'} \leq p$, zatem istnieją podzbiory $V_1, \dots, V_p$ zbioru $V_{G'}$ takie, że

$$V_{G'} = V_1 \cup \dots \cup V_p,$$

$V_i \cap V_j = \emptyset$ dla wszystkich $i, j \in [1, p]$ takich, że $i \neq j$, oraz jeśli $i \in [1, p]$, to albo $V_i = \emptyset$ albo graf $\langle V_i \rangle_{G'}$ jest pusty. Jeśli $\deg_G u < p$, to istnieje $i \in [1, p]$ takie, że graf $\langle V_i \cup \{v\} \rangle_G$ jest pusty, a więc

$$\chi_G \leq p = \max(\{\chi_H\} \cup \{\deg_G v + 1 : v \in V_G \setminus U\}).$$

W przeciwnym wypadku,

$$\chi_G \leq p + 1 \leq \deg_G u + 1 = \max(\{\chi_H\} \cup \{\deg_G v + 1 : v \in V_G \setminus U\})$$

(zauważmy, że $\chi_H \leq \chi_{G'} \leq p$). □

Trywialną konsekwencją Lematu 2.6.7 jest następujący wniosek.

Wniosek 2.6.8. *Jeśli G jest grafem nieskierowanym bez pętli, to istnieje wierzchołek v grafu G taki, że*

$$\deg_G v \geq \chi_G - 1.$$

Dowód. Oczywiście (to treść Lematu 2.6.7 dla $U = \emptyset$). □

Powyższą obserwację możemy wzmocnić.

Stwierdzenie 2.6.9. *Jeśli G jest grafem nieskierowanym bez pętli, to istnieje podgraf G' grafu G taki, że*

$$\deg_{G'} v \geq \chi_G - 1$$

dla każdego wierzchołka v grafu G' .

Dowód. Tezę udowodnimy przez indukcję ze względu na $|V_G|$. Niech U będzie zbiorem wierzchołków $u \in V_G$ takich, że $\deg_G u \geq \chi_G - 1$. Z Wniosku 2.6.8 wiemy, że $U \neq \emptyset$. Niech $H := \langle U \rangle_G$. Lemat 2.6.7 implikuje, że $\chi_H \geq \chi_G$. Ponieważ oczywiście $\chi_H \leq \chi_G$, więc ostatecznie otrzymujemy, że $\chi_H = \chi_G$. Jeśli $U = V_G$, to bierzemy $G' := G$. W przeciwnym wypadku, z założenia indukcyjnego istnieje podgraf G' grafu H taki, że

$$\deg_{G'} v \geq \chi_H - 1$$

dla każdego wierzchołka v grafu G' . Ponieważ $\chi_H = \chi_G$, więc to kończy dowód. □

Twierdzenie 2.6.10. *Jeśli G jest grafem nieskierowanym bez petli, to*

Dowód. Wiemy, że istnieje podgraf G' grafu G taki, że

dla każdego wierzchołka v grafu G' . Z Twierdzenia 2.6.1 wiemy, że

$$\Lambda_G > \Lambda_{G'}.$$

Ponadto, Twierdzenie 2.6.6 implikuje, że

$$\Lambda_{G'} \geq \min\{\deg_{G'} v : v \in V_{G'}\}.$$

Korzystając z nierówności (2.4), otrzymujemy tezę.

2.6.3 Grafy o promieniu spektralnym nie większym niż 2

Naszym celem w tym podparagrafie będzie sklasyfikowanie grafów, których promień spektralny nie przekracza 2. Okazuje się, że otrzymamy w ten sposób grafy Dynkina oraz rozszerzone grafy Dynkina, które pojawiają się w naturalny sposób w wielu działach matematyki (teoria grup, teoria algebr Liego, teoria reprezentacji, teoria osobliwości). Rozpocznijmy od zdefiniowania grafów Dynkina.

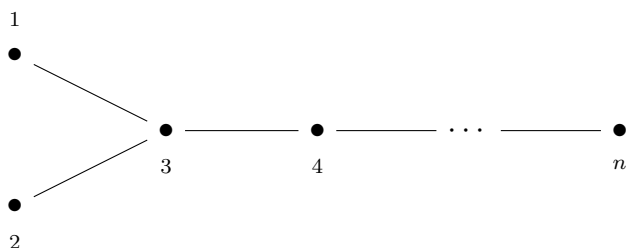
Jeśli n jest dodatnią liczbą całkowitą, to przez $\mathbb{A}_n$ oznaczamy graf P_{n-1} . Jeśli $n \geq 4$ jest liczbą całkowitą, to przez $\mathbb{D}_n$ oznaczamy graf zdefiniowany wzorami:

$$V_{\mathbb{D}_n} := [1, n], \quad E_{\mathbb{D}_n} := \{\{1, 3\}\} \cup \{\{p, p+1\} : p \in [2, n-1]\},$$

i

$$p_{\mathbb{D}_n}(e) := e \quad (e \in E_{\mathbb{D}_n}).$$

W postaci graficznej graf $\mathbb{D}_n$ można przedstawić w następująco:



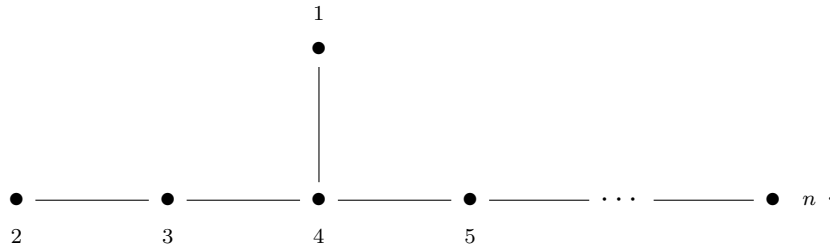
Wreszcie, jeśli $n \geq 6$, to przez $\mathbb{E}_n$ oznaczamy graf zdefiniowany wzorami:

$$V_{\mathbb{E}_n} := [1, n], \quad E_{\mathbb{E}_n} := \{\{1, 4\}\} \cup \{\{p, p+1\} : p \in [2, n-1]\},$$

i

$$p_{\mathbb{E}_n}(e) := e \quad (e \in E_{\mathbb{E}_n}).$$

odpowiednio. Innymi słowy, graf $\mathbb{E}_n$ ma postać



Grafy $\mathbb{A}_n$, $n \geq 1$, $\mathbb{D}_n$, $n \geq 4$, oraz $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$ i $\mathbb{E}_8$ nazywamy *grafami Dynkina*.

Zajmiemy się teraz problemem wyznaczenia promieni spektralnych grafów Dynkina. Spektrum grafu $\mathbb{A}_n$, dla $n \geq 1$, opisaliśmy w Stwierdzeniu 2.2.10. Z opisu tego wyniku, że $\Lambda_{\mathbb{A}_n} = 2 \cdot \cos(\frac{\pi}{n+1})$.

Opiszemy teraz spektrum grafu $\mathbb{D}_n$, $n \geq 4$. W dowodzie w istotny sposób skorzystamy ze znajomości spektrum ścieżki.

Stwierdzenie 2.6.11. *Jeśli $n \geq 4$ jest liczbą całkowitą, to*

$$P_{\mathbb{D}_n} = t \cdot \prod_{m=1}^{n-1} \left(t - 2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot m - 1}{2 \cdot n - 2} \cdot \pi\right) \right).$$

W szczególności, $\Lambda_{\mathbb{D}_n} = 2 \cdot \cos(\frac{\pi}{2 \cdot n - 2})$.

Dowód. Zauważmy, że $A_{\mathbb{D}_n} \cdot (\mathbf{1}_1 - \mathbf{1}_2) = \mathbf{0}_{[1, n]}$. Dla zakończenia dowodu wystarczy zatem znaleźć wartości własne odpowiadające wektorom należącym do podprzestrzeni U danej wzorem

$$U := \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n : \mathbf{v}(1) = \mathbf{v}(2)\}.$$

Dla wektora $\mathbf{v} \in U$ definiujemy wektor $\hat{\mathbf{v}} \in \mathbb{C}^{2 \cdot n - 3}$ wzorem:

$$\hat{\mathbf{v}}(p) := \begin{cases} \mathbf{v}(n+1-p) & \text{jeśli } p \in [1, n-2], \\ \mathbf{v}(1) + \mathbf{v}(2) & \text{jeśli } p = n-1, \\ \mathbf{v}(p-n+3) & \text{jeśli } p \in [n, 2 \cdot n - 3], \end{cases}$$

(tzn. $\mathbf{v} = [\mathbf{v}(n), \dots, \mathbf{v}(3), \mathbf{v}(1) + \mathbf{v}(2), \mathbf{v}(3), \dots, \mathbf{v}(n)]^T$). Zauważmy, że jeśli $\mathbf{v} \in U$ i $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_{[1,n]}$, to $\hat{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0}_{[1,2n-3]}$. Bezpośrednim rachunkiem można sprawdzić, że jeśli $A_{\mathbb{D}_n} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$ dla pewnych $\lambda \in \mathbb{C}$ i $\mathbf{v} \in U$, to $A_{P_{2n-4}} \cdot \hat{\mathbf{v}} = \lambda \cdot \hat{\mathbf{v}}$. Ze Stwierdzenia 2.2.10 wynika zatem, że jeśli λ jest wartością własną grafu $\mathbb{D}_n$, to $\lambda = 2 \cdot \cos(\frac{m}{2n-2} \cdot \pi)$ dla pewnego $m \in [1, 2n-3]$. Zauważmy jednak, że jeśli $m \in [1, n-2]$, to nie istnieje wektor własny $\mathbf{w}$ grafu P_{2n-4} odpowiadający wartości własnej $2 \cdot \cos(\frac{m}{n-1} \cdot \pi)$ taki, że $\mathbf{w}(1) = \mathbf{w}(2n-3)$. Ponieważ wszystkie wartości własne grafu P_{2n-4} są jednokrotne, więc otrzymujemy stąd, że szukanymi wartościami własnymi grafu $\mathbb{D}_n$ są liczby $2 \cdot \cos(\frac{2m-1}{2n-2} \cdot \pi)$ dla $m \in [1, n-1]$. $\square$

Bezpośrednimi rachunkami (lub metodą podobną do dowodu Stwierdzenia 2.6.11) można pokazać, że grafy $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$ i $\mathbb{E}_8$ mają następujące spektra:

$$\begin{aligned} \text{Spec } \mathbb{E}_6 &= \left(\underset{1}{2 \cdot \cos(\frac{11}{12} \cdot \pi)} \underset{1}{2 \cdot \cos(\frac{8}{12} \cdot \pi)} \underset{1}{2 \cdot \cos(\frac{7}{12} \cdot \pi)} \underset{1}{2 \cdot \cos(\frac{5}{12} \cdot \pi)} \underset{1}{2 \cdot \cos(\frac{4}{12} \cdot \pi)} \underset{1}{2 \cdot \cos(\frac{1}{12} \cdot \pi)} \right), \\ \text{Spec } \mathbb{E}_7 &= \left(\underset{1}{2 \cdot \cos(\frac{17}{18} \cdot \pi)} \underset{1}{2 \cdot \cos(\frac{13}{18} \cdot \pi)} \underset{1}{2 \cdot \cos(\frac{11}{18} \cdot \pi)} \underset{1}{2 \cdot \cos(\frac{9}{18} \cdot \pi)} \underset{1}{2 \cdot \cos(\frac{7}{18} \cdot \pi)} \underset{1}{2 \cdot \cos(\frac{5}{18} \cdot \pi)} \underset{1}{2 \cdot \cos(\frac{1}{18} \cdot \pi)} \right), \end{aligned}$$

i

$$\text{Spec } \mathbb{E}_8 = \left(\underset{1}{2 \cdot \cos(\frac{29}{30} \cdot \pi)} \underset{1}{2 \cdot \cos(\frac{23}{30} \cdot \pi)} \underset{1}{2 \cdot \cos(\frac{19}{30} \cdot \pi)} \underset{1}{2 \cdot \cos(\frac{17}{30} \cdot \pi)} \underset{1}{2 \cdot \cos(\frac{13}{30} \cdot \pi)} \underset{1}{2 \cdot \cos(\frac{11}{30} \cdot \pi)} \underset{1}{2 \cdot \cos(\frac{7}{30} \cdot \pi)} \underset{1}{2 \cdot \cos(\frac{1}{30} \cdot \pi)} \right).$$

W szczególności,

$$\Lambda_{\mathbb{E}_6} = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \quad \Lambda_{\mathbb{E}_7} = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{18}\right) \quad \text{i} \quad \Lambda_{\mathbb{E}_8} = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{30}\right).$$

Aby uniknąć prezentowania tych rachunków, w dalszej części nie będziemy korzystać z tych informacji.

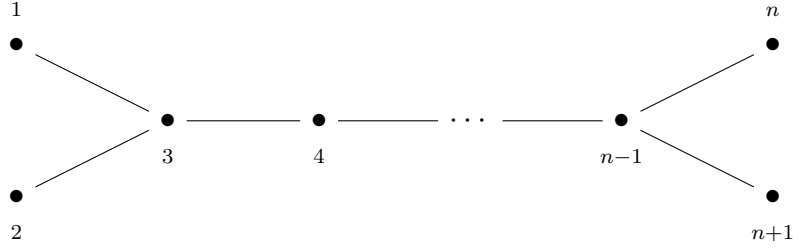
Oprócz grafów Dynkina ważną rolę w naszych rozważaniach będą również odgrywać rozszerzone grafy Dynkina, zwane też grafami Euklidesa. Jeśli $n \geq 1$ jest liczbą całkowitą, to przez $\tilde{\mathbb{A}}_n$ oznaczamy graf C_{n+1} . Jeśli $n \geq 4$ jest liczbą całkowitą, to przez $\tilde{\mathbb{D}}_n$ oznaczamy graf zdefiniowany wzorami:

$$\begin{aligned} V_{\tilde{\mathbb{D}}_n} &:= [1, n+1], \\ E_{\tilde{\mathbb{D}}_n} &:= \{\{1, 3\}\} \cup \{\{p, p+1\} : p \in [2, n-1]\} \cup \{\{n-1, n+1\}\}, \end{aligned}$$

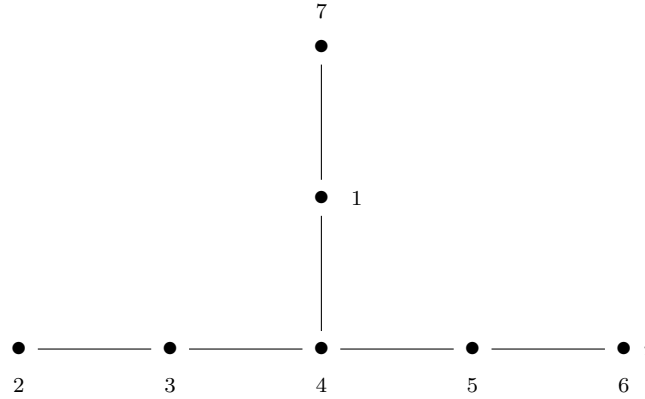
i

$$p_{\tilde{\mathbb{D}}_n}(e) := e \quad (e \in E_{\tilde{\mathbb{D}}_n}).$$

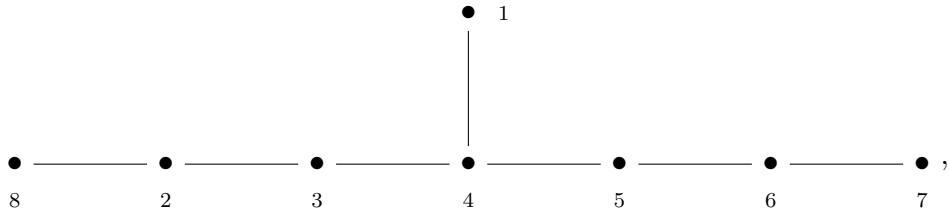
W postaci graficznej graf $\tilde{\mathbb{D}}_n$ można przedstawić w następująco:



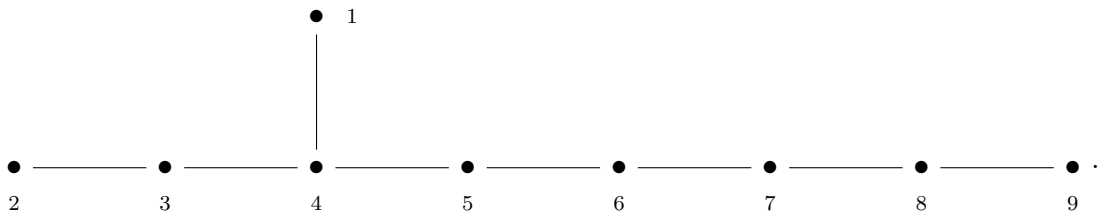
Wreszcie, przez $\tilde{\mathbb{E}}_6$ i $\tilde{\mathbb{E}}_7$ oznaczamy następujące grafy



i



odpowiednio. Ponadto przez $\tilde{\mathbb{E}}_8$ oznaczamy graf $\mathbb{E}_9$, tzn. graf



Grafy $\tilde{\mathbb{A}}_n$, $n \geq 1$, $\tilde{\mathbb{D}}_n$, $n \geq 4$, oraz $\tilde{\mathbb{E}}_6$, $\tilde{\mathbb{E}}_7$ i $\tilde{\mathbb{E}}_8$ nazywamy *rozszerzonymi grafami Dynkina*. Zauważmy, że każdy z tych grafów powstaje przez dodanie nowego wierzchołka (oraz krawędzi) do odpowiedniego grafu Dynkina.

Będziemy chcieli teraz pokazać, że $\Lambda_G = 2$ dla każdego rozszerzonych grafu Dynkina G . Spektrum grafu $\tilde{\mathbb{A}}_n$, dla $n \geq 1$, opisaliśmy w Stwierdzeniu 2.2.8. W szczególności, wiemy, że $\Lambda_{\tilde{\mathbb{A}}_n} = 2$. Opiszemy teraz spektrum grafu $\mathbb{D}_n$, $n \geq 4$. Analogicznie do dowodu 2.6.11 w istotny sposób skorzystamy skorzystamy ze znajomości spektrum cyklu.

Stwierdzenie 2.6.12. *Jeśli $n \geq 4$ jest liczbą całkowitą, to*

$$P_{\mathbb{D}_n} = t^2 \cdot \prod_{m=0}^{n-2} \left(t - 2 \cdot \cos\left(\frac{m}{n-2} \cdot \pi\right) \right).$$

W szczególności, $\Lambda_{\mathbb{D}_n} = 2$.

Dowód. Zauważmy, że $A_{\mathbb{D}_n} \cdot (\mathbf{1}_1 - \mathbf{1}_2) = \mathbf{0}_{[1, n+1]}$. Podobnie, $A_{\mathbb{D}_n} \cdot (\mathbf{1}_n - \mathbf{1}_{n+1}) = \mathbf{0}_{[1, n+1]}$. Dla zakończenia dowodu wystarczy zatem znaleźć wartości własne odpowiadające wektorom należącym do podprzestrzeni U danej wzorem

$$U := \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n : \mathbf{v}(1) = \mathbf{v}(2) \text{ i } \mathbf{v}(n) = \mathbf{v}(n+1)\}.$$

Dla wektora $\mathbf{v} \in U$ definiujemy wektor $\hat{\mathbf{v}} \in \mathbb{C}^{2 \cdot n - 4}$ wzorem:

$$\hat{\mathbf{v}}(p) := \begin{cases} \mathbf{v}(1) + \mathbf{v}(2) & \text{jeśli } p = 1, \\ \mathbf{v}(p-1) & \text{jeśli } p \in [2, n-2], \\ \mathbf{v}(n) + \mathbf{v}(n+1) & \text{jeśli } p = n-1, \\ \mathbf{v}(2 \cdot n - 1 - p) & \text{jeśli } p \in [n, 2 \cdot n - 4], \end{cases}$$

(tzn. $\mathbf{v} = [\mathbf{v}(1) + \mathbf{v}(2), \mathbf{v}(3), \dots, \mathbf{v}(n-1), \mathbf{v}(n) + \mathbf{v}(n+1), \mathbf{v}(n-1), \dots, \mathbf{v}(3)]^T$). Zauważmy, że jeśli $\mathbf{v} \in U$ i $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_{[1, n+1]}$, to $\hat{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0}_{[1, 2 \cdot n - 4]}$. Bezpośrednim rachunkiem można sprawdzić, że jeśli $A_{\mathbb{D}_n} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$ dla pewnych $\lambda \in \mathbb{C}$ i $\mathbf{v} \in U$, to $A_{C_{2 \cdot n - 4}} \cdot \hat{\mathbf{v}} = \lambda \cdot \hat{\mathbf{v}}$. Ze Stwierdzenia 2.2.8 wynika zatem, że jeśli λ jest wartością własną grafu $\mathbb{D}_n$, to $\lambda = 2 \cdot \cos(\frac{m}{n-2} \cdot \pi)$ dla pewnego $m \in [0, n-2]$. Zauważmy ponadto, że jeśli $m \in [0, n-2]$, to podprzestrzeń przestrzeni wektorów własnych odpowiadających wartości własnej $2 \cdot \cos(\frac{m}{n-2} \cdot \pi)$ złożona z wektorów $\mathbf{w}$ takich, że $\mathbf{w}(2) = \mathbf{v}(2 \cdot n - 4)$ jest jednowymiarowa. Stąd natychmiast wynika teza. $\square$

Podobnie jak w przypadku grafów Dynkina $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$ i $\mathbb{E}_8$, spektra grafów $\tilde{\mathbb{E}}_6$, $\tilde{\mathbb{E}}_7$ i $\tilde{\mathbb{E}}_8$ przedstawimy bez dowodu. Mamy

$$\begin{aligned} \text{Spec } \tilde{\mathbb{E}}_6 &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{Spec } \tilde{\mathbb{E}}_7 &= \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} & -1 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i

$$\text{Spec } \tilde{\mathbb{E}}_8 = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{\sqrt{5}+1}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 1 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

W szczególności,

$$\Lambda_{\tilde{\mathbb{E}}_6} = \Lambda_{\tilde{\mathbb{E}}_7} = \Lambda_{\tilde{\mathbb{E}}_8} = 2.$$

Ostatnia równość będzie nam potrzebna, więc udowodnimy ją bezpośrednio.

Stwierdzenie 2.6.13. *Jeśli $n \in \{6, 7, 8\}$, to*

$$\Lambda_{\tilde{\mathbb{E}}_n} = 2.$$

Dowód. Ponieważ graf $\tilde{\mathbb{E}}_n$ jest spójny, więc, korzystając z Twierdzenia 2.3.3, wystarczy znaleźć wektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ taki, że

$$A_{\tilde{\mathbb{E}}_n} \cdot \mathbf{v} = 2 \cdot \mathbf{v}$$

oraz $\mathbf{v}(p) > 0$ dla każdego $p \in [1, n+1]$. Rozwiązując odpowiednie układy równań, łatwo wyliczyć, że możemy wziąć wektor postaci:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{gdy } p = 6),$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{gdy } p = 7),$$

i

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{gdy } p = 8)$$

(położenie liczby sugeruje, któremu wierzchołkowi rozważanego grafu odpowiada dana współrzędna). $\square$

Zauważmy, że w podobny sposób można by udowodnić, że $\Lambda_{\tilde{\mathbb{A}}_n} = 2$ ($n \geq 1$) oraz $\Lambda_{\tilde{\mathbb{D}}_n} = 2$ ($n \geq 4$) – stosowane wektory są postaci

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & 1 \\ & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & \\ 1 & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Możemy teraz przedstawić zapowiadaną klasyfikację grafów o promieniu spektralnym nie większym niż 2.

Twierdzenie 2.6.14. *Niech G będzie grafem spójnym.*

- (1) *G jest grafem Dynkina wtedy i tylko wtedy, gdy $\Lambda_G < 2$.*
- (2) *G jest rozszerzonym grafem Dynkina wtedy i tylko wtedy, gdy $\Lambda_G = 2$.*

Dowód. Korzystając ze Stwierżeń 2.2.8, 2.6.12 oraz 2.6.13, wiemy, że jeśli G jest rozszerzonym grafem Dynkina, to $\Lambda_G = 2$. Co więcej, jeśli G jest grafem Dynkina, to istnieje rozszerzony graf Dynkina H , którego graf G jest podgrafem. Stąd $\Lambda_G < \Lambda_H = 2$ na mocy Twierdzenia 2.6.1. Dla zakończenia dowodu wystarczy zatem pokazać, że jeśli graf G nie jest grafem Dynkina ani rozszerzonym grafem Dynkina, to $\Lambda_G > 2$.

Założmy zatem, że graf G nie jest grafem Dynkina ani rozszerzonym grafem Dynkina. Jeśli graf G nie jest drzewem, to istnieje podgraf H grafu G , który jest cyklem. Z Twierdzenia 2.6.1 wynika zatem, że $\Lambda_G > \Lambda_H = 2$. W przeciwnym wypadku, można uzasadnić, że graf G zawiera podgraf H , który jest izomorficznym z jednym z grafów $\tilde{\mathbb{D}}_n$, $n \geq 4$, lub $\tilde{\mathbb{E}}_6$, $\tilde{\mathbb{E}}_7$ lub $\tilde{\mathbb{E}}_8$. Podobnie jak poprzednio otrzymujemy zatem, że $\Lambda_G > \Lambda_H = 2$. $\square$

Rozdział 3

Grafy silnie regularne

Celem tego rozdziału jest przedstawienie podstawowych informacji o grafach silnie regularnych.

3.1 Parametry

Przypomnijmy, że graf nieskierowany G nazywamy k -regularnym, gdzie k jest nieujemną liczbą całkowitą, jeśli $\deg v = k$ dla każdego wierzchołka v grafu G . Jeśli n , k , a i c są nieujemnymi liczbami całkowitymi takimi, że $0 < k < n - 1$, to prosty graf nieskierowany G bez pętli nazywamy *silnie regularnym z parametrami* (n, k, a, c) , jeśli spełnione są następujące warunki:

- (1) graf G ma n wierzchołków,
- (2) graf G jest k -regularny,
- (3) dla dowolnych dwóch sąsiednich wierzchołków u i w grafu G zbiór $N_G(u) \cap N_G(w)$ ma dokładnie a elementów,
- (4) dla dowolnych dwóch niesąsiednich wierzchołków u i w grafu G zbiór $N_G(u) \cap N_G(w)$ ma dokładnie c elementów.

Nierówności $0 < k < n - 1$ oznaczają, że graf silnie regularny nie może być ani pusty ani pełny. W istocie grafy proste i pełne można by traktować jako grafy silnie regularne, jednakże w ich przypadku nie można jednoznacznie wyznaczyć jednego z parametrów (parametru a w przypadku grafów pustych oraz parametru c w przypadku grafów pełnych). Z tego powodu zakładamy, że grafy puste i pełne nie są silnie regularne.

Graf C_4 i C_5 są silnie regularne. Ich parametry wynoszą $(4, 2, 0, 2)$ oraz $(5, 2, 0, 1)$, odpowiednio. Przykład rodziny grafów silnie regularnych tworzą

grafy $K_{n,n}$, gdzie $n > 1$ jest liczbą całkowitą – ich parametry wynoszą $(2 \cdot n, n, 0, n)$, odpowiednio.

Parametry grafu regularnego nie mogą być dowolne. Pierwsze ograniczenie narzuca następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 3.1.1. *Jeśli G jest grafem silnie regularnym z parametrami (n, k, a, c) , to*

$$k \cdot (k - a - 1) = (n - k - 1) \cdot c.$$

Dowód. Wybierzmy wierzchołek v grafu G . Na dwa sposoby policzymy liczbę par (u, w) takich, że u jest sąsiadem wierzchołka v w grafie G , zaś w jest sąsiadem wierzchołka u , który nie jest sąsiadem wierzchołka v . Z jednej strony wierzchołek u możemy wybrać na k sposobów. Ponadto, przy ustalonym wyborze wierzchołka u wierzchołek w możemy wybrać na $k - a - 1$ sposobów (spośród k sąsiadów wierzchołka u musimy odrzucić wierzchołek v oraz a wspólnych sąsiadów wierzchołków u i v). Z drugiej strony, wierzchołek w może być wybrany na $n - k - 1$ sposobów, a następnie, przy ustalonym wyborze wierzchołka w , wierzchołek u możemy wybrać na c sposobów. $\square$

Grafy silnie regularne w naturalny sposób tworzą pary, gdyż jeśli graf G jest silnie regularny, to jego dopełnienie jest również grafem silnie regularnym. Dokładniej, mamy następujący fakt.

Stwierdzenie 3.1.2. *Jeśli G jest grafem silnie regularnym z parametrami (n, k, a, c) , to graf $\overline{G}$ jest silnie regularny z parametrami $(n, \overline{k}, \overline{a}, \overline{c})$, gdzie*

$$\overline{k} := n - k - 1, \quad \overline{a} := n - 2 \cdot k + c - 2 \quad i \quad \overline{c} := n - 2 \cdot k + a.$$

Dowód. Z definicji graf $\overline{G}$ jest prosty oraz nie ma pętli. Ponieważ graf G nie jest pełny, więc graf G nie jest pusty. Podobnie, ponieważ graf G nie jest pełny, więc graf $\overline{G}$ nie jest pusty. Ponadto jest jasne, że graf $\overline{G}$ ma n wierzchołków oraz jest $(n - k - 1)$ -regularny.

Ustalmy teraz dwa sąsiednie wierzchołki u i w grafu $\overline{G}$. Wtedy wierzchołki u i w nie są sąsiednie w grafie G , zatem $|N_G(u) \cap N_G(w)| = c$. Korzystając z praw de Morgana, wiemy, że

$$\begin{aligned} N_{\overline{G}}(u) \cap N_{\overline{G}}(w) &= (V_G \setminus (\{u\} \cup N_G(u))) \cap (V_G \setminus (\{w\} \cup N_G(w))) \\ &= V_G \setminus (\{u, w\} \cup N_G(u) \cup N_G(w)). \end{aligned}$$

Ponieważ $u, w \notin N_G(u) \cup N_G(w)$, więc otrzymujemy stąd, że

$$|N_{\overline{G}}(u) \cap N_{\overline{G}}(w)| = n - 2 - |N_G(u) \cup N_G(w)|.$$

Ze wzoru włączeń i wyłączeń wynika, że

$$|N_G(u) \cup N_G(w)| = |N_G(u)| + |N_G(w)| - |N_G(u) \cap N_G(w)| = 2 \cdot k - c,$$

zatem

$$|N_{\overline{G}}(u) \cap N_{\overline{G}}(w)| = n - 2 \cdot k + c - 2.$$

Podobnie pokazujemy, że jeśli u i w są dwoma niesąsiednimi wierzchołkami grafu $\overline{G}$, to

$$|N_{\overline{G}}(u) \cap N_{\overline{G}}(w)| = n - 2 \cdot k + a$$

(zauważmy, że w tym wypadku $u, w \in N_G(u) \cup N_G(w)$). $\square$

Zwykle w naszych rozważaniach będziemy koncentrować się na spójnych grafach silnie regularnych. Jak pokazuje następujące twierdzenie, niespójne grafy silnie regularne są szczególnej postaci.

Twierdzenie 3.1.3. *Jeśli G jest grafem silnie regularnym z parametrami (n, k, a, c) , to następujące warunki są równoważne:*

- (1) *Graf G nie jest spójny.*
- (2) *$c = 0$.*
- (3) *$a = k - 1$.*
- (4) *Istnieją grafy $G_1, \dots, G_m$, $m > 1$, takie, że $G = G_1 \sqcup \dots \sqcup G_m$, gdzie $G_i \simeq K_{k+1}$ dla każdego $i \in [1, m]$.*

Dowód. (1) $\implies$ (2): Jeśli graf G nie jest spójny, to istnieją wierzchołki u i w grafu G , które nie są sąsiednie i które nie mają wspólnych sąsiadów. Stąd $c = 0$.

(2) $\implies$ (3): Jeśli $c = 0$, to ze Stwierdzenia 3.1.1 wynika, że $k = 0$ lub $a = k - 1$. Pierwszy przypadek nie może zachodzić na mocy definicji grafu silnie regularnego, więc $a = k - 1$.

(3) $\implies$ (2): Jeśli $a = k - 1$, to ze Stwierdzenia 3.1.1 wynika, że $k = n - 1$ lub $c = 0$. Pierwszy przypadek nie może zachodzić na mocy definicji grafu silnie regularnego, więc $c = 0$.

(2), (3) $\implies$ (4): Załóżmy, że $c = 0$ i $a = k - 1$. Niech $G_1, \dots, G_m$ będą składowymi spójnościami grafu G . Ustalmy $i \in [1, m]$ oraz wybierzmy wierzchołek $v \in V_{G_i}$. Jeśli $u, w \in N_G(v)$, to $N_G(u) \cap N_G(w) \neq \emptyset$ (gdyż $v \in N_G(u) \cap N_G(w)$). Zatem wierzchołki u i w muszą być sąsiednie, gdyż $c = 0$. Zatem $\langle \{v\} \cup N_G(v) \rangle_G \simeq K_{k+1}$. Ponieważ każdy wierzchołek w grafie G ma dokładnie k różnych sąsiadów, więc graf $\langle \{v\} \cup N_G(v) \rangle_G$ jest składową spójnością grafu G , a więc $G_i \simeq K_{k+1}$. Z definicji grafu silnie regularnego wynika, że $m > 1$.

(4) $\implies$ (1): Oczywiście, gdyż $m > 1$. $\square$

Jako wniosek otrzymujemy analogiczną charakteryzację grafów silnie regularnych, które są dopełnieniami grafów niespójnych grafów silnie regularnych.

Wniosek 3.1.4. *Jeśli G jest grafem silnie regularnym z parametrami (n, k, a, c) , to następujące warunki są równoważne:*

(1) *Graf $\overline{G}$ nie jest spójny.*

(2) $a = 2 \cdot k - n$.

(3) $c = k$. □

Spójny graf silnie regularny G taki, że graf $\overline{G}$ jest również spójny, nazywamy *prymitywnym*. Z Twierdzenia 3.1.3 i Wniosku 3.1.4 otrzymujemy następującą charakteryzację prymitywnych grafów silnie regularnych.

Wniosek 3.1.5. *Graf silnie regularny z parametrami (n, k, a, c) jest prymitywny wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < c < k$.* □

Jako wniosek zauważmy, że prymitywne grafy silnie regularne muszą mieć co najmniej pięć wierzchołków.

Wniosek 3.1.6. *Jeśli G jest prymitywnym grafem silnie regularnym, to $|V_G| > 4$.*

Dowód. Przypuśćmy, że G jest prymitywnym grafem silnie regularnym z parametrami (n, k, a, c) takim, że $n \leq 4$. Wtedy $k < n - 1 \leq 3$ oraz, na mocy Wniosku 3.1.5, $0 < c < k$. Ostatecznie, $c = 1$, $k = 2$ i $n = 4$. Wtedy Stwierdzenie 3.1.1 implikuje, że

$$2 \cdot (1 - a) = 1,$$

co jest niemożliwe, gdyż a jest liczbą całkowitą. □

Inną konsekwencją jest następująca obserwacja.

Wniosek 3.1.7. *Jeśli G grafem silnie regularnym z parametrami (n, k, a, c) takim, że $\gcd(k, n - k - 1) = 1$, to graf G nie jest prymitywny.*

Dowód. Ze Stwierdzenia 3.1.1 wiemy, że

$$k \mid (n - k - 1) \cdot c.$$

Ponieważ $\gcd(k, n - k - 1) = 1$, więc $k \mid c$, zatem teza wynika z Wniosku 3.1.5. □

Zauważmy, że jeśli $n > 1$, to graf $K_{n,n}$ nie jest prymitywnym grafem silnie regularnym – jego dopełnienie ma dwie składowe spójności. Przykładem prymitywnego grafu silnie regularnego jest graf C_5 – jest on izomorficzny ze swoim dopełnieniem. Następujące stwierdzenie dostarcza przykładów rodzin prymitywnych grafów silnie regularnych.

Stwierdzenie 3.1.8. *Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą.*

- (1) *Jeśli $n \geq 4$, to graf $L(K_n)$ jest grafem silnie regularnym z parametrami $(\frac{n \cdot (n-1)}{2}, 2 \cdot n - 4, n - 2, 4)$.*
- (2) *Jeśli $n \geq 2$, to graf $L(K_{n,n})$ jest grafem silnie regularnym z parametrami $(n^2, 2 \cdot n - 2, n - 2, 2)$.*

Zauważmy, że graf $L(K_n)$ jest prymitywnym grafem silnie regularnym wtedy i tylko wtedy, gdy $n \geq 5$. Podobnie, graf $L(K_{n,n})$ jest prymitywnym grafem silnie regularnym wtedy i tylko wtedy, gdy $n \geq 3$.

Dowód. (1) Wiadomo, że $|E_{K_n}| = \binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$. Ponieważ graf K_n jest $(n-1)$ -regularny, więc graf $L(K_n)$ jest $(2 \cdot (n-1))$ -regularny na mocy Stwierdzenia 1.2.6.

Ustalmy teraz dwie różne incydentne krawędzie e i f grafu G . Wtedy $e = \{k, i\}$ i $f = \{k, j\}$ dla pewnych parami różnych liczb $i, j, k \in [1, n]$. Krawędzie, które są incydentne zarówno z krawędzią e jak i f są postaci: $\{k, l\}$, $l \in [1, n] \setminus \{i, j, k\}$, oraz $\{i, j\}$. Jest więc ich zatem $(n-3) + 1 = n-2$.

Podobnie, ustalmy dwie różne krawędzie e i f grafu G , które nie są incydentne. Wtedy $e = \{i, j\}$ i $f = \{k, l\}$ dla parami różnych liczb $i, j, k, l \in [1, n]$. Krawędzie, które są incydentne zarówno z krawędzią e jak i f są postaci: $\{i, k\}$, $\{i, l\}$, $\{j, k\}$, $\{j, l\}$.

(2) Analogicznie. □

3.2 Wartości własne

W tym podrozdziale opiszemy spektrum grafów silnie regularnych. Rozpocznijmy od prostej obserwacji dotyczącej spektrum grafów silnie regularnych, które nie są spójne.

Stwierdzenie 3.2.1. *Jeśli G jest niespójnym grafem silnie regularnym z parametrami (n, k, a, c) , to*

$$\text{Spec } G = \begin{pmatrix} -1 & k \\ \frac{k \cdot n}{k+1} & \frac{n}{k+1} \end{pmatrix}.$$

Dowód. Z Twierdzenia 3.1.3 wiemy, że graf G jest sumą rozłączną grafów, które są izomorficzne z grafem K_{k+1} . Licząc liczbę wierzchołków, otrzymujemy, że graf G ma $\frac{n}{k+1}$ składowych, zatem teza wynika ze Stwierdzeń 2.2.2 i 2.1.5. $\square$

W dalszym ciągu będziemy się zatem koncentrować na spójnych grafach silnie regularnych. Rozpocznijmy od następującej obserwacji.

Lemat 3.2.2. *Jeśli G jest grafem silnie regularnym z parametrami (n, k, a, c) , to*

$$A_G^2 - (a - c) \cdot A_G - (k - c) \cdot I_{V_G} = c \cdot J_{V_G \times V_G}.$$

Dowód. Zauważmy, że jeśli u i w są wierzchołkami grafu G , to $A_G^2(u, w)$ jest równe liczbie u - w -dróg długości 2 w grafie G . Stąd

$$A_G^2(u, w) = \begin{cases} k & \text{jeśli } u = w, \\ a & \text{jeśli } A_G(u, w) \neq 0, \\ c & \text{jeśli } u \neq w \text{ i } A_G(u, w) = 0, \end{cases}$$

dla dowolnych wierzchołków $u, w \in V_G$. Powyższy wzór oznacza, że

$$A_G^2 = k \cdot I_{V_G} + a \cdot A_G + c \cdot (J_{V_G \times V_G} - I_{V_G} - A_G),$$

co kończy dowód. $\square$

Powyższą obserwację można odwrócić.

Stwierdzenie 3.2.3. *Niech G będzie prostym grafem nieskierowanym bez pętli, który nie jest pełny ani pusty. Wtedy graf G jest silnie regularny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby rzeczywiste λ, μ i ν takie, że*

$$A_G^2 - \mu \cdot A_G - \nu \cdot I_{V_G} = \lambda \cdot J_{V_G \times V_G}.$$

Ponadto, w powyższej sytuacji parametry grafu G są równe

$$(|V_G|, \nu + \lambda, \mu + \lambda, \lambda).$$

Dowód. Wobec Lematu 3.2.2 wystarczy udowodnić, że jeśli

$$A_G^2 = \mu \cdot A_G + \nu \cdot I_{V_G} + \lambda \cdot J_{V_G \times V_G}$$

dla pewnych liczb rzeczywistych λ, μ i ν , to graf G jest silnie regularny z parametrami $(|V_G|, \nu + \lambda, \mu + \lambda, \lambda)$. Istotnie, jeśli v jest wierzchołkiem grafu G , to $\deg_G v = A_G^2(v, v) = \nu + \lambda$ (ponieważ graf G nie ma pętli, więc $A_G(v, v) = 0$). Podobnie, jeśli u i w są sąsiednimi wierzchołkami grafu G (a

więc $A_G(u, w) = 1$), to liczba wspólnych sąsiadów wierzchołków u i w jest równa liczbie u - w -dróg długości 2 w grafie G , a więc wynosi $A_G^2(u, w) = \mu + \lambda$ ($I_{V_G}(u, w) = 0$, gdyż $u \neq w$). Wreszcie, jeśli u i w są dwoma wierzchołkami grafu G , które nie są sąsiednie (a więc $A_G(u, w) = 0 = I_{V_G}(u, w)$), to ponownie liczba wspólnych sąsiadów wierzchołków u i w jest równa liczbie u - w -dróg długości 2 w grafie G , a więc wynosi $A_G^2(u, w) = \lambda$. $\square$

Zgodnie z zapowiedzią opiszemy teraz spektrum spójnych grafów silnie regularnych.

Stwierdzenie 3.2.4. *Jeśli G jest spójnym grafem silnie regularnym z parametrami (n, k, a, c) , to*

$$\text{Spec } G = \begin{pmatrix} \tau & \theta & k \\ m_\tau & m_\theta & 1 \end{pmatrix},$$

gdzie

$$\begin{aligned} \tau &:= \frac{(a-c) - \sqrt{\Delta}}{2}, & \theta &:= \frac{(a-c) + \sqrt{\Delta}}{2}, \\ m_\tau &:= \frac{(n-1) \cdot \theta + k}{\theta - \tau} = \frac{1}{2} \cdot \left((n-1) + \frac{2 \cdot k + (n-1) \cdot (a-c)}{\sqrt{\Delta}} \right) \end{aligned}$$

i

$$m_\theta := \frac{(n-1) \cdot \tau + k}{\tau - \theta} = \frac{1}{2} \cdot \left((n-1) - \frac{2 \cdot k + (n-1) \cdot (a-c)}{\sqrt{\Delta}} \right)$$

oraz

$$\Delta := (a-c)^2 + 4 \cdot (k-c).$$

Zauważmy, że Stwierdzenie 3.2.1 możemy traktować jako szczególny przypadek Stwierdzenia 3.2.4. Istotnie, jeśli silnie regularny graf G z parametrami (n, k, a, c) nie jest spójny, to $a = k - 1$ i $c = 0$ na mocy Twierdzenia 3.1.3, więc prosty rachunek pokazuje, że wtedy

$$\tau = -1, \quad \theta = k,$$

oraz

$$m_\tau = \frac{k \cdot n}{k+1} \quad \text{i} \quad m_\theta = \frac{n-k-1}{k+1}.$$

Zauważmy w szczególności, że graf silnie regularny jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy ma dokładnie 3 parami różne wartości własne.

Dowód. Ponieważ graf G jest spójny i k -regularny, więc z Twierdzenia 2.2.3 wynika, że liczba k jest jednokrotną wartością własną grafu G , której odpowiada wektor własny $\mathbf{1}_{V_G}$. Ustalmy wartość własną λ grafu G różną do k i odpowiadający jej wektor własny $\mathbf{v}$. Ponieważ $\lambda \neq k$, więc $\mathbf{1}_{V_G}^T \cdot \mathbf{v} = 0$.

Z Lematu 3.2.2 wiemy, że

$$A_G^2 - (a - c) \cdot A_G - (k - c) \cdot I_{V_G} = c \cdot J_{V_G \times V_G}.$$

Ponieważ $A_G \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$ i $J_{V_G \times V_G} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}_{V_G}$ (gdyż $\mathbf{1}_{V_G}^T \cdot \mathbf{v} = 0$), więc mnożąc powyższą równość przez wektor $\mathbf{v}$, otrzymujemy, że

$$(\lambda^2 - (a - c) \cdot \lambda - (k - c)) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}_{V_G}.$$

Ponieważ $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_{V_G}$, więc

$$\lambda^2 - (a - c) \cdot \lambda - (k - c) = 0,$$

skąd natychmiast wynika, że $\lambda = \tau$ lub $\lambda = \theta$. Aby pokazać, że $\tau \neq \theta$, trzeba pokazać, że $\Delta \neq 0$. Mamy jednak, że $\Delta = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c = k$, co jest niemożliwe, gdyż $a < k$.

Pozostaje nam wyznaczyć krotności m_τ i m_θ liczb τ i θ jako pierwiastków grafu G . Ponieważ k jest pierwiastkiem jednokrotnym grafu k , więc

$$1 + m_\tau + m_\theta = n.$$

Ponadto, ze Stwierdzenia 2.1.6 wiemy, że

$$k + m_\tau \cdot \tau + m_\theta \cdot \theta = 0.$$

Rozwiązując otrzymany układ równań, otrzymujemy, że

$$m_\tau = \frac{(n-1) \cdot \theta + k}{\theta - \tau} \quad \text{i} \quad m_\theta = \frac{-(n-1) \cdot \tau - k}{\theta - \tau}.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2} \cdot ((\theta + \tau) + (\theta - \tau)), & -\tau &= \frac{1}{2} \cdot (-(\theta + \tau) + (\theta - \tau)), \\ \theta + \tau &= a - c & \text{i} \quad \theta - \tau &= \sqrt{\Delta}, \end{aligned}$$

więc otrzymujemy odpowiednie wzory na m_τ i m_θ .

Dla zakończenia dowodu należałoby pokazać, że $m_\tau \neq 0 \neq m_\theta$, to jednak będzie wynikało z Lematu 3.2.5, który udowodnimy poniżej. $\square$

Stwierdzenie 3.2.4 pozwala dokonywać wstępnej selekcji parametrów, dla których może istnieć spójny graf silnie regularny. Dokładniej, jeśli, dla danej czwórki (n, k, a, c) , liczby m_τ i m_θ wyliczone zgodnie z powyższymi wzorami nie są dodatnie i całkowite, to nie może istnieć spójny graf regularny o parametrach (n, k, a, c) . Obserwację tę wykorzystamy w podrozdziale 3.5.

Poniższy fakt, który kończy dowód Stwierdzenia 3.2.4, będzie też nam potrzebny później.

Lemat 3.2.5. *Jeśli G jest grafem silnie regularnym z parametrami (n, k, a, c) , to*

$$m_\tau \cdot m_\theta = \frac{n \cdot k \cdot (n - k - 1)}{(\theta - \tau)^2},$$

gdzie τ , θ , m_τ i m_θ są zdefiniowane w Stwierdzeniu 3.2.4.

Dowód. Mamy

$$m_\tau \cdot m_\theta = \frac{1}{4} \cdot \left((n-1)^2 - \frac{(2 \cdot k + (n-1) \cdot (a-c))^2}{\Delta} \right).$$

Przypomnijmy, że

$$\Delta = (a-c)^2 + 4 \cdot (k-c) = (\theta - \tau)^2,$$

więc otrzymujemy, że

$$m_\tau \cdot m_\theta = \frac{1}{(\theta - \tau)^2} \cdot ((n-1)^2 \cdot (k-c) - k^2 - k \cdot (n-1) \cdot (a-c)).$$

Rozpisując, mamy

$$(3.1) \quad m_\tau \cdot m_\theta = \frac{1}{(\theta - \tau)^2} \cdot (n^2 \cdot k - n^2 \cdot c - 2 \cdot n \cdot k + 2 \cdot n \cdot c + k - c - k^2 - n \cdot k \cdot a + n \cdot k \cdot c + k \cdot a - k \cdot c).$$

Korzystając ze Stwierdzenia 3.1.1, wiemy, że

$$(3.2) \quad n \cdot c - k \cdot c - c = k^2 - k \cdot a - k.$$

W konsekwencji,

$$(3.3) \quad n^2 \cdot c - n \cdot k \cdot c - n \cdot c = n \cdot k^2 - n \cdot k \cdot a - n \cdot k.$$

Podstawiając wzory (3.2) i (3.3) do równania 3.1, otrzymujemy tezę. $\square$

Jako pierwszą konsekwencję Stwierdzenia 3.2.4 zanotujmy informację o znakach wartości własnych spójnych grafów silnie regularnych.

Wniosek 3.2.6. *Niech G będzie spójnym grafem silnie regularnym z parametrami (n, k, a, c) i wartościami własnymi $\tau < \theta < k$. Wtedy $\tau < 0 \leq \theta$. Ponadto, jeśli G jest prymitywnym grafem silnie regularnym wtedy i tylko wtedy, gdy $\theta > 0$.*

Dowód. Niech m_τ i m_θ będą krotnościami wartości własnych τ i θ , odpowiednio. Ponieważ

$$m_\tau \cdot \tau + m_\theta \cdot \theta + k = 0$$

na mocy Stwierdzenia 2.1.6, więc $\tau < 0$. Ponadto, ze Stwierdzenia 3.2.4 wynika, że

$$\tau \cdot \theta = c - k \leq 0,$$

więc $\theta \geq 0$. Powyższa nierówność implikuje również, że $\theta = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c = k$, co przy założeniu spójności grafu G jest równoważne jego prymitywności na mocy Wniosku 3.1.5 i Twierdzenia 3.1.3. $\square$

Ze Stwierdzenia 3.2.4 wiemy, że jeśli G jest spójnym grafem silnie regularnym, to graf G ma dokładnie trzy wartości własne. Poniższy lemat pokazuje, że powyższą obserwację można odwrócić.

Stwierdzenie 3.2.7. *Jeśli G jest spójnym nieskierowanym prostym grafem regularnym bez pętli o dokładnie trzech różnych wartościach własnych, to graf G jest silnie regularny.*

Dowód. Niech $n := |V_G|$ i założmy, że graf G jest k -regularny. Ponieważ graf G ma dokładnie trzy wartości własne, więc nie jest ani pusty ani pełny na mocy Stwierdzeń 2.2.1 i 2.2.2, odpowiednio. Z Twierdzenia 2.2.3 wiemy, że liczba k jest jednokrotną wartością własną grafu G , której odpowiada wektor własny $\mathbf{1}_{V_G}$. Niech τ i θ będą pozostałymi wartościami własnymi grafu G . Zdefiniujemy macierz M wzorem

$$M := \frac{1}{(k - \tau) \cdot (k - \theta)} \cdot (A_G - \tau \cdot I_{V_G}) \cdot (A_G - \theta \cdot I_{V_G}).$$

Zauważmy, że jeśli $A_G \cdot \mathbf{v} = \tau \cdot \mathbf{v}$ lub $A_G \cdot \mathbf{v} = \theta \cdot \mathbf{v}$, to $M \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}_{V_G}$. Stąd wynika, że $M \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}_{V_G}$ dla każdego wektora $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{V_G}$ takiego, że $\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{1}_{V_G} = 0$. W szczególności, istnieje wektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{V_G}$ taki, że $M \cdot \mathbf{1}_v = \mathbf{w}$ dla każdego wierzchołka $v \in V_G$. Z drugiej strony, $M \cdot \mathbf{1}_{V_G} = \mathbf{1}_{V_G}$, więc $\mathbf{w} = \frac{1}{n} \cdot \mathbf{1}_{V_G}$. Ostatecznie, $M = \frac{1}{n} \cdot J_{V_G \times V_G}$, zatem

$$A_G^2 - (\tau + \theta) \cdot A_G + \tau \cdot \theta \cdot I_{V_G} = \frac{(k - \tau) \cdot (k - \theta)}{n} \cdot J_{V_G \times V_G}$$

i teza wynika ze Stwierdzenia 3.2.3. $\square$

Założenie regularności w Stwierdzeniu 3.2.7 jest potrzebne — zgodnie ze Stwierdzeniem 2.2.6 pełny grafy dwudzielny $K_{p,q}$ ma dokładnie trzy wartości własne, ale nie jest regularny.

Zauważmy przy okazji, że graf pusty jest jedynym (z dokładnością do izomorfizmu) nieskierowanym grafem bez pętli, który ma dokładnie jedną wartość własną. Podobnie, stosując argumenty analogiczne do argumentów użytych w dowodzie Stwierdzenia 2.2.2, można pokazać, że grafy pełne są jedynymi (z dokładnością do izomorfizmu) nieskierowanymi grafami prostymi bez pętli, które mają dokładnie dwie wartości własne.

3.3 Inne własności grafów silnie regularnych

Niech q będzie potęgą liczby pierwszej. Przypomnijmy, że istnieje dokładnie jedno (z dokładnością do izomorfizmu) ciało $\mathbb{F}_q$ o q elementach. Wiadomo również, że grupa multiplikatywna $\mathbb{F}_q^*$ ciała $\mathbb{F}_q$ jest cykliczna. Załóżmy dodatkowo, że $q \equiv 1 \pmod{4}$. Przez $P(q)$ oznaczamy prosty graf nieskierowany, którego wierzchołkami są elementy ciała $\mathbb{F}_q$, a dwa wierzchołki są sąsiednie, jeśli ich różnica jest kwadratem niezerowego elementu ciała $\mathbb{F}_q$. Grafy tej postaci nazywamy *grafami Payleya*. Udowodnimy najpierw, że powyższa definicja jest poprawna.

Lemat 3.3.1. *Niech q będzie potęgą liczby pierwszej taką, że $q \equiv 1 \pmod{4}$. Jeśli $x, y \in \mathbb{F}_q$ i $x - y$ jest kwadratem niezerowego elementu ciała $\mathbb{F}_q$, to $y - x$ jest również kwadratem niezerowego elementu ciała $\mathbb{F}_q$.*

Dowód. Wybierzmy element $z \in \mathbb{F}_q$ taki, że $x - y = z^2$. Wybierzmy generator t grupy $\mathbb{F}_q^*$. Ponieważ $t^{q-1} = 1$, więc $t^{\frac{q-1}{2}} = \pm 1$. Ponieważ jednak element t jest generatorem grupy $\mathbb{F}_q^*$, więc $t^{\frac{q-1}{2}} = -1$. Wtedy $(t^{\frac{q-1}{4}} \cdot z)^2 = y - x$ (zauważmy, że $\frac{q-1}{4} \in \mathbb{N}_+$). $\square$

Pokażemy teraz, że grafy Payleya są silnie regularne.

Stwierdzenie 3.3.2. *Jeśli q jest potęgą liczby pierwszej taką, że $q \equiv 1 \pmod{4}$, to graf $P(q)$ jest silnie regularny z parametrami*

$$\left(q, \frac{q-1}{2}, \frac{q-5}{4}, \frac{q-1}{4}\right).$$

Dowód. Oczywiście $|V_{P(q)}| = q$. Ponadto w ciele $\mathbb{F}_q$ mamy $\frac{q-1}{2}$ niezerowych kwadratów, gdyż $(-x)^2 = x^2$ oraz $x \neq -x$ dla każdego niezerowego elementu $x \in \mathbb{F}_q$. Zatem graf $P(q)$ jest $(\frac{q-1}{2})$ -regularny. Oczywiście, $0 < \frac{q-1}{2} < q-1$.

Aby pokazać, że graf $P(q)$ jest silnie regularny i wyznaczyć pozostałe jego parametry, rozważmy funkcję $F: \mathbb{F}_q^* \times \mathbb{F}_q^* \rightarrow \mathbb{F}_q$ daną wzorem

$$F(\alpha, \beta) := \alpha^2 - \beta^2 \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{F}_q^*)$$

i policzmy $|F^{-1}(\gamma)|$ dla $\gamma \in \mathbb{F}_q$. Oczywiście, $|F^{-1}(0)| = 2 \cdot (q-1)$ ($\beta = \pm\alpha$). Załóżmy zatem, że $\gamma \neq 0$ i wybierzmy generator t grupy $\mathbb{F}_q^*$. Wtedy istnieje $k \in [1, q-1]$ takie, że $\gamma = t^k$, zatem warunek $F(\alpha, \beta) = \gamma$ można zapisać w postaci

$$(\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta) = t^k.$$

Stąd wynika, że

$$\alpha - \beta = t^m \quad \text{oraz} \quad \alpha + \beta = t^{k-m}$$

dla pewnego $m \in [1, q-1]$, a więc

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot (t^m + t^{k-m}) \quad \text{i} \quad \beta = \frac{1}{2} \cdot (t^m - t^{k-m}).$$

Jeśli k jest liczbą nieparzystą (równoważnie, γ nie jest kwadratem w ciele $\mathbb{F}_q$), to mamy $\alpha \neq 0 \neq \beta$ dla wszystkich $m \in [1, q-1]$, a więc $|F^{-1}(\gamma)| = q-1$. W przeciwnym wypadku, tj. gdy k jest liczbą parzystą, $\alpha = 0$ lub $\beta = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m \equiv \frac{k}{2} \pmod{\frac{q-1}{4}}$, zatem $|F^{-1}(\gamma)| = q-5$.

Założmy teraz, że x i y są dwoma różnymi elementami ciała $\mathbb{F}_q$. Wspólni sąsiedzi wierzchołków x i y w grafie $P(q)$ są wyznaczeni przez pary $(\alpha, \beta) \in \mathbb{F}_q^* \times \mathbb{F}_q^*$ takie, że

$$\alpha^2 - \beta^2 = y - x$$

(wspólnym sąsiadem jest wierzchołek $x + \alpha^2 = y + \beta^2$). Zauważmy przy tym, że pary (α', β') oraz (α'', β'') wyznaczają tego samego sąsiada wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha' = \pm\alpha''$ i $\beta' = \pm\beta''$. Zatem liczba wspólnych sąsiadów wierzchołków x i y jest równa $\frac{|F^{-1}(y-x)|}{4}$, co kończy dowód. $\square$

Następujący wniosek opisuje spektrum grafów Payleya.

Wniosek 3.3.3. *Jeśli q jest potęgą liczby pierwszej taką, że $q \equiv 1 \pmod{4}$, to*

$$\text{Spec } P(q) = \left(\begin{array}{ccc} \frac{-1-\sqrt{q}}{2} & \frac{-1+\sqrt{q}}{2} & \frac{q-1}{2} \\ \frac{q-1}{2} & \frac{q-1}{2} & 1 \end{array} \right).$$

Dowód. Teza wynika natychmiast ze Stwierdzeń 3.3.2 i 3.2.4. $\square$

Grafy Payleya są przykładem grafów konferencyjnych. Spójny graf silnie regularny G nazywamy *konferencyjnym*, jeśli dla wartości własnych $\tau < \theta < k$ grafu G krotności wartości τ i θ są takie same. Zauważmy, że każdy graf konferencyjny ma nieparzystą liczbę wierzchołków.

Poniższy lemat pokazuje, że grafy konferencyjne są jedynymi spójnymi grafami silnie regularnymi, dla których wartości własne nie muszą być całkowite.

Lemat 3.3.4. *Jeśli G jest spójnym grafem silnie regularnym, który nie jest konferencyjny, to wszystkie wartości własne grafu G są liczbami całkowitymi.*

Dowód. Ze Stwierdzenia 3.2.4 wiemy, że graf G ma dokładnie trzy wartości własne. Ponadto, jeśli $\tau < \theta < k$ są wszystkimi wartościami własnymi, to k jest liczbą całkowitą. Niech m_τ i m_θ będą krotnościami wartości własnych τ i θ , odpowiednio. Ze Stwierdzenia 3.2.4 wiemy, że istnieje liczba całkowita l taka, że

$$m_\tau - m_\theta = \frac{l}{\theta - \tau},$$

tzn.

$$\theta - \tau = \frac{l}{m_\tau - m_\theta},$$

a więc liczba $\theta - \tau$ jest wymierna. Stąd wynika, że liczby τ i θ są wymierne (gdyż, na przykład, $\tau + \theta = a - c$ na mocy Stwierdzenia 3.2.4). Wobec Stwierdzenia 2.1.2 to oznacza, że liczby τ i θ są całkowite. $\square$

Kolejny lemat pokazuje, że z drugiej strony parametry grafu konferencyjnego są jednoznacznie wyznaczone przez jego liczbę wierzchołków.

Lemat 3.3.5. *Jeśli G jest grafem konferencyjnym z parametrami (n, k, a, c) , to*

$$k = \frac{n-1}{2}, \quad a = \frac{n-5}{4} \quad i \quad c = \frac{n-1}{4}.$$

W szczególności,

$$\text{Spec } G = \left(\begin{array}{ccc} \frac{-1-\sqrt{n}}{2} & \frac{-1+\sqrt{n}}{2} & \frac{n-1}{2} \\ \frac{n-1}{2} & \frac{n-1}{2} & 1 \end{array} \right).$$

Dowód. Niech $\tau < \theta < k$ będą wartościami własnymi grafu G . Oznaczmy przez m krotności wartości τ i θ . Wtedy $m = \frac{n-1}{2}$, więc $\gcd(n, m) = 1$. Lemat 3.2.5 (i Stwierdzenie 3.2.4) mówi nam jednak, że $m^2 \mid n \cdot k \cdot (n - k - 1)$, a więc $m^2 \mid k \cdot (n - k - 1)$. W szczególności, $m^2 \leq k \cdot (n - k - 1)$. Z drugiej strony,

$$k \cdot (n - k - 1) \leq \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 = m^2,$$

przy czym równości zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $k = n - k - 1$. Ostatecznie, $k = m = \frac{n-1}{2}$.

Dalej,

$$m \cdot (\tau + \theta) = -k$$

na mocy Stwierdzenia 2.1.6, więc

$$\tau + \theta = -1$$

(gdyż $m = k$). Z drugiej strony,

$$\tau + \theta = a - c$$

na mocy Stwierdzenia 3.2.4, zatem $a = c - 1$. Wreszcie mamy równość

$$k \cdot (k - a - 1) = (n - k - 1) \cdot c$$

(Stwierdzenie 3.1.1), która przyjmuje postać

$$\frac{n-1}{2} \cdot \left(\frac{n-1}{2} - c \right) = \frac{n-1}{2} \cdot c$$

i implikuje tezę. Postać spektrum jest konsekwencją Stwierdzenia 3.2.4. $\square$

Przyjrzymy się teraz dokładniej grafom silnie regularnym, których liczba wierzchołków jest liczbą pierwszą lub dwukrotnością liczby pierwszej.

Stwierdzenie 3.3.6. *Jeśli G jest grafem silnie regularnym o p wierzchołkach, gdzie p jest liczbą pierwszą, to G jest grafem konferencyjnym.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że ponieważ p jest liczbą pierwszą, więc z Twierdzenia 3.1.3 wynika, że graf G musi być spójny. Przypuśćmy, że graf G nie jest konferencyjny. Niech $\tau < \theta < k$ będą wartościami własnymi grafu G , a m_τ i m_θ krotnościami wartości τ i θ , odpowiednio. Z Lematu 3.2.5 wiemy, że

$$(\theta - \tau)^2 = \frac{p \cdot k \cdot (p - k - 1)}{m_\tau \cdot m_\theta}.$$

Ponieważ graf G nie jest konferencyjny, więc liczby τ i θ są całkowite na mocy Lematu 3.3.4. W szczególności, liczba $\frac{p \cdot k \cdot (p - k - 1)}{m_\tau \cdot m_\theta}$ jest kwadratem liczby całkowitej. Z drugiej strony, $0 < k, m_\tau, m_\theta < p - 1$, więc $p \nmid k, p - k - 1, m_\tau, m_\theta$. W efekcie

$$p \mid \frac{p \cdot k \cdot (p - k - 1)}{m_\tau \cdot m_\theta} \quad \text{i} \quad p^2 \nmid \frac{p \cdot k \cdot (p - k - 1)}{m_\tau \cdot m_\theta},$$

co jest sprzeczne z tym, że liczba $\frac{p \cdot k \cdot (p - k - 1)}{m_\tau \cdot m_\theta}$ jest kwadratem liczby całkowitej. $\square$

Zajmiemy się teraz grafami, których liczba wierzchołków jest dwukrotnością liczby pierwszej. Będziemy potrzebować następującego lematu.

Lemat 3.3.7. *Niech G będzie prymitywnym grafem silnie regularnym z parametrami (n, k, a, c) , który posiada wartość własną θ krotności $\frac{n}{2}$. Jeśli $k < \frac{n}{2}$, to*

$$n = (2 \cdot \theta + 1)^2 + 1, \quad k = \theta \cdot (2 \cdot \theta + 1), \quad a = \theta^2 - 1 \quad i \quad c = \theta^2.$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że $k < \frac{n}{2}$. Niech $m := \frac{n}{2}$. Ponieważ graf G jest spójny, więc k jest jednokrotną wartością własną grafu G (Stwierdzenie 3.2.4). W szczególności, $\theta \neq k$. Niech τ będzie trzecią wartością własną grafu G . Wtedy krotność wartości własnej τ wynosi

$$n - 1 - m = \frac{n}{2} - 1 = m - 1 \neq m.$$

Z Lematu 3.3.4 wynika zatem, że τ i θ są liczbami całkowitymi. Ze Stwierdzenia 3.2.4 wiemy, że

$$m \cdot (\tau - \theta) = n \cdot \tau + (k - \tau).$$

Ponieważ $m \mid n$, więc otrzymujemy, że $\frac{n}{2} = m \mid k - \tau$.

Zauważmy, że $k - \tau > 0$. Z drugiej strony, Twierdzenie 2.2.3 mówi, że $\tau \geq -k$, zatem $k - \tau \leq 2 \cdot k < n$. Ostatecznie, z podzielności $\frac{n}{2} \mid k - \tau$ wynika, że $k - \tau = \frac{n}{2} = m$. Ze Stwierdzenia 2.1.6 wiemy, że

$$(m - 1) \cdot \tau + m \cdot \theta + k = 0,$$

a więc

$$m \cdot (\tau + \theta) = \tau - k = -m,$$

zatem

$$(3.4) \quad \tau + \theta = -1.$$

Korzystając teraz ze Stwierdzenia 2.1.7, otrzymujemy, że

$$(m - 1) \cdot \tau^2 + m \cdot \theta^2 + k^2 = n \cdot k = 2 \cdot m \cdot k,$$

a więc

$$m \cdot (\tau^2 + \theta^2) = \tau^2 - k^2 + 2 \cdot m \cdot k = (\tau - k) \cdot (\tau + k) + 2 \cdot m \cdot k = m \cdot (k - \tau) = m^2,$$

zatem

$$(3.5) \quad \tau^2 + \theta^2 = m.$$

Z równań (3.4) i (3.5) wynika, że

$$m = 2 \cdot \theta^2 + 2 \cdot \theta + 1,$$

a więc

$$n = 2 \cdot m = 4 \cdot \theta^2 + 4 \cdot \theta + 2 = (2 \cdot \theta + 1)^2 + 1.$$

Dalej

$$k = m + \tau = (2 \cdot \theta^2 + 2 \cdot \theta + 1) - (\theta + 1) = 2 \cdot \theta^2 + \theta = \theta \cdot (2 \cdot \theta + 1).$$

Ponieważ

$$\tau \cdot \theta = c - k$$

na mocy Stwierdzenia 3.2.4, więc

$$c = (2 \cdot \theta^2 + \theta) - (\theta + 1) \cdot \theta = \theta^2.$$

Podobnie,

$$\tau + \theta = a - c,$$

skąd

$$a = \theta^2 - 1.$$

□

Założmy teraz, że $k \geq \frac{n}{2}$. Wiemy, że graf $\overline{G}$ jest grafem silnie regularnym o stopniu regularności $n - k - 1 < \frac{n}{2}$. Ponadto z Wniosku 2.2.4 wiemy, że $-\theta - 1$ jest wartością własną grafu $\overline{G}$ krotności $\frac{n}{2}$. Korzystając ponownie z Lematu 3.3.7, otrzymujemy, że graf $\overline{G}$ ma parametry

$$((2 \cdot (-1 - \theta) + 1)^2 + 1, (-1 - \theta) \cdot (2 \cdot (-1 - \theta) + 1), (-1 - \theta)^2 - 1, (-1 - \theta)^2).$$

Teza wynika zatem ze Stwierdzenia 3.1.2 oraz bezpośrednich rachunków.

Stwierdzenie 3.3.8. *Jeśli G jest prymitywnym grafem silnie regularnym o $2 \cdot p$ wierzchołkach, gdzie p jest liczbą pierwszą, to istnieje liczba całkowita l taka, że graf G ma parametry*

$$((2 \cdot l + 1)^2 + 1, l \cdot (2 \cdot l + 1), l^2 - 1, l^2).$$

Dowód. Ponieważ graf G ma parzystą liczbę wierzchołków, więc nie może być grafem konferencyjnym. Niech k będzie stopniem regularności grafu G oraz τ i θ pozostałymi wartościami własnymi grafu G . Z Lematu 3.3.4 (oraz Stwierdzenia 3.2.4) wiemy, że liczby τ i θ są całkowite. Niech m_τ i m_θ będą krotnościami wartości własnych τ i θ , odpowiednio. Z Lematu 3.2.5 wiemy, że

$$(\theta - \tau)^2 \cdot m_\tau \cdot m_\theta = 2 \cdot p \cdot k \cdot (2 \cdot p - k - 1).$$

W szczególności, $p \mid \theta - \tau$ lub $p \mid m_\tau \cdot m_\theta$.

Jeśli $p \mid \theta - \tau$, to $p^2 \mid 2 \cdot p \cdot k \cdot (2 \cdot p - k - 1)$, a więc $p \mid k \cdot (2 \cdot p - k - 1)$ ($p > 2$ na mocy Wniosku 3.1.6). Stąd $k = p$ lub $2 \cdot p - k - 1 = p$ (a więc $k = p - 1$). W obu przypadkach $\gcd(k, 2 \cdot p - k - 1) = 1$, co, wobec Wniosku 3.1.7, prowadzi do sprzeczności z prymitywnością grafu G .

Zatem $p \mid m_\tau \cdot m_\theta$. Ponieważ $m_\tau + m_\theta = 2 \cdot p - 1$, więc bez straty ogólności możemy założyć, że $m_\theta = p$. Wtedy z Lematu 3.3.7 wynika, że graf G ma parametry

$$((2 \cdot \theta + 1)^2 + 1, \theta \cdot (2 \cdot \theta + 1), \theta^2 - 1, \theta^2). \quad \square$$

Zauważmy, że liczbę l ze Stwierdzenia 3.3.6 można wyznaczyć z równości

$$4 \cdot l^2 + 4 \cdot l + 2 = 2 \cdot p.$$

3.4 Grafy pochodzące od kwadratów łacińskich

Niech I będzie niepustym zbiorem skończonym. Prze I -kwadrat łaciński nazywamy każdą $I \times I$ -macierz L o współczynnikach ze zbioru I taką, że w każdym wierszy i w każdej kolumnie każdy współczynnik pojawia się dokładnie (równoważnie co najmniej, równoważnie co najwyżej) raz. Jeśli $I = [1, n]$ dla dodatniej liczby całkowitej n , to zamiast $[1, n]$ -kwadrat łaciński mówimy kwadrat łaciński rozmiaru n . Przykładami kwadratów łacińskich rozmiaru 4 są następujące macierze:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jeśli L i M są I -kwadratami łacińskimi, to mówimy, że kwadraty L i M są *ortogonalne*, jeśli pary $(L(i, j), M(i, j))$, $i, j \in I$, są parami różne. Przykładem ortogonalnych kwadratów łacińskich są kwadraty L_1 i L_2 . Z drugiej strony, kwadraty L_1 i L_3 nie są ortogonalne, gdyż na przykład para $(1, 1)$ pojawia się 4 razy. Ogólniej, mówimy, że $(L_1, \dots, L_k)$ jest *ciągą ortogonalnych I -kwadratów łacińskich*, jeśli dla dowolnych $p, q \in [1, k]$ takich, że $p \neq q$, kwadraty L_p i L_q są ortogonalne.

Niech $k > 1$ będzie liczbą całkowitą i I niepustym zbiorem skończonym. *Tablicą ortogonalną* z parametrami k i I nazywamy każdą $k \times I^2$ -macierz A o współczynnikach ze zbioru I taką, że dla dowolnych $p, q \in [1, k]$, $p \neq q$, pary $(A(p, \iota), A(q, \iota))$, $\iota \in I^2$, są parami różne. W konsekwencji, jeśli ustalimy

$p, q \in [1, k]$, $p \neq q$, to każda para $(i, j) \in I^2$ pojawia się dokładnie raz wśród par $(A(p, \iota), A(q, \iota))$, $\iota \in I^2$. Przez $O(k, I)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich macierzy ortogonalnych z parametrami k i I . Zauważmy, że jeśli A jest tablicą ortogonalną, to każdy wiersz tablicy A zawiera każdy element zbioru I dokładnie $|I|$ razy. Istotnie, żadna współrzędna nie może pojawić się więcej niż $|I|$ razy (gdyż wtedy musiałaby tworzyć dwa razy parę z tym samym elementem w innym wierszu), a ponieważ każdy wiersz ma dokładnie $|I|^2$ współrzędnych, więc otrzymujemy tezę.

Każdy I -kwadrat łaciński L wyznacza tablicę ortogonalną A_L z parametrami 3 i I daną wzorem:

$$A_L(p, (i, j)) := \begin{cases} i & \text{jeśli } p = 1, \\ j & \text{jeśli } p = 2, \\ L(i, j) & \text{jeśli } p = 3, \end{cases} \quad (p \in [1, 3], i, j \in I),$$

tnz. pierwszy wiersz macierzy A_L zawiera numer wiersza kwadratu L , drugi wiersz zawiera numer kolumny kwadratu L , zaś trzeci wiersz zawiera współczynniki kwadratu L . Dla przykładu, kwadrat L_1 wyznacza tablicę

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 1 & 4 & 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ogólnie, jeśli $(L_1, \dots, L_k)$ jest ciągiem ortogonalnych I -kwadratów łacińskich, to definiujemy tablicę $A \in O(k+2, I)$ wzorami

$$A_L(p, (i, j)) := \begin{cases} i & \text{jeśli } p = 1, \\ j & \text{jeśli } p = 2, \\ L_{p-2}(i, j) & \text{jeśli } p \in [3, k+2], \end{cases} \quad (p \in [1, k+2], i, j \in I).$$

Dla przykładu, para (L_1, L_2) wyznacza tablicę

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 1 & 4 & 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 & 4 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Z tablicą ortogonalną $A \in O(k, I)$ możemy związać nieskierowany graf G_A zdefiniowany w następujący sposób. Zbiorem wierzchołków grafu G_A jest

zbiór I^2 . Graf G_A jest prosty i nie ma pętli, a jeśli ι i κ są różnymi wierzchołkami grafu G , to są one sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy kolumny o numerach ι i κ mają wspólną współrzędną. Formalnie,

$$\begin{aligned} V_{G_A} &:= I^2, \\ E_{G_A} &:= \{(\iota, \kappa) \in I^2 \times I^2 : \\ &\quad \text{istnieje } p \in [1, k] \text{ takie, że } A(p, \iota) = A(p, \kappa)\}, \end{aligned}$$

i

$$p_{G_A}(e) := e \quad (e \in E_{G_A}).$$

Zauważmy, że jeśli $A \in O(2, n)$, to graf G_A jest izomorficzny z grafem $L(K_{n,n})$. W szczególności, w tym przypadku graf G_A jest silnie regularny (Stwierdzenie 3.1.8). Jako pokazuje poniższe twierdzenia, to stwierdzenie jest prawdziwe także, gdy $k > 2$.

Twierdzenie 3.4.1. *Jeśli A jest tablicą ortogonalną z parametrami k i I takimi, że $|I| \geq k$, to G_A jest grafem silnie regularnym z parametrami*

$$(n^2, (n-1) \cdot k, (n-2) + (k-1) \cdot (k-2), k \cdot (k-1)),$$

gdzie $n := |I|$.

Dowód. Oczywiście $|V_{G_A}| = n^2$. Zanim zaczniemy badać inne parametry grafu G_A , zauważmy, że jeśli $\iota, \kappa \in I^2$ i $\iota \neq \kappa$, to istnieje co najwyżej jedno $p \in [1, k]$ takie, że $A(p, \iota) = A(p, \kappa)$.

Ustalmy wierzchołek ι grafu G_A (a więc kolumnę macierzy A). Chcemy policzyć, ile jest $\kappa \in I^2$ takich, że $\kappa \neq \iota$ oraz istnieje $p \in [1, k]$ takie, że $A(p, \iota) = A(p, \kappa)$. Ponieważ p jest jednoznacznie wyznaczone przez κ , więc wystarczy policzyć, ile jest par $(\kappa, p) \in I^2 \times [1, k]$ takich, że $A(p, \iota) = A(p, \kappa)$. Jeśli ustalimy p (które możemy wybrać na k sposobów), to współrzędna $A(p, \iota)$ pojawia się dla dokładnie n razy w p -tym wierszu, a więc stosowane κ możemy wybrać na $n-1$ sposobów. Zauważmy, że ponieważ $n \geq k$ oraz $k \geq 2$, więc

$$0 < (n-1) \cdot k < (n-1) \cdot (n+1) = n^2 - 1.$$

Ustalmy teraz dwa sąsiednie wierzchołki ι oraz κ grafu G_A . Wiemy, że istnieje $l \in [1, k]$ takie, że $A(l, \iota) = A(l, \kappa)$. Jeśli wierzchołek η sąsiaduje z wierzchołkami ι oraz κ , to albo $A(l, \eta) = A(l, \iota)$ albo istnieją $p, q \in [1, k]$ takie, że $p \neq l \neq q$ i $A(p, \iota) = A(p, \eta)$ oraz $A(q, \kappa) = A(q, \eta)$. W pierwszym przypadku wartość η możemy wybrać na $n-2$ sposobów. W drugim przypadku $p \neq q$, gdyż w przeciwnym wypadku $(A(p, \iota), A(l, \iota)) = (A(p, \kappa), A(l, \kappa))$. Liczbę p

możemy wybrać na $k - 1$ sposobów, zaś liczbę q na $k - 2$ sposobów, i każdy taki wybór jednoznacznie wyznacza liczbę η , gdyż para $(A(p, \iota), A(q, \kappa))$ musi się pojawić w dokładnie jednej kolumnie.

Analogicznie pokazujemy, że jeśli wierzchołki ι oraz κ grafu G_A nie są sąsiednie, to mają dokładnie $k \cdot (k - 1)$ wspólnych sąsiadów. $\square$

Tablicę $A \in O(k, I)$ nazywamy *rozszerzalną*, jeśli istnieje tablica $A' \in O(k + 1, I)$ taka, że $A'|_{[1, k] \times I^2} = A$. Rozszerzalność macierzy A znajduje odzwierciedlenie w strukturze grafu G_A .

Twierdzenie 3.4.2. *Tablica $A \in O(k, I)$ jest rozszerzalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi(G_A) = |I|$.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że $\chi(G_A) = |I|$. Wtedy istnieją parami rozłączne podzbiory V_i , $i \in I$, takie, że

$$I^2 = \bigcup_{i \in I} V_i$$

oraz, jeśli $\iota, \kappa \in V_i$ dla pewnego $i \in I$, to $A(p, \iota) \neq A(p, \kappa)$ dla każdego $p \in [1, k]$. Definiujemy $(k + 1) \times I^2$ -macierz A' wzorem

$$A'(p, \iota) := \begin{cases} A(p, \iota) & \text{jeśli } p \in [1, k], \\ i & \text{jeśli } p = k + 1 \text{ i } \iota \in V_i \text{ dla pewnego } i \in I \end{cases}$$

$(p \in [1, k + 1], \iota \in I^2).$

Z własności zbiorów $V_1, \dots, V_n$ natychmiast wynika, że $A' \in O(k + 1, I)$.

Założmy teraz, że tablica A jest rozszerzalna do tablicy $A' \in O(k + 1, I)$. Definiujemy podzbiory V_i , $i \in I$, zbioru I^2 wzorem

$$V_i := \{\iota \in I^2 : A'(k + 1, \iota) = i\} \quad (i \in I).$$

Wtedy oczywiście

$$I^2 = \bigcup_{i \in I} V_i$$

Ponadto łatwo sprawdzić, że zbiory V_i , $i \in I$, są niezależnymi zbiorami wierzchołków grafu G_A . $\square$

Przyjrzymy się teraz dokładniej wartościom liczby chromatycznej dla grafów stowarzyszonych z tablicami ortogonalnymi.

Lemat 3.4.3. *Jeśli $A \in O(k, I)$, to*

$$\alpha(G_A) \leq |I| \leq \chi(G_A).$$

Dowód. Ponieważ graf G_A ma $|I|^2$ wierzchołków, więc

$$\chi(G_A) \geq \frac{|I|^2}{\alpha(G_A)},$$

zatem wystarczy pokazać pierwszą nierówność. Ta jednak jest oczywista, gdyż jeśli U jest podzbiorem zbioru wierzchołków o co najmniej $|I| + 1$ elementach, to istnieją $\iota, \kappa \in U$ takie, że $A(1, \iota) = A(1, \kappa)$. $\square$

W dalszym ciągu będzie się zajmować tablicami ortogonalnymi wyznaczonymi przez kwadraty łacińskie. Szczególną uwagę poświęcimy kwadratом łacińskim stanowiącym tabliczki mnożenia grup skończonych.

Jeśli Γ jest grupą, to możemy zdefiniować Γ kwadrat łaciński L_Γ wzorem

$$L_\Gamma(g, h) := g \cdot h \quad (g, h \in \Gamma).$$

Innymi słowy, kwadrat L_Γ jest tabliczką mnożenia grupy Γ . W konsekwencji grupa Γ wyznacza tablicę ortogonalną $A_\Gamma \in O(3, \Gamma)$ daną wzorem

$$A_\Gamma(p, (g, h)) := \begin{cases} g & \text{jeśli } p = 1, \\ h & \text{jeśli } p = 2, \\ g \cdot h & \text{jeśli } p = 3, \end{cases} \quad (p \in [1, 3], g, h \in \Gamma).$$

Mamy następujący fakt.

Lemat 3.4.4. *Niech Γ będzie grupą skończoną i $A := A_\Gamma$. Wtedy*

$$\chi(G_A) = |\Gamma| \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \alpha(G_A) = |\Gamma|.$$

Dowód. Zauważmy, że jeśli $\chi(G_A) = |\Gamma|$, to

$$\alpha(G_A) \geq \frac{|V_{G_A}|}{\chi(G_A)} = \frac{|\Gamma|^2}{|\Gamma|} = |\Gamma|.$$

Z Lematu 3.4.3 wiemy jednak, że $\alpha(G_A) \leq |\Gamma|$, zatem ostatecznie $\alpha(G_A) = |\Gamma|$.

Założmy teraz, że $\alpha(G_A) = |\Gamma|$. Niech U będzie niezależnym zbiorem wierzchołków grafu G_A o $|\Gamma|$ elementach. Definiujemy funkcję $\tau : \Gamma \rightarrow \Gamma$ poprzez warunek: jeśli $g, h \in \Gamma$, to

$$\tau(g) = h \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } (g, h) \in U.$$

Ponieważ U jest niezależnym zbiorem wierzchołków grafu G_A o $|\Gamma|$ elementach, więc τ jest dobrze zdefiniowaną bijekcją. Ponadto z niezależności zbioru

U wynika, że elementy $g \cdot \tau(g)$, $g \in G$, są parami różne. Dla każdego elementu $h \in \Gamma$ definiujemy permutację $\tau_h : \Gamma \rightarrow \Gamma$ wzorem

$$\tau_h(g) := \tau(g) \cdot h \quad (g \in \Gamma).$$

Każda z permutacji τ_h , $h \in \Gamma$, wyznacza podzbiór U_h zbioru wierzchołków grafu G_A dany wzorem

$$U_h := \{(g, \tau_h(g)) : g \in \Gamma\}.$$

Wtedy zbiór U_h jest niezależnym zbiorem wierzchołków dla każdego elementu $h \in \Gamma$ oraz

$$\bigcup_{h \in \Gamma} U_h = \Gamma^2,$$

a więc $\chi(G_A) \leq |\Gamma|$. Z Lematu 3.4.3 wiemy jednak, że $\chi(G_A) \geq |\Gamma|$, zatem ostatecznie $\chi(G_A) = |\Gamma|$. $\square$

Pokażemy teraz klasę grup Γ , dla której liczba chromatyczna grafu G_{A_Γ} jest mniejsza niż rząd grupy Γ .

Lemat 3.4.5. *Niech Γ będzie grupą cykliczną rzędu $2 \cdot n$, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą. Jeśli $A := A_\Gamma$, to*

$$\alpha(G_A) < 2 \cdot n.$$

Dowód. Przypuśćmy przez sprzeczność, że istnieje niezależny podzbiór $U \subseteq V_{G_A}$ o $2 \cdot n$ elementach. Wtedy istnieje permutacja $\sigma : \Gamma \rightarrow \Gamma$ taka, że elementy $g \cdot \sigma(g)$, $g \in \Gamma$, są parami różne. W grupie Γ istnieje dokładnie jeden element h rzędu 2. Jeśli $g \in \Gamma$ i $g \neq e_\Gamma, h$, to $g^{-1} \neq g$. Wykorzystując tę obserwację łatwo zauważyć, że

$$\prod_{g \in G} g = h.$$

Ponieważ elementy $g \cdot \sigma(g)$, $g \in \Gamma$, są parami różne, więc

$$h = \prod_{g \in G} (g \cdot \sigma(g)) = \prod_{g \in G} g \cdot \prod_{g \in G} \sigma(g) = h \cdot h = e_h,$$

co prowadzi do sprzeczności. $\square$

Zilustrujemy teraz powyższe wyniki na przykładzie kwadratów L_1 , L_2 i L_3 przedstawionych na początku tego podrozdziału. Zauważmy, że kwadrat L_1 można interpretować jako tabliczkę mnożenia grupy izomorficznej z grupą $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, natomiast kwadrat L_2 jest otrzymany z kwadratu L_1 przez permutację wierszy i kolumn. Z drugiej strony, permutując wiersze kwadratu L_3 ,

otrzymujemy tabliczkę mnożenia grupy izomorficznej z grupą $\mathbb{Z}_4$. W szczególności, $\alpha(G_{A_{L_3}}) < 4$ na mocy Lematu 3.4.5, więc $\chi(G_{A_{L_3}}) > 4$ na mocy Lematu 3.4.4. W konsekwencji, Twierdzenie 3.4.2 implikuje, że nie istnieje kwadraty łańciski L rozmiaru 4 taki, że kwadratu L_3 i L są ortogonalne. Z drugiej strony, ponieważ kwadraty L_1 i L_2 są ortogonalne, więc $\chi(G_{A_{L_1}}) = 4$.

Warto przy okazji zauważyć, że z dokładnością do odpowiednio zdefiniowanego izomorfizmu kwadratów łańciskich, każdy kwadrat łańciski rozmiaru 4 jest tabliczką mnożenia jednej z dwóch powyższych grup.

3.5 Małe grafy silnie regularne

Naszym celem w tym podrozdziale będzie opisanie możliwych parametrów (n, k, a, c) prymitywnych grafów silnie regularnych o co najwyżej 25 wierzchołkach. Korzystając ze Stwierdzenia 3.1.2, możemy założyć, że $k < \frac{n}{2}$. Przypomnijmy, że, zgodnie Wnioskiem 3.1.5, $0 < c < k$. Wreszcie, jeśli $k = \frac{n-1}{2}$, to możemy założyć, że $c \leq \frac{k}{2}$ (gdyż jeśli graf silnie regularny G ma parametry $(2 \cdot k + 1, k, a, c)$, to $a = k - 1 - c$ na mocy Stwierdzenia 3.1.1 i jego dopełnienie ma parametry $(2 \cdot k + 1, k, c - 1, k - c)$ na mocy Stwierdzenia 3.1.2). Mamy zatem do rozpatrzenia 476 trójek (n, k, c) takich, że $0 < c < k < \frac{n}{2} < 13$ oraz $c \leq \frac{k}{2}$ jeśli $k = \frac{n-1}{2}$. Dla każdej takiej trójki wyliczamy parametr a , korzystając ze Stwierdzenia 3.1.1, i sprawdzamy, czy otrzymana liczba jest nieujemną liczbą całkowitą. W efekcie otrzymujemy następujących 65 układów:

$(5, 2, 0, 1),$
 $(7, 3, 1, 1),$
 $(9, 4, 2, 1), (9, 4, 1, 2),$
 $(10, 3, 0, 1),$
 $(11, 4, 0, 2), (11, 5, 3, 1), (11, 5, 2, 2),$
 $(13, 4, 1, 1), (13, 6, 4, 1), (13, 6, 3, 2), (13, 6, 2, 3),$
 $(15, 6, 1, 3), (15, 7, 5, 1), (15, 7, 4, 2), (15, 7, 3, 3),$
 $(16, 5, 2, 1), (16, 5, 0, 2), (16, 6, 2, 2),$
 $(17, 4, 0, 1), (17, 6, 0, 3), (17, 8, 6, 1), (17, 8, 5, 2),$
 $(17, 8, 4, 3), (17, 8, 3, 4),$
 $(19, 6, 3, 1), (19, 6, 1, 2), (19, 8, 2, 4), (19, 9, 7, 1),$
 $(19, 9, 6, 2), (19, 9, 5, 3), (19, 9, 4, 4),$
 $(21, 5, 1, 1), (21, 8, 4, 2), (21, 8, 1, 4), (21, 10, 8, 1),$
 $(21, 10, 7, 2), (21, 10, 6, 3), (21, 10, 5, 4), (21, 10, 4, 5),$
 $(22, 6, 0, 2), (22, 7, 4, 1), (22, 7, 2, 2), (22, 7, 0, 3),$

$$\begin{aligned}
& (22, 9, 4, 3), (22, 9, 0, 6), \\
& (23, 8, 0, 4), (23, 10, 3, 5), (23, 11, 9, 1), (23, 11, 8, 2), \\
& (23, 11, 7, 3), (23, 11, 6, 4), (23, 11, 5, 5), \\
& (25, 6, 2, 1), (25, 8, 5, 1), (25, 8, 3, 2), (25, 8, 1, 3), \\
& (25, 9, 3, 3), (25, 10, 2, 5), (25, 12, 10, 1), (25, 12, 9, 2), \\
& (25, 12, 8, 3), (25, 12, 7, 4), (25, 12, 6, 5), (25, 12, 5, 6).
\end{aligned}$$

Dla każdej z powyższych czwórek (n, k, a, c) wyliczamy liczby

$$\frac{1}{2} \cdot \left((n-1) \pm \frac{2 \cdot k + (n-1) \cdot (a-c)}{\sqrt{\Delta}} \right)$$

gdzie

$$\Delta := (a-c)^2 + 4 \cdot (k-c).$$

Na mocy Stwierdzenia 3.2.4 odrzucamy te czwórki, dla których wyliczone liczby nie są dodatnimi liczbami całkowitymi. W efekcie otrzymujemy następujących 12 czwórek:

$$\begin{aligned}
& (5, 2, 0, 1), (9, 4, 1, 2), (10, 3, 0, 1), (13, 6, 2, 3), \\
& (15, 6, 1, 3), (16, 5, 0, 2), (16, 6, 2, 2), (17, 8, 3, 4), \\
& (21, 10, 5, 4), (21, 10, 4, 5), (25, 8, 3, 2), (25, 12, 5, 6).
\end{aligned}$$

Pozostaje nam sprawdzić, czy dla wymienionych powyżej parametrów istnieją grafy silnie regularne. Korzystając ze Stwierdzenia 3.3.2, wiemy, że grafy Payleya $P(5)$, $P(9)$, $P(13)$, $P(17)$ i $P(25)$ są przykładami grafów o parametrach

$$(5, 2, 0, 1), (9, 4, 1, 2), (13, 6, 2, 3), (17, 8, 3, 4) \quad \text{i} \quad (25, 12, 5, 6),$$

odpowiednio. Podobnie, Stwierdzenia 3.1.8 i 3.1.2 implikują, że grafy $\overline{L(K_5)}$, $\overline{L(K_6)}$ i $L(K_7)$ są silnie regularne z parametrami

$$(10, 3, 0, 1), (15, 6, 1, 3) \quad \text{i} \quad (21, 10, 5, 4),$$

odpowiednio. Dalej, jeśli L_1 i L_2 są kwadratami łańcuskimi rozmiaru 4 i 5, odpowiednio, to grafy $\overline{G_{L_1}}$ i G_{L_2} są silnie regularne z parametrami

$$(16, 6, 2, 2) \quad \text{i} \quad (25, 12, 5, 6),$$

odpowiednio, na mocy Twierdzenia 3.4.1 i Stwierdzenia 3.1.2.

Zostały nam czwórki $(16, 5, 0, 2)$ i $(21, 10, 4, 5)$. Grafem silnie regularnym z parametrami $(16, 5, 0, 2)$ jest graf Clebscha, który zdefiniujemy poniżej. Z

drugiej strony, gdyby istniał graf silnie regularny z parametrami $(21, 10, 4, 5)$, to byłby to graf konferencyjny. Można jednak pokazać, że jeśli n jest liczbą wierzchołków grafu konferencyjnego, to n jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych. Liczba 21 nie ma tej własności, więc nie istnieje graf silnie regularny z parametrami $(21, 10, 4, 5)$.

Grafem Clebscha nazywamy graf C zdefiniowany w następujący sposób. Wierzchołkami grafu C są parzystoelementowe podzbiory zbioru $[1, 5]$. Graf Clebscha jest nieskierowanym grafem prostym bez pętli, w którym wierzchołki X i Y są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy $|X \Delta Y| = 4$. Formalnie,

$$V_C := \{X \subseteq [1, 5] : |X| \equiv 0 \pmod{2}\},$$

$$E_C := \{(X, Y) : X, Y \in V_C \text{ i } |X \Delta Y| = 4\}$$

i

$$p_C(X) := X \quad (X \in E_C).$$

Zostawiamy Czytelnikowi dowód następującego prostego faktu.

Stwierdzenie 3.5.1. *Graf Clebscha jest silnie regularny z parametrami $(16, 5, 0, 2)$.* ■

Poza istnieniem grafu silnie regularnego z zadanych parametrach, interesującym problemem jest również zbadanie, dla których parametrów taki graf jest wyznaczony jednoznacznie. Powyższy problem dla parametrów wyznaczonych w tym podrozdziale zbadamy w podrozdziale 3.7.

3.6 Lokalne wartości własne

Niech G będzie grafem silnie regularnym. Dla wybranego wierzchołka v grafu G definiujemy macierze $A_{G,v}^{(1)}$, $A_{G,v}^{(2)}$ i $B_{G,v}$ wzorami

$$A_{G,v}^{(1)} := (A_G)|_{N_G(v) \times N_G(v)}, \quad A_{G,v}^{(2)} := (A_G)|_{M_G(v) \times M_G(v)}$$

i

$$B_{G,v} := (A_G)|_{M_G(v) \times N_G(v)},$$

gdzie

$$M_G(v) := V_G \setminus (N_G(v) \cup \{v\}).$$

Zauważmy, że wtedy macierz A_G ma postać

$$(3.6) \quad A_G = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_{N_G(v)}^{\text{tr}} & \mathbf{0}_{M_G(v)}^{\text{tr}} \\ \mathbf{1}_{N_G(v)} & A_{G,v}^{(1)} & B_{G,v}^{\text{tr}} \\ \mathbf{0}_{M_G(v)} & B_{G,v} & A_{G,v}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Mamy również następujące własności.

Lemat 3.6.1. *Niech v będzie wierzchołkiem grafu silnie regularnego G z parametrami (n, k, a, c) . Wtedy $\langle N_G(v) \rangle_G$ i $\langle M_G(v) \rangle$ są grafami regularnymi stopni a i $k - c$, odpowiednio. W szczególności,*

$$A_{G,v}^{(1)} \cdot \mathbf{1}_{N_G(v)} = a \cdot \mathbf{1}_{N_G(v)} \quad i \quad A_{G,v}^{(2)} \cdot \mathbf{1}_{M_G(v)} = (k - c) \cdot \mathbf{1}_{M_G(v)}.$$

Ponadto,

$$B_{G,v} \cdot \mathbf{1}_{N_G(v)} = c \cdot \mathbf{1}_{M_G(v)} \quad i \quad B_{G,v}^{\text{tr}} \cdot \mathbf{1}_{M_G(v)} = (k - a - 1) \cdot \mathbf{1}_{M_G(v)}.$$

Dowód. Jeśli $u \in N_G(v)$, to sąsiedzi wierzchołka u w grafie $\langle N_G(v) \rangle_G$ są wspólnymi sąsiadami wierzchołków v i u , skąd wynika, że graf $\langle N_G(v) \rangle_G$ jest a -regularny. Podobnie, jeśli $u \in M_G(v)$, to c spośród k sąsiadów wierzchołka u w grafie G jest również sąsiadami wierzchołka v , a więc nie należy do $M_G(v)$. Zatem wierzchołek u ma $k - c$ sąsiadów w grafie $\langle M_G(v) \rangle_G$. Równości

$$A_{G,v}^{(1)} \cdot \mathbf{1}_{N_G(v)} = a \cdot \mathbf{1}_{N_G(v)} \quad i \quad A_{G,v}^{(2)} \cdot \mathbf{1}_{M_G(v)} = (k - c) \cdot \mathbf{1}_{M_G(v)},$$

wynikają natychmiast z Twierdzenia 2.2.3. Twierdzenie 2.2.3 implikuje również, że

$$A_G \cdot \mathbf{1}_{V_G} = k \cdot \mathbf{1}_{V_G},$$

co w świetle równości (3.6) oznacza między innymi, że

$$\mathbf{1}_{N_G(v)} + A_{G,v}^{(1)} \cdot \mathbf{1}_{N_G(v)} + B_{G,v}^{\text{tr}} \cdot \mathbf{1}_{M_G(v)} = k \cdot \mathbf{1}_{N_G(v)},$$

Stąd wynika, że

$$B_{G,v}^{\text{tr}} \cdot \mathbf{1}_{M_G(v)} = (k - a - 1) \cdot \mathbf{1}_{N_G(v)}.$$

Analogicznie pokazujemy, że

$$B_{G,v} \cdot \mathbf{1}_{N_G(v)} = c \cdot \mathbf{1}_{M_G(v)},$$

co kończy dowód. □

Będziemy korzystać z następujące własności powyższych macierzy.

Lemat 3.6.2. *Jeśli G jest grafem silnie regularnym z parametrami (n, k, a, c) i $v \in V_G$, to*

$$\begin{aligned} (A_{G,v}^{(1)})^2 - (a - c) \cdot A_{G,v}^{(1)} - (k - c) \cdot I_{N_G(v)} + B_{G,v}^{\text{tr}} \cdot B_{G,v} \\ = (c - 1) \cdot J_{N_G(v) \times N_G(v)}, \end{aligned}$$

$$(A_{G,v}^{(2)})^2 - (a - c) \cdot A_{G,v}^{(2)} - (k - c) \cdot I_{M_G(v)} + B_{G,v} \cdot B_{G,v}^{\text{tr}} = c \cdot J_{M_G(v) \times M_G(v)}$$

i

$$B_{G,v} \cdot A_{G,v}^{(1)} + A_{G,v}^{(2)} \cdot B_{G,v} = (a - c) \cdot B_{G,v} + c \cdot J_{M_G(v) \times N_G(v)}.$$

Dowód. Z Lematu 3.2.2 wiemy, że

$$(3.7) \quad A_G^2 - (a - c) \cdot A_G - (k - c) \cdot I_{V_G} = c \cdot J_{V_G \times V_G}.$$

Z drugiej strony, z równości (3.6) i Lematu 3.6.1 otrzymujemy, że

$$(3.8) \quad A_G^2 = \begin{bmatrix} k & a \cdot \mathbf{1}_{N_G(v)}^{\text{tr}} & c \cdot \mathbf{1}_{M_G(v)}^{\text{tr}} \\ a \cdot \mathbf{1}_{N_G(v)} & J_{N_G(v) \times N_G(v)} + (A_{G,v}^{(1)})^2 + B_{G,v}^{\text{tr}} \cdot B_{G,v} & A_{G,v}^{(1)} \cdot B_{G,v}^{\text{tr}} + B_{G,v}^{\text{tr}} \cdot A_{G,v}^{(2)} \\ c \cdot \mathbf{1}_{M_G(v)} & B_{G,v} \cdot A_{G,v}^{(1)} + A_{G,v}^{(2)} \cdot B_{G,v} & B_{G,v} \cdot B_{G,v}^{\text{tr}} + (A_{G,v}^{(2)})^2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{I}.$$

Wykorzystując równości (3.7) i (3.8), otrzymujemy tezę. $\square$

Niech G będzie grafem silnie regularnym i $v \in V_G$. Dla liczby $\sigma \in \mathbb{R}$ przez $m_{G,v}^{(1)}(\sigma)$ oznaczmy wymiar przestrzeni wektorów $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N_G(v)}$ takich, że

$$A_{G,v}^{(1)} \cdot \mathbf{v} = \sigma \cdot \mathbf{v} \quad \text{i} \quad \mathbf{1}_{N_G(v)}^{\text{tr}} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Liczbę σ nazywamy *lokalną wartością pierwszego rodzaju (grafu G względem wierzchołka v)*, jeśli σ nie jest wartością własną grafu G , ale $m_{G,v}^{(1)}(\sigma) > 0$ (tzn. σ jest wartością własną macierzy $A_{G,v}^{(2)}$ i posiada wektor własny, który jest prostopadły do wektora $\mathbf{1}_{N_G(v)}$). Podobnie definiujemy liczbę $m_{G,v}^{(2)}(\sigma)$ oraz lokalne wartości własne drugiego rodzaju.

Mamy następujące własności lokalnych wartości własnych pierwszego rodzaju i stowarzyszonych wektorów własnych.

Lemat 3.6.3. *Niech v będzie wierzchołkiem grafu silnie regularnego G z wartościami własnymi $\tau < \theta \leq k$. Jeśli σ jest lokalną wartością własną pierwszego rodzaju (grafu G względem wierzchołka v), to $\tau < \sigma < \theta$. Ponadto, jeśli $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N_G(v)}$ jest wektorem takim, że $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_{N_G(v)}$, $A_{G,v}^{(1)} \cdot \mathbf{v} = \sigma \cdot \mathbf{v}$ i $\mathbf{1}_{N_G(v)}^{\text{tr}} \cdot \mathbf{v} = 0$, to $B_{G,v} \cdot \mathbf{v} \neq \mathbf{0}_{M_G(v)}$.*

Przypomnijmy, że jeśli G jest spójnym grafem silnie regularnym z parametrami (n, k, a, c) , to graf G ma trzy wartości własne $\tau < \theta < k$ na mocy Stwierdzenia 3.2.4. Z drugiej strony, gdy graf G nie jest spójny, to przyjmujemy $\theta := k$. Zauważmy, że w obu przypadkach τ i θ są pierwiastkami wielomianu

$$t^2 - (a - c) \cdot t - (k - c) = 0.$$

Dowód. Ustalmy wektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N_G(v)}$ taki, że $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_{N_G(v)}$, $A_{G,v}^{(1)} \cdot \mathbf{v} = \sigma \cdot \mathbf{v}$ i $\mathbf{1}_{N_G(v)}^{\text{tr}} \cdot \mathbf{v} = 0$. Z Lematu 3.6.2 wiemy, że

$$((A_{G,v}^{(1)})^2 - (a - c) \cdot A_{G,v}^{(1)} - (k - c) \cdot I_{N_G(v)}) \cdot \mathbf{v} = -B_{G,v}^{\text{tr}} \cdot B_{G,v} \cdot \mathbf{v},$$

gdzie (n, k, a, c) są parametrami grafu G . Ponadto, uwagi poprzedzające dowód implikują, że

$$(A_{G,v}^{(1)})^2 - (a-c) \cdot A_{G,v}^{(1)} - (k-c) \cdot I_{N_G(v)} = (A_{G,v}^{(1)} - \tau \cdot I_{N_G(v)}) \cdot (A_{G,v}^{(1)} - \theta \cdot I_{N_G(v)}),$$

zatem otrzymujemy, że

$$(\sigma - \tau) \cdot (\sigma - \theta) \cdot \mathbf{v} = -B_{G,v}^{\text{tr}} \cdot B_{G,v} \cdot \mathbf{v}.$$

Gdyby $B_{G,v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}_{M_G(v)}$, to otrzymalibyśmy, że $\sigma = \tau$ lub $\sigma = \theta$, więc liczba σ nie byłaby lokalną wartością własną. Zatem $B_{G,v} \cdot \mathbf{v} \neq \mathbf{0}_{M_G(v)}$ i wtedy

$$(\sigma - \tau) \cdot (\sigma - \theta) \cdot \mathbf{v}^{\text{tr}} \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v}^{\text{tr}} \cdot B_{G,v}^{\text{tr}} \cdot B_{G,v} \cdot \mathbf{v} = -(B_{G,v} \cdot \mathbf{v})^{\text{tr}} \cdot (B_{G,v} \cdot \mathbf{v}),$$

a więc

$$(\sigma - \tau) \cdot (\sigma - \theta) = -\frac{(B_{G,v} \cdot \mathbf{v})^{\text{tr}} \cdot (B_{G,v} \cdot \mathbf{v})}{\mathbf{v}^{\text{tr}} \cdot \mathbf{v}} < 0,$$

co kończy dowód. $\square$

Mamy analogiczny lemat dla lokalnych wartości własnych drugiego rodzaju.

Lemat 3.6.4. *Niech v będzie wierzchołkiem grafu silnie regularnego G z wartościami własnymi $\tau < \theta \leq k$. Jeśli σ jest lokalną wartością własną drugiego rodzaju (grafu G względem wierzchołka v), to $\tau < \sigma < \theta$. Ponadto, jeśli $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{M_G(v)}$ jest wektorem takim, że $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_{M_G(v)}$, $A_{G,v}^{(2)} \cdot \mathbf{v} = \sigma \cdot \mathbf{v}$ i $\mathbf{1}_{M_G(v)}^{\text{tr}} \cdot \mathbf{v} = 0$, to $B_{G,v}^{\text{tr}} \cdot \mathbf{v} \neq \mathbf{0}_{N_G(v)}$.*

Udowodnimy teraz odpowiedniość pomiędzy lokalnymi wartościami własnymi pierwszego i drugiego rodzaju.

Twierdzenie 3.6.5. *Niech v będzie wierzchołkiem grafu silnie regularnego G z parametrami (n, k, a, c) . Jeśli σ jest lokalną wartością własną pierwszego rodzaju (grafu G względem wierzchołka v), to $a - c - \sigma$ jest lokalną wartością własną drugiego rodzaju oraz*

$$m_{G,v}^{(1)}(\sigma) = m_{G,v}^{(2)}(a - c - \sigma).$$

Podobnie, jeśli σ jest lokalną wartością własną drugiego rodzaju, to $a - c - \sigma$ jest lokalną wartością własną pierwszego rodzaju oraz

$$m_{G,v}^{(2)}(\sigma) = m_{G,v}^{(1)}(a - c - \sigma).$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że σ jest lokalną wartością własną pierwszego rodzaju. Przy tym założeniu pokażemy, że

$$(3.9) \quad m_{G,v}^{(1)}(\sigma) \leq m_{G,v}^{(2)}(a - c - \sigma).$$

Oznaczamy przez $\mathcal{W}$ przestrzeń wektorów $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{N_G(v)}$ takich, że

$$A_{G,v}^{(1)} \cdot \mathbf{w} = \sigma \cdot \mathbf{w} \quad \text{i} \quad \mathbf{1}_{N_G(v)}^{\text{tr}} \cdot \mathbf{w} = 0.$$

Z definicji $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{W} = m_{G,v}^{(1)}(\sigma)$. Podobnie, przez $\mathcal{U}$ oznaczmy przestrzeń wektorów $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{M_G(v)}$ takich, że

$$A_{G,v}^{(2)} \cdot \mathbf{u} = (a - c - \sigma) \cdot \mathbf{u} \quad \text{i} \quad \mathbf{1}_{M_G(v)}^{\text{tr}} \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Wtedy $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{U} = m_{G,v}^{(2)}(a - c - \sigma)$, więc dla zakończenia dowodu nierówności (3.9) wystarczy pokazać, że istnieje różnowartościowe odwzorowanie liniowe $F : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{U}$.

Zdefiniujmy funkcję $F : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{U}$ wzorem

$$F(\mathbf{w}) := B_{G,v} \cdot \mathbf{w} \quad (\mathbf{w} \in \mathcal{W}).$$

Musimy pokazać, że funkcja F jest dobrze określona, tzn. jeśli $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, to $B_{G,v} \cdot \mathbf{w} \in \mathcal{U}$. Korzystając z Lematu 3.6.2, mamy jednak, że

$$\begin{aligned} A_{G,v}^{(2)} \cdot B_{G,v} \cdot \mathbf{w} &= (a - c) \cdot B_{G,v} \cdot \mathbf{w} + c \cdot J_{M_G(v) \times N_G(v)} \cdot \mathbf{w} - B_{G,v} \cdot A_{G,v}^{(1)} \cdot \mathbf{w} \\ &= (a - c - \sigma) \cdot (B_{G,v} \cdot \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Ponadto, Lemat 3.6.1 implikuje, że

$$\mathbf{1}_{M_G(v)}^{\text{tr}} \cdot B_{G,v} \cdot \mathbf{w} = (k - a - 1) \cdot \mathbf{1}_{N_G(v)}^{\text{tr}} \cdot \mathbf{w} = 0.$$

Oczywiście, funkcja F jest liniowa. Ponadto jest ona różnowartościowa na mocy Lematu 3.6.3.

Niech teraz $\tau < \theta \leq k$ będą wartościami własnymi grafu G . Wtedy $\tau < \sigma < \theta$ na mocy Lematu 3.6.3. Ponieważ $a - c = \tau + \sigma$ na mocy Stwierdzenia 3.2.4, więc również $\tau < a - c - \sigma < \theta$. W szczególności, $a - c - \sigma \neq \tau, \theta, k$, co łącznie z pierwszą częścią oznacza, że $a - c - \sigma$ jest lokalną wartością własną drugiego rodzaju.

Pokazaliśmy zatem, że jeśli σ jest wartością własną pierwszego rodzaju, to $a - c - \sigma$ jest wartością własną drugiego rodzaju oraz

$$m_{G,v}^{(1)}(\sigma) \leq m_{G,v}^{(2)}(a - c - \sigma).$$

Analogicznie pokazujemy, że jeśli σ jest wartością własną drugiego rodzaju, to $a - c - \sigma$ jest wartością własną pierwszego rodzaju oraz

$$m_{G,v}^{(2)}(\sigma) \leq m_{G,v}^{(1)}(a - c - \sigma).$$

Z powyższego wynika, w szczególności, że jeśli σ jest wartością własną pierwszego rodzaju, to

$$m_{G,v}^{(1)}(\sigma) \leq m_{G,v}^{(2)}(a - c - \sigma) \leq m_{G,v}^{(1)}(a - c - (a - c - \sigma)) = m_{G,v}^{(1)}(\sigma),$$

co daje równość

$$m_{G,v}^{(1)} = m_{G,v}^{(2)}(a - c - \sigma).$$

Podobnie, jeśli σ jest drugiego rodzaju, to otrzymujemy, że

$$m_{G,v}^{(2)}(\sigma) = m_{G,v}^{(1)}(a - c - \sigma).$$

□

3.7 Jedyność małych grafów silnie regularnych

Zbadamy teraz jedyność (z dokładnością do izomorfizmu) grafów opisanych paragrafie 3.5. Uczynimy to w serii stwierdzeń. Rozpocniemy od następujących prostych obserwacji na temat grafów 1- i 2-regularnych.

Lemat 3.7.1. *Graf K_2 jest jedynym (z dokładnością do izomorfizmu) spójnym grafem 1-regularnym.*

Dowód. Oczywiste. □

Lemat 3.7.2. *Grafy C_n , $n \geq 3$, są jedynymi (z dokładnością do izomorfizmu) spójnymi prostymi grafami 2-regularnymi bez pętli.*

Dowód. Niech G będzie spójnym prostym grafem 2-regularnym bez pętli o n wierzchołkach. Ponieważ graf G jest prosty i nie ma pętli, więc $n \geq 3$. Pokażemy, że $G \simeq C_n$.

Wyberzmy dwa sąsiednie wierzchołki u i w w grafu G oraz zdefiniujemy ciąg $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ wierzchołków wzorem:

$$v_m := \begin{cases} u & \text{jeśli } m = 0, \\ w & \text{jeśli } m = 1, \\ v & \text{gdzie } v \text{ jest sąsiadem wierzchołka } v_{m-1} \text{ różnym od } v_{m-2}, \\ & \text{jeśli } m > 1, \end{cases}$$

$$(m \in \mathbb{N}).$$

Ponieważ $|V_G| < \infty$, więc istnieją $p, q \in \mathbb{N}$ takie, że $p < q$ i $v_p = v_q$. Wybierzmy p i q takie, że suma $p + q$ jest najmniejsza możliwa. Wtedy $p = 0$ i $q = n$ oraz łatwo pokazać, że przyporządkowanie

$$[1, n] \ni i \mapsto v_{i-1} \in V_G$$

indukuje izomorfizm $C_n \simeq G$. $\square$

Lemat 3.7.2 natychmiast implikuje następującą charakteryzację grafów silnie regularnych z parametrami $(5, 2, 0, 1)$.

Stwierdzenie 3.7.3. *Graf $P(5)$ jest jedynym (z dokładnością do izomorfizmu) grafem silnie regularnym z parametrami $(5, 2, 0, 1)$.*

Dowód. Teza jest oczywistą konsekwencją Lematu 3.7.2, gdyż każdy graf silnie regularny z parametrami $(5, 2, 0, 1)$ jest 2-regularny (oczywiście $P(5) \simeq C_5$). $\square$

Kolejnym układem parametrów, który zbadamy, jest $(9, 4, 1, 2)$.

Stwierdzenie 3.7.4. *Graf $P(9)$ jest jedynym (z dokładnością do izomorfizmu) grafem silnie regularnym z parametrami $(9, 4, 1, 2)$.*

Dowód. Niech G będzie grafem silnie regularnym z parametrami $(9, 4, 1, 2)$ i wybierzmy wierzchołek v grafu G . Niech $G_1 := \langle N_G(v) \rangle_G$ i $G_2 := \langle M_G(v) \rangle_G$. Wtedy grafy G_1 i G_2 są 1- i 2-regularne, odpowiednio, na mocy Lematu 3.6.1. Zatem Lematy 3.7.1 i 3.7.2 implikują, że $G_1 = G'_1 \sqcup G''_1$ i $G_2 \simeq C_4$, gdzie $G'_1 \simeq K_2 \simeq G''_1$. Niech w_1, w_2, w_3 i w_4 będą wszystkimi wierzchołkami grafu G_2 , przy czym założymy, że $w_{i+1} \in N_G(w_i)$ dla każdego $i \in [1, 4]$, gdzie $w_5 := w_1$. Jeśli u'_1 i u'_2 są dwoma wierzchołkami grafu G'_1 , to

$$|N_G(u'_1) \cap M_G(v)| = 2 = |N_G(u'_2) \cap M_G(v)|,$$

gdź graf G jest 4-regularny oraz

$$N_G(u'_1) \setminus M_G(v) = \{v, u'_2\} \quad \text{i} \quad N_G(u'_2) \setminus M_G(v) = \{v, u'_1\}.$$

Wiemy też, że $v \in N_G(u'_1) \cap N_G(u'_2)$ i $|N_G(u'_1) \cap N_G(u'_2)| = 1$, więc

$$(N_G(u'_1) \cap M_G(v)) \cap (N_G(u'_2) \cap M_G(v)) = \emptyset.$$

Ponieważ wreszcie Lemat 3.6.1 implikuje, że grafy $\langle N_G(u'_1) \rangle_G$ i $\langle N_G(u'_2) \rangle_G$ są 1-regularne, więc wierzchołki należące do zbiorów $N_G(u'_1) \cap M_G(v)$ i $N_G(u'_2) \cap M_G(v)$

$M_G(v)$ muszą być sąsiednie. Ostatecznie, z dokładnością do numeracji wierzchołków grafu G_2 ,

$$N_G(u'_1) \cap M_G(v) = \{w_1, w_2\} \quad \text{i} \quad N_G(u'_2) \cap M_G(v) = \{w_3, w_4\}.$$

Analogicznie pokazujemy, że jeśli u'_1 i u''_2 są dwoma wierzchołkami grafu G'_2 , to, z dokładnością do numeracji wierzchołków grafu G''_1 ,

$$N_G(u''_1) \cap M_G(v) = \{w_1, w_2\} \quad \text{i} \quad N_G(u''_2) \cap M_G(v) = \{w_3, w_4\}$$

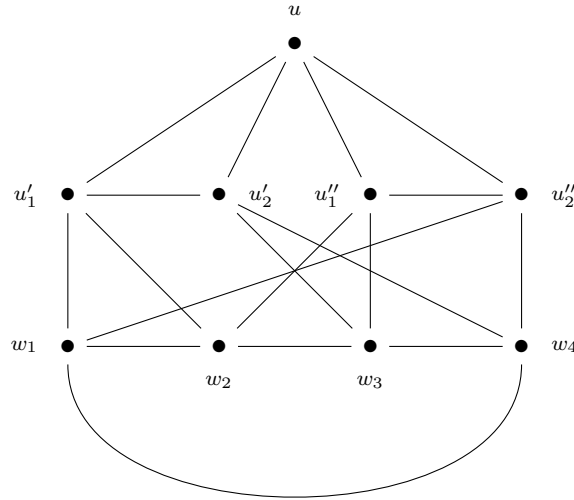
lub

$$N_G(u''_1) \cap M_G(v) = \{w_2, w_3\} \quad \text{i} \quad N_G(u''_2) \cap M_G(v) = \{w_4, w_1\}.$$

Wiemy jednak, że $|N_G(u'_1) \cap N_G(u''_1)| = 2$ i $v \in N_G(u'_1) \cap N_G(u''_1)$, a więc ostatecznie

$$N_G(u''_1) \cap M_G(v) = \{w_2, w_3\} \quad \text{i} \quad N_G(u''_2) \cap M_G(v) = \{w_4, w_1\},$$

a więc graf G ma postać



co kończy dowód. □

Następnym układem parametrów na naszej liście jest $(10, 3, 0, 1)$. Graf $\overline{L(K_5)}$, którego dotyczy poniższe stwierdzenie, nosi też nazwę *grafu Peterse-
na*.

Stwierdzenie 3.7.5. *Graf $\overline{L(K_5)}$ jest jedynym (z dokładnością do izomorfizmu) grafem silnie regularnym z parametrami $(10, 3, 0, 1)$.*

Dowód. Niech G będzie grafem silnie regularnym z parametrami $(10, 3, 0, 1)$ i wybierzmy wierzchołek v grafu G . Niech $G_1 := \langle N_G(v) \rangle_G$ i $G_2 := \langle M_G(v) \rangle_G$. Wtedy grafy G_1 i G_2 są 0- i 2-regularne, odpowiednio, na mocy Lematu 3.6.1. Zatem $G_1 \simeq N_3$ oraz, na mocy Lematu 3.7.2, $G_2 \simeq C_6$ lub $G_2 = G'_2 \sqcup G''_2$, gdzie $G'_2 \simeq C_3 \simeq G''_2$. Aby rozstrzygnąć, z którym przypadkiem mamy do czynienia, zbadamy spektra rozważanych grafów.

Ze Stwierdzenia 3.2.4 wiemy, że

$$\text{Spec } G = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dalej, Stwierdzenie 2.2.1 implikuje, że

$$\text{Spec } G_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wykorzystując Twierdzenie 3.6.5, otrzymujemy zatem, że -1 jest dwukrotną wartością własną grafu G_2 , a więc ze Stwierdzeń 2.2.8 oraz 2.1.5 wynika, że $G_2 \simeq C_6$.

Niech u_1, u_2 i u_3 oraz w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 i w_6 będą wszystkimi wierzchołkami grafów G_1 i G_2 , odpowiednio, przy czym założymy, że $w_{i+1} \in N_G(w_i)$ dla każdego $i \in [1, 6]$, gdzie $w_7 := w_1$. Wiemy, że

$$|N_G(u_1) \cap M_G(v)| = 2.$$

Ponieważ graf $\langle N_G(u_1) \rangle_G$ jest 0-regularny, więc, z dokładnością do numeracji wierzchołków grafu G_2 ,

$$N_G(u_1) \cap M_G(v) = \{w_1, w_3\} \quad \text{lub} \quad N_G(u_1) \cap M_G(v) = \{w_1, w_4\}.$$

Zauważmy jednak, że jeśli $N_G(u_1) \cap M_G(v) = \{w_1, w_3\}$, to $w_2, u_1 \in N_G(w_1) \cap N_G(w_3)$, co jest niemożliwe, gdyż $|N_G(w_1) \cap N_G(w_3)| = 1$. Zatem

$$N_G(u_1) \cap M_G(v) = \{w_1, w_4\}.$$

Analogicznie, z dokładnością do numeracji wierzchołków grafu G_2 ,

$$N_G(u_2) \cap M_G(v) = \{w_1, w_4\} \quad \text{lub} \quad N_G(u_2) \cap M_G(v) = \{w_2, w_5\}.$$

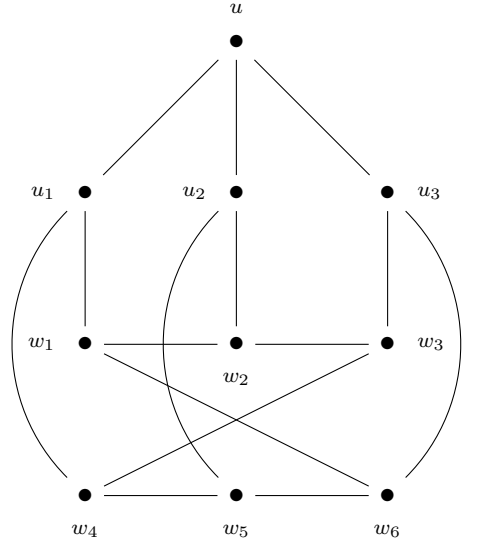
Jeśli jednak $N_G(u_2) \cap M_G(v) = \{w_1, w_4\}$, to $v, w_1, w_4 \in N_G(u_1) \cap N_G(u_2)$, co jest niemożliwe, gdyż $|N_G(u_1) \cap N_G(u_2)| = 1$. Zatem

$$N_G(u_2) \cap M_G(v) = \{w_2, w_5\}.$$

Podobnie,

$$N_G(u_3) \cap M_G(v) = \{w_3, w_6\},$$

więc graf G ma postać



co kończy dowód. $\square$

Zbadamy teraz grafy silnie regularne z parametrami $(15, 6, 1, 3)$. W tych rozważaniach wykorzystamy następujący fakt.

Lemat 3.7.6. *Niech G będzie grafem silnie regularnym z parametrami*

$$(6 \cdot t + 3, 2 \cdot t + 2, 1, t + 1),$$

gdzie $t \in \{1, 2, 4\}$. Jeśli v jest wierzchołkiem grafu G i $G_2 := \langle M_G(v) \rangle_G$, to

$$\text{Spec } G_2 = \begin{cases} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{jeśli } t = 1, \\ \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \text{jeśli } t = 2, \\ \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 5 & 10 & 1 \end{pmatrix} & \text{jeśli } t = 4. \end{cases}$$

Zauważmy, że wiemy już, iż istnieją grafy silnie regularne z parametrami $(9, 4, 1, 2)$ i $(15, 6, 1, 3)$ ($t = 1$ i $t = 2$, odpowiednio). Można pokazać, że istnieje graf silnie regularny z parametrami $(27, 10, 1, 5)$ ($t = 4$). W podrozdziale 3.9 zobaczymy, że wszystkie te trzy grafy mogą być otrzymane przy pomocy tej samej konstrukcji.

Dowód. Z Twierdzenia 3.1.3 wiemy, że graf G jest spójny, więc jego wartościami własnymi są $-t-1$, 1 i $2 \cdot (t+1)$ na mocy Stwierdzenia 3.2.4. Niech $G_1 := \langle N_G(v) \rangle_G$. Z Lematu 3.6.1 wiemy, że graf G_1 jest 1-regularny. Ponadto $|N_G(v)| = 2 \cdot (t+1)$, a więc graf G_1 jest sumą rozłączną $t+1$ grafów izomorficznych z grafem K_2 , skąd

$$\text{Spec } G_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ t+1 & t+1 \end{pmatrix}$$

na mocy Stwierdzenia 2.2.2. W szczególności, jedyną lokalną wartością własną pierwszego rodzaju (grafu G względem wierzchołka v) jest -1 . W konsekwencji, Twierdzenie 3.6.5 implikuje, że jedyną lokalną wartością własną drugiego rodzaju jest $-t+1$ i jej krotność wynosi $t+1$. Ponieważ graf G_2 jest $(t+1)$ -regularny na mocy Lematu 3.6.1, więc $t+1$ jest wartością własną grafu G_2 na mocy Twierdzenia 2.2.3. Wiemy, że $t+1$ nie jest lokalną wartością własną drugiego rodzaju ani wartością własną grafu G , więc krotność $t+1$ jako wartości własnej grafu G_2 wynosi 1. Pozostałymi wartościami własnymi grafu G_2 mogą być tylko wartości własne grafu G , przy czym $2 \cdot (t+1)$ nie może być wartością własną grafu G_2 na mocy Twierdzenia 2.2.3, gdyż $2 \cdot (t+1) > t+1$. Podsumowując, możliwymi wartościami własnymi grafu G_2 są $-t-1$, $-t+1$, 1 i $t+1$, przy czym krotności wartości $-t+1$ i $t+1$ wynoszą $t+1$ i 1 , odpowiednio.

Oznaczmy przez x i y krotności wartości własnych $-t-1$ i 1 , odpowiednio. Wtedy

$$x + (t+1) + y + 1 = |M_G(v)| = 4 \cdot t.$$

Ponadto, Stwierdzenie 2.1.6 implikuje, że

$$x \cdot (-t-1) + (t+1)(-t+1) + y \cdot 1 + 1 \cdot (t+1) = 0.$$

W efekcie wyliczamy, że

$$x = \frac{-t^2 + 4 \cdot t}{t+2} \quad \text{i} \quad y = \frac{4 \cdot t^2 - 4}{t+2},$$

co kończy dowód. □

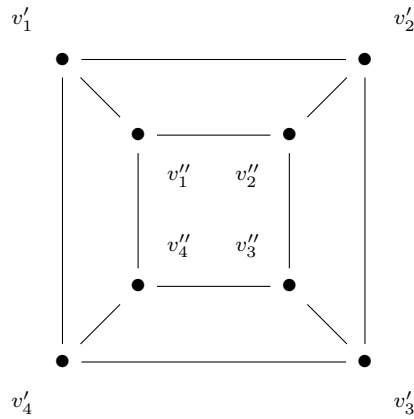
Stwierdzenie 3.7.7. *Graf $\overline{L(K_6)}$ jest jedynym (z dokładnością do izomorfizmu) grafem silnie regularnym z parametrami $(15, 6, 1, 3)$.*

Dowód. Niech G będzie grafem silnie regularnym z parametrami $(15, 6, 1, 3)$ i wybierzmy wierzchołek v grafu G . Niech $G_1 := \langle N_G(v) \rangle_G$ i $G_2 := \langle M_G(v) \rangle_G$.

Wtedy grafy G_1 i G_2 są 1- i 3-regularne na mocy Lematu 3.6.1. W szczególności Lemat 3.7.1 implikuje, że $G_1 \simeq G'_1 \sqcup G''_1 \sqcup G'''_1$, gdzie $G'_1 \simeq G''_1 \simeq G'''_1 \simeq K_2$. Z drugiej strony, z Lematu 3.7.6 wynika, że

$$\text{Spec } G_2 \simeq \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ graf G_2 jest 3-regularny, więc krotność 3 jako wartości własnej jest równa liczbie składowych grafu G_2 (Twierdzenie 2.2.3), zatem graf G_2 jest spójny. Ponadto Twierdzenia 2.4.3 implikuje, że graf G_2 jest dwudzielny. Analizując możliwe postaci 3-regularnych grafów dwudzielnych o 8 wierzchołkach, otrzymujemy, że $G_2 \simeq Q_3$, a więc graf G_2 ma postać



Niech u' i w' będą dwoma wierzchołkami grafu G'_1 . Wtedy graf $\langle N_G(u') \cap M_G(v) \rangle_G$ jest 1-regularny (na mocy Lematu 3.6.1) i ma 4 wierzchołki, więc z dokładnością do numeracji wierzchołków grafu G_2 możemy założyć, że

$$N_G(u') \cap M_G(v) = \{v'_1, v'_2, v''_3, v''_4\}.$$

Ponieważ $|N_G(u') \cap N_G(w')| = 1$ i $v \in N_G(u') \cap N_G(w')$, więc

$$N_G(w') \cap M_G(v) = \{v''_1, v''_2, v'_3, v'_4\}.$$

Podobnie, jeśli u'' i w'' są dwoma wierzchołkami grafu G''_1 , to z dokładnością do numeracji wierzchołków

$$N_G(u'') \cap M_G(v) = \{v'_1, v'_2, v''_3, v''_4\}$$

lub

$$N_G(u'') \cap M_G(v) = \{v'_1, v''_2, v'_3, v'_4\}.$$

Wiemy jednak, że $|N_G(u') \cap N_G(u'')| = 3$, więc

$$N_G(u'') \cap M_G(v) = \{v'_1, v''_2, v''_3, v'_4\}.$$

Wtedy

$$N_G(w'') \cap M_G(v) = \{v''_1, v'_2, v'_3, v''_4\}.$$

Analogicznie pokazujemy, że jeśli u''' i w''' są dwoma wierzchołkami grafu G''' , to z dokładnością do numeracji wierzchołków

$$N_G(u''') \cap M_G(v) = \{v'_1, v''_1, v'_3, v''_3\}$$

i

$$N_G(w''') \cap M_G(v) = \{v'_2, v''_2, v'_4, v''_4\},$$

co kończy dowód. □

Na zakończenie pokażemy jednoznaczność grafu Clebscha.

Twierdzenie 3.7.8. *Graf Clebscha jest jedynym grafem silnie regularnym z parametrami $(16, 5, 0, 2)$.*

Dowód. Niech G będzie grafem silnie regularnym z parametrami $(16, 5, 0, 2)$ i wybierzmy wierzchołek v grafu G . Ze Stwierdzenia 3.2.4 wiemy, że wartościami własnymi grafu G są -3 , 1 i 5 . Niech $G_1 := \langle N_G(v) \rangle_G$ i $G_2 := \langle M_G(v) \rangle_G$. Z Lematu 3.6.1 wynika, że $G_1 \simeq N_5$, więc

$$\text{Spec } G_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

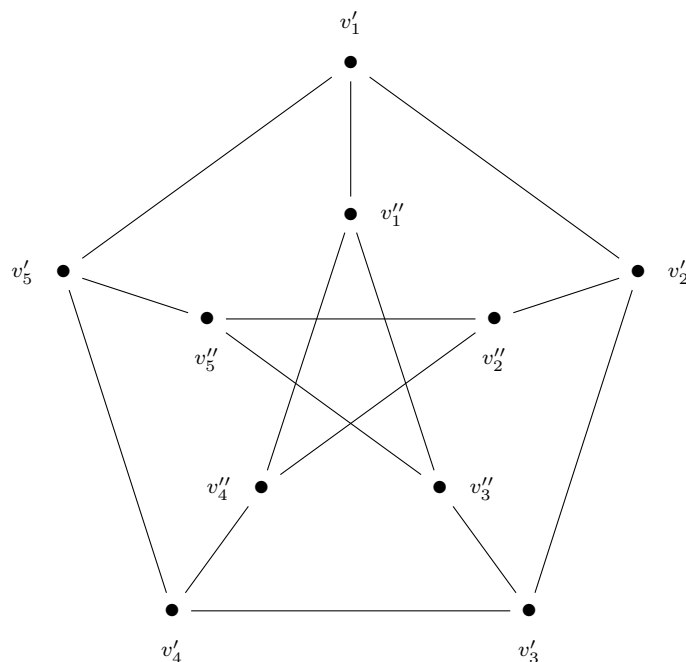
na mocy Stwierdzenia 2.2.1, zatem z Twierdzenia 3.6.5 wynika, że jedyną lokalną wartością własną grafu G drugiego rodzaju jest -2 (i krotność -2 jako wartości własnej grafu G_2 wynosi 4). W konsekwencji, możliwymi wartościami własnymi grafu G_2 są -3 , -2 , 1 i 3 . W szczególności, -1 nie jest wartością własną grafu G_2 , a więc Stwierdzenie 2.2.2 implikuje, że graf G_2 nie ma składowej izomorficznej z grafem K_4 . W konsekwencji, graf G_2 jest spójny, gdyż ze Stwierdzenia 1.1.1 wynika, że każda składowa grafu 3-regularnego musi mieć parzystą liczbę wierzchołków (a graf G_2 jest 3-regularny na mocy Lematu 3.6.1). Możemy zatem skorzystać ze Stwierdzenia 2.1.8, które implikuje, że graf G_2 ma co najmniej 3 wartości własne.

Ponieważ spektrum grafu G_2 nie jest symetryczne względem 0, więc graf G_2 nie jest dwudzielny na mocy Twierdzenia 2.4.3. Z tego samego stwierdzenia wynika więc również, że -3 nie jest wartością własną grafu G_2 . Wiemy, że -2 jest wartością własną grafu G_2 krotności 4. Dalej, Twierdzenie 2.2.3

implikuje, że krotność 3 jako wartości własnej grafu G_2 jest równa 1 (gdyż graf G_2 jest spójny oraz 3-regularny). W konsekwencji

$$\text{Spec } G_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

zatem graf G_2 ma dokładnie trzy wartości własne. Ze Stwierdzenia 3.2.7 wynika zatem, że graf G_2 jest silnie regularny. Wykorzystując Stwierdzenie 3.2.4, wyliczamy, że parametrami grafu G_2 są $(10, 3, 0, 1)$. Zatem graf G_2 jest grafem Petersena na mocy Stwierdzenia 3.7.5, a więc ma postać



Jeśli $u \in N_G(v)$, to $N_G(v) \cap M_G(v)$ jest czteroelementowym niezależnym zbiorem wierzchołków grafu G_2 . Ponieważ z jednej strony graf G_2 ma dokładnie pięć czteroelementowych niezależnych zbiorów wierzchołków, a mianowicie

$$\{v'_1, v'_3, v'_4, v''_5\}, \{v'_1, v'_4, v''_2, v''_3\}, \{v'_2, v'_4, v''_1, v''_5\}, \{v'_2, v'_5, v''_3, v''_4\}, \{v'_3, v'_5, v''_1, v''_2\},$$

a z drugiej strony graf G_1 ma dokładnie pięć wierzchołków, więc powyższa obserwacja wyznacza jednoznacznie (z dokładnością do izomorfizmu) graf G . $\square$

W naszych rozważaniach pominęliśmy parametry $(13, 6, 2, 3)$. W tym wypadku też można pokazać jednoznaczność odpowiedniego grafu silnie regularnego. Z drugiej strony, tabliczki mnożenia grup $\mathbb{Z}_4$ i $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ indukują dwa nieizomorficzne grafy silnie regularne $G_{A_{\mathbb{Z}_4}}$ i $G_{A_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}}$ z parametrami $(16, 6, 2, 2)$

(parametry tych grafów wyliczamy, wykorzystując Twierdzenie 3.4.1). Aby pokazać, że stosowne grafy nie są izomorficzne zauważmy, że $\alpha(G_{A_{\mathbb{Z}_4}}) < 4$ na mocy Lematu 3.4.5. Z drugiej strony, $\alpha(G_{A_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}}) = 4$ na mocy Lematu 3.4.4 i Twierdzenia 3.4.2, gdyż w podrozdziale 3.4 pokazaliśmy, że dla kwadratu L_Γ istnieje kwadrat ortogonalny, co oznacza, że tablica $A_{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}$ jest rozszerzalna.

3.8 Ograniczenia Kreina

Celem tego podrozdziału jest udowodnienie następującego twierdzenia. Nierówności udowodnione w tym twierdzeniu noszą nazwę ograniczeń Kreina. Dowód zostanie przeprowadzony w serii lematów.

Twierdzenie 3.8.1. *Niech G będzie prymitywnym grafem silnie regularnym z parametrami (n, k, a, c) i wartościami własnymi τ, θ i k . Wtedy*

$$\theta \cdot \tau^2 - 2 \cdot \theta^2 \cdot \tau - \theta^2 - k \cdot \theta + k \cdot \tau^2 + 2 \cdot k \cdot \tau \geq 0$$

i

$$\theta^2 \cdot \tau - 2 \cdot \theta \cdot \tau^2 - \tau^2 - k \cdot \tau + k \cdot \theta^2 + 2 \cdot k \cdot \theta \geq 0.$$

Ponadto, jeśli w pierwszej nierówności mamy równość, to $k \geq m_\theta$, gdzie m_θ jest krotnością wartości własnej θ . Podobnie, jeśli w drugiej nierówności mamy równość, to $k \geq m_\tau$, gdzie m_τ jest krotnością wartości własnej τ . Wreszcie, jeśli w jednej z nierówności mamy równość, to ma miejsce jeden z następujących przypadków:

- (1) Jeśli v jest wierzchołkiem grafu G , to graf $\langle N_G(v) \rangle_G$ jest pusty lub silnie regularny.
- (2) Jeśli v jest wierzchołkiem grafu G , to graf $\langle M_G(v) \rangle_G$ jest pełny lub silnie regularny.

Do zakończenia dowodu Twierdzenia 3.8.1 będziemy stosować wprowadzone w nim oznaczenia. Zauważmy, że ponieważ graf G jest prymitywny, więc $\theta \neq 0 \neq \tau$ na mocy Wniosku 3.2.6 (zauważmy, że nie zakładamy, iż $\tau < \theta$). Kluczową rolę w dowodzie będą odgrywały następujące związki pomiędzy wartościami własnymi grafu G a jego parametrami i krotnościami wartości własnych. Równości te zachodzą dla dowolnych spójnych grafów silnie regularnych (bez założenia prymitywności).

Lemat 3.8.2. *Mamy*

$$n = \frac{(k - \theta) \cdot (k - \tau)}{k + \theta \cdot \tau}, \quad a = k + \theta + \tau + \theta \cdot \tau \quad i \quad c = k + \theta \cdot \tau.$$

W konsekwencji,

$$n - k - 1 = -\frac{k \cdot (\theta + 1) \cdot (\tau + 1)}{k + \theta \cdot \tau}.$$

Ponadto,

$$m_\theta = \frac{k \cdot (k - \tau) \cdot (\tau + 1)}{(k + \theta \cdot \tau) \cdot (\tau - \theta)} \quad i \quad m_\tau = \frac{k \cdot (k - \theta) \cdot (\theta + 1)}{(k + \theta \cdot \tau) \cdot (\theta - \tau)}.$$

Dowód. Ze Stwierdzenia 3.2.4 wiemy, że

$$\theta + \tau = a - c \quad i \quad \theta \cdot \tau = c - k,$$

skąd natychmiast otrzymujemy wzory na a i c . Ponadto,

$$\frac{(k - \theta) \cdot (k - \tau)}{k + \theta \cdot \tau} = \frac{k^2 - k \cdot (\theta + \tau) + \theta \cdot \tau}{k + \theta \cdot \tau} = \frac{k^2 - k \cdot a + k \cdot c + c - k}{c} = n,$$

gdzie ostatnia równość jest konsekwencją Stwierdzenia 3.1.1. Wzór na $n - k - 1$ otrzymujemy w wyniku bezpośrednich rachunków. Wzory na m_θ i m_τ udowadniamy w podobny sposób. $\square$

Z Lematu 3.8.2 możemy inaczej przedstawić wyrażenia pojawiające się w Twierdzeniu 3.8.1.

Stwierdzenie 3.8.3. *Mamy*

$$\begin{aligned} \theta \cdot \tau^2 - 2 \cdot \theta^2 \cdot \tau - \theta^2 - k \cdot \theta + k \cdot \tau^2 + 2 \cdot k \cdot \tau &= \frac{\tau - \theta}{\tau} \cdot \frac{1}{n - k - 1} \cdot \\ &\left((m_\theta - 1) \cdot (k \cdot a - a^2 - (k - m_\theta) \cdot \tau^2) - (a + (k - m_\theta) \cdot \tau)^2 \right) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \theta^2 \cdot \tau - 2 \cdot \theta \cdot \tau^2 - \tau^2 - k \cdot \tau + k \cdot \theta^2 + 2 \cdot k \cdot \theta &= \frac{\theta - \tau}{\theta} \cdot \frac{1}{n - k - 1} \cdot \\ &\left((m_\tau - 1) \cdot (k \cdot a - a^2 - (k - m_\tau) \cdot \theta^2) - (a + (k - m_\tau) \cdot \theta)^2 \right). \end{aligned}$$

Dowód. Powyższe równości wynikają z bezpośrednich rachunków, które najlepiej wykonać przy pomocy systemu komputerowego potrafiącego wykonywać obliczenia symboliczne. $\square$

Zauważmy, że $\frac{\tau - \theta}{\tau} > 0$ i $\frac{\theta - \tau}{\theta} > 0$ na mocy Wniosku 3.2.6. W związku z powyższym, korzystając ze Stwierdzenia 3.8.3, możemy sformułować równoważnie Twierdzenie 3.8.1 następująco.

Twierdzenie 3.8.4. *Niech G będzie prymitywnym grafem silnie regularnym z parametrami (n, k, a, c) i wartościami własnymi τ, θ i k . Wtedy*

$$(m_\theta - 1) \cdot (k \cdot a - a^2 - (k - m_\theta) \cdot \tau^2) - (a + (k - m_\theta) \cdot \tau)^2 \geq 0$$

i

$$(m_\tau - 1) \cdot (k \cdot a - a^2 - (k - m_\tau) \cdot \theta^2) - (a + (k - m_\tau) \cdot \theta)^2 \geq 0.$$

Ponadto, jeśli w pierwszej nierówności mamy równość, to $k \geq m_\theta$. Podobnie, jeśli w drugiej nierówności mamy równość, to $k \geq m_\tau$. Wreszcie, jeśli w jednej z nierówności mamy równość, to ma miejsce jeden z następujących przypadków:

- (1) Jeśli v jest wierzchołkiem grafu G , to graf $\langle N_G(v) \rangle_G$ jest pusty, zaś graf $\langle M_G(v) \rangle$ jest pełny.
- (2) Jeśli v jest wierzchołkiem grafu G , to grafy $\langle N_G(v) \rangle_G$ i $\langle M_G(v) \rangle$ są silnie regularne.

W dalszym ciągu zatem skoncentrujemy się na dowodzie Twierdzenia 3.8.4. ■
Rozpocznijmy od następującego lematu.

Lemat 3.8.5. *Dla każdego wierzchołka v grafu G suma krotności liczb a i τ jako wartości własnych grafu $\langle N_G(v) \rangle_G$ jest nie mniejsza niż $k - m_\theta + 1$, przy czym krotność liczby τ jako wartości własnej grafu $\langle N_G(v) \rangle_G$ jest nie mniejsza niż $k - m_\theta$.*

Dowód. Wiemy z Lematu 3.6.1, że graf $\langle N_G(v) \rangle_G$ jest a -regularny. W szczególności, Twierdzenie 2.2.3 implikuje, że a jest wartością własną grafu $\langle N_G(v) \rangle_G$, ■
której odpowiada wektor własny $\mathbf{1}_{N_G(v)}$. Zatem teza jest oczywista, jeśli $k \leq m_\theta$, więc możemy założyć, że $k > m_\theta$. Wystarczy udowodnić, że jeśli $\mathcal{E}$ jest przestrzenią wektorów $\mathbf{v}$ takich, że

$$A_{\langle N_G(v) \rangle_G} \cdot \mathbf{v} = \tau \cdot \mathbf{v} \quad \text{i} \quad \sum_{u \in N_G(v)} \mathbf{v}(u) = 0,$$

to $\dim \mathcal{E} \geq k - m_\theta$.

Niech $\mathcal{U}$ będzie przestrzenią wszystkich wektorów $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{V_G}$ takich, że $\mathbf{v}(v) = 0$,

$$\sum_{u \in N_G(v)} \mathbf{v}(u) = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{u \in M_G(v)} \mathbf{v}(u) = 0.$$

Wtedy $\dim \mathcal{U} = n - 3$.

Podobnie, niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią wektorów $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{V_G}$ takich, że

$$A_G \cdot \mathbf{v} = \tau \cdot \mathbf{v} \quad \text{i} \quad \sum_{u \in N_G(v)} \mathbf{v}(u) = 0.$$

Zauważmy, że $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Istotnie,

$$(3.10) \quad (A_G \cdot \mathbf{v})(v) = \sum_{u \in N_G(v)} \mathbf{v}(u) = 0,$$

więc

$$\tau \cdot \mathbf{v}(v) = (\tau \cdot \mathbf{v})(v) = (A_G \cdot \mathbf{v})(v) = 0,$$

skąd $\mathbf{v}(v) = 0$, gdyż $\tau \neq 0$. Ponadto

$$\sum_{u \in M_G(v)} \mathbf{v}(u) = \sum_{u \in V_G} \mathbf{v}(u) - \sum_{u \in N_G(v)} \mathbf{v}(u) - \mathbf{v}(v) = \mathbf{1}^{\text{tr}} \cdot \mathbf{v} = 0,$$

gdzie ostatnia równość jest konsekwencją Twierdzenia 2.2.3 (i faktu, że wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są prostopadłe). Zauważmy również, że

$$\dim \mathcal{V} \geq m_\tau - 1 = n - m_\theta - 1 - 1 = n - m_\theta - 2.$$

Niech wreszcie $\mathcal{W}$ będzie przestrzenią wektorów $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{V_G}$ takich, że $\mathbf{v}(w) = 0$ dla każdego $w \in V_G \setminus N_G(v)$ i

$$\sum_{u \in N_G(v)} \mathbf{v}(u) = 0.$$

Wtedy $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$ i $\dim \mathcal{W} = k - 1$.

Zauważmy, że jeśli $\mathbf{v} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$, to $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N_G(v)}$,

$$\sum_{u \in N_G(v)} \mathbf{v}(u) = 0$$

i

$$A_{\langle N_G(v) \rangle_G} \cdot \mathbf{v} = (A_G \cdot \mathbf{v})|_{N_G(v)} = (\tau \cdot \mathbf{v})|_{N_G(v)} = \tau \cdot \mathbf{v}.$$

Innymi słowy, $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \subseteq \mathcal{E}$. Stąd

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{E} &\geq \dim(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = \dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W} - \dim(\mathcal{V} + \mathcal{W}) \\ &\geq \dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W} - \dim \mathcal{U} \\ &\geq (n - m_\theta - 2) + (k - 1) - (n - 3) = k - m_\theta, \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Dwa następne lematy stanowią w istocie dowód pierwszej z nierówności z Twierdzenia 3.8.4.

Lemat 3.8.6. *Jeśli $k \geq m_\theta$, to*

$$(m_\theta - 1) \cdot (k \cdot a - a^2 - (k - m_\theta) \cdot \tau^2) - (a + (k - m_\theta) \cdot \tau)^2 \geq 0.$$

Równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wierzchołka v grafu G graf $\langle N_G(v) \rangle_G$ ma conajwyżej trzy wartości własne. Ponadto, jeśli ma miejsce równość i graf $\langle N_G(v) \rangle_G$ ma dokładnie trzy wartości własne, to $k > m_\theta$ i

$$\text{Spec}\langle N_G(v) \rangle_G = \begin{pmatrix} \sigma & \tau & a \\ m_\theta - 1 & k - m_\theta & 1 \end{pmatrix}$$

dla pewnej liczby rzeczywistej σ .

Dowód. Wybierzmy wierzchołek v grafu G . Wiemy z Lematu 3.6.1, że graf $\langle N_G(v) \rangle_G$ jest a -regularny. W szczególności, Twierdzenie 2.2.3 implikuje, że a jest wartością własną grafu $\langle N_G(v) \rangle_G$. Korzystając dodatkowo z Lematu 3.8.5, otrzymujemy zatem, że jeśli $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ są wszystkimi wartościami własnymi grafu $\langle N_G(v) \rangle_G$, to możemy założyć, iż $\sigma_1 = a$ oraz $\sigma_2 = \dots = \sigma_{k-m_\theta+1} = \tau$. Wiemy, że

$$\sum_{i \in [1, k]} \sigma_i = 0$$

na mocy Stwierdzenia 2.1.6, a więc

$$\sum_{i \in [k-m_\theta+2, k]} \sigma_i = -a - (k - m_\theta) \cdot \tau.$$

Podobnie,

$$\sum_{i \in [1, k]} \sigma_i^2 = k \cdot a$$

na mocy Stwierdzenia 2.1.7, a więc

$$\sum_{i \in [k-m_\theta+2, k]} \sigma_i^2 = k \cdot a - a^2 - (k - m_\theta) \cdot \tau^2.$$

Z nierówności Cauchy'ego–Schwartz'a wiadomo, że

$$(m_\theta - 1) \cdot \left(\sum_{i \in [k-m_\theta+2, k]} \sigma_i^2 \right) \geq \left(\sum_{i \in [k-m_\theta+2, k]} \sigma_i \right)^2,$$

przy czym mamy równość wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma_{k-m_\theta+2} = \dots = \sigma_k$. Stąd natychmiast wynika teza. $\square$

Lemat 3.8.7. *Jeśli $k < m_\theta$, to*

$$(m_\theta - 1) \cdot (k \cdot a - a^2 - (k - m_\theta) \cdot \tau^2) - (a + (k - m_\theta) \cdot \tau)^2 > 0.$$

Dowód. Rozważmy wielomian $P \in \mathbb{R}[t]$ dany wzorem

$$P := (m_\theta - 1) \cdot (k \cdot a - a^2 - (k - m_\theta) \cdot t^2) - (a + (k - m_\theta) \cdot t)^2.$$

Wtedy

$$P = (k - 1) \cdot (m_\theta - k) \cdot t^2 + 2 \cdot a \cdot (m_\theta - k) \cdot t + (m_\theta - 1) \cdot k \cdot a - m_\theta \cdot a^2,$$

jest to więc wielomian kwadratowy, gdyż $1 < k < m_\theta$. Wyróżnik Δ tego wielomianu jest równy

$$\Delta = -4 \cdot a \cdot k \cdot (m_\theta - k) \cdot (m_\theta - 1) \cdot (k - 1 - a),$$

więc $\Delta < 0$ o ile $a \neq 0$ (zauważmy, że $a < k - 1$ na mocy Twierdzenia 3.1.3). W szczególności, jeśli $a \neq 0$, to $P(\lambda) > 0$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$, a więc także $P(\tau) > 0$.

Przypuśćmy zatem, że $a = 0$. Wtedy

$$P = (k - 1) \cdot (m_\theta - k) \cdot t^2,$$

więc $P(\tau) > 0$, gdyż $\tau \neq 0$ na mocy Wniosku 3.2.6. □

Podsumujmy Lematy 3.8.6 i 3.8.7.

Wniosek 3.8.8. *Mamy*

$$(m_\theta - 1) \cdot (k \cdot a - a^2 - (k - m_\theta) \cdot \tau^2) - (a + (k - m_\theta) \cdot \tau)^2 \geq 0.$$

Równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $k \geq m_\theta$ i dla każdego wierzchołka v grafu G graf $\langle N_G(v) \rangle_G$ ma co najwyżej trzy wartości własne. Ponadto, jeśli ma miejsce równość i graf $\langle N_G(v) \rangle_G$ ma dokładnie trzy wartości własne, to $k > m_\theta$ i

$$\text{Spec}\langle N_G(v) \rangle_G = \begin{pmatrix} \sigma & \tau & a \\ m_\theta - 1 & k - m_\theta & 1 \end{pmatrix}$$

dla pewnej liczby rzeczywistej σ .

Przyjrzymy się teraz dokładnie sytuacji, gdy w powyższej nierówności mam miejsce równość.

Lemat 3.8.9. *Jeśli*

$$(m_\theta - 1) \cdot (k \cdot a - a^2 - (k - m_\theta) \cdot \tau^2) - (a + (k - m_\theta) \cdot \tau)^2 = 0,$$

to $k \geq m_\theta$. Ponadto, jeśli $k = m_\theta$, to $a = 0$, natomiast jeśli $k > m_\theta$, to dla każdego wierzchołka v grafu G graf $\langle N_G(v) \rangle_G$ jest silnie regularny.

Dowód. Z Wniosku 3.8.8 wiemy, że jeśli ma miejsce równość, to $k \geq m_\theta$. Jeśli $k = m_\theta$, to otrzymujemy warunek

$$(k - 1) \cdot (k \cdot a - a^2) - a^2 = 0,$$

który przyjmuje postać

$$k \cdot a \cdot (k - a - 1) = 0.$$

Oczywiście $k \neq 0$. Ponadto $a \neq k - 1$ na mocy Twierdzenia 3.1.3, gdyż graf G jest spójny. Stąd $a = 0$.

Założmy teraz, że $k > m_\theta$ oraz ustalmy wierzchołek v grafu G . Wtedy z Wniosku 3.8.8 wiemy, że graf $\langle N_G(v) \rangle_G$ ma co najwyżej trzy wartości własne. Zbadamy teraz każdy przypadek osobno.

Założmy najpierw, że graf $\langle N_G(v) \rangle_G$ ma dokładnie jedną wartość własną. Ze Stwierdzenia 2.1.6 wynika, że tą jedyną wartością własną jest 0. Z drugiej strony, z Lematu 3.8.5 wiemy, że τ jest wartością własną grafu $\langle N_G(v) \rangle_G$. Ostatecznie, $\tau = 0$, co jest niemożliwe wobec Wniosku 3.2.6.

Założmy zatem, że graf $\langle N_G(v) \rangle_G$ ma dokładnie dwie wartości własne. W szczególności, graf $\langle N_G(v) \rangle_G$ nie jest pusty na mocy Stwierdzenia 2.2.1, a więc $a > 0$, gdyż Lemat 3.6.1 implikuje, że graf $\langle N_G(v) \rangle_G$ jest a -regularny. Ponieważ wtedy też każda składowa grafu $\langle N_G(v) \rangle_G$ jest a -regularna, więc każda składowa grafu $\langle N_G(v) \rangle_G$ ma co najmniej dwa wierzchołki. W szczególności, jeśli H jest składową grafu $\langle N_G(v) \rangle_G$, to $\text{diam } H \geq 1$, więc Stwierdzenie 2.1.8 implikuje, że każda składowa H grafu ma co najmniej dwie wartości własne. Ostatecznie, graf H ma dokładnie dwie wartości własne (na mocy Stwierdzenia 2.1.5) i $\text{diam } H = 1$ (na mocy Stwierdzenia 2.1.8). Z powyższych rozważań wynika, że każda składowa grafu $\langle N_G(v) \rangle_G$ jest grafem pełnym. Aby pokazać, że graf $\langle N_G(v) \rangle_G$ jest silnie regularny wystarczy zauważyć, że graf $\langle N_G(v) \rangle_G$ nie jest spójny. Gdyby jednak tak było, to $a = k - 1$, co jest niemożliwe wobec Twierdzenia 3.1.3 (przypomnijmy, że graf G jest prymitywny, a więc spójny).

Na zakończenie założmy, że graf $\langle N_G(v) \rangle_G$ ma dokładnie trzy wartości własne. Z Wniosku 3.8.8 wiemy, że a jest jednokrotną wartością własną grafu $\langle N_G(v) \rangle_G$. Ponieważ graf $\langle N_G(v) \rangle_G$ jest a -regularny na mocy Lematu 3.6.1, więc oznacza to, że graf $\langle N_G(v) \rangle_G$ jest spójny na mocy Twierdzenia 2.2.3. Zatem teza wynika ze Stwierdzenia 3.2.7. $\square$

Możemy teraz przystąpić do dowodu Twierdzenia 3.8.4.

Dowód Twierdzenia 3.8.4. Nierówność

$$(m_\theta - 1) \cdot (k \cdot a - a^2 - (k - m_\theta) \cdot \tau^2) - (a + (k - m_\theta) \cdot \tau)^2 \geq 0$$

jest konsekwencją Wniosku 3.8.8. Nierówność

$$(m_\tau - 1) \cdot (k \cdot a - a^2 - (k - m_\tau) \cdot \theta^2) - (a + (k - m_\tau) \cdot \theta)^2 \geq 0.$$

wynika przez symetrię.

Założmy teraz, że

$$(m_\theta - 1) \cdot (k \cdot a - a^2 - (k - m_\theta) \cdot \tau^2) - (a + (k - m_\theta) \cdot \tau)^2 = 0$$

oraz ustalmy wierzchołek v grafu G . Z Lematu 3.8.9 wiemy, że wtedy $k \geq m_\theta$ oraz graf $\langle N_G(v) \rangle_G$ jest albo pusty (na mocy Lematu 3.6.1, gdyż $a = 0$) lub silnie regularny. Aby zbadać własności grafu $\langle M_G(v) \rangle_G$ zauważmy, że $\langle M_G(v) \rangle_G = \overline{\langle N_{\overline{G}}(v) \rangle_{\overline{G}}}$. Rozważmy zatem graf $\overline{G}$. Ze Stwierdzenia 3.1.2 wiemy, że graf $\overline{G}$ jest silnie regularny. Ponadto Wniosek 2.2.4 implikuje, że

$$\text{Spec } \overline{G} = \begin{pmatrix} \bar{\tau} & \bar{\theta} & \bar{k} \\ m_{\bar{\tau}} & m_{\bar{\theta}} & 1 \end{pmatrix},$$

gdzie $\bar{\tau} = -1 - \tau$, $\bar{\theta} = -1 - \theta$, $\bar{k} = n - k - 1$, $m_{\bar{\tau}} = m_\tau$ i $m_{\bar{\theta}} = m_\theta$. Wykorzystując Lemat 3.8.2, otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} & \bar{\theta} \cdot \bar{\tau}^2 - 2 \cdot \bar{\theta}^2 \cdot \bar{\tau} - \bar{\theta}^2 - \bar{k} \cdot \bar{\theta} + \bar{k} \cdot \bar{\tau}^2 + 2 \cdot \bar{k} \cdot \bar{\tau} \\ &= -\frac{(\theta + 1) \cdot \tau}{k + \theta \cdot \tau} \cdot (\theta \cdot \tau^2 - 2 \cdot \theta^2 \cdot \tau - \theta^2 - k \cdot \theta + k \cdot \tau^2 + 2 \cdot k \cdot \tau). \end{aligned}$$

Korzystając ze Stwierdzenia 3.8.3, kolejno dla grafów $\overline{G}$ i G , otrzymujemy zatem, że

$$\begin{aligned} & (m_{\bar{\theta}} - 1) \cdot (\bar{k} \cdot \bar{a} - \bar{a}^2 - (\bar{k} - m_{\bar{\theta}}) \cdot \bar{\tau}^2) - (\bar{a} + (\bar{k} - m_{\bar{\theta}}) \cdot \bar{\tau})^2 = \\ &= \frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau} - \bar{\theta}} \cdot (n - \bar{k} - 1) \\ & \quad \cdot (\bar{\theta} \cdot \bar{\tau}^2 - 2 \cdot \bar{\theta}^2 \cdot \bar{\tau} - \bar{\theta}^2 - \bar{k} \cdot \bar{\theta} + \bar{k} \cdot \bar{\tau}^2 + 2 \cdot \bar{k} \cdot \bar{\tau}) \\ &= -\frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau} - \bar{\theta}} \cdot (n - \bar{k} - 1) \cdot \frac{(\theta + 1) \cdot \tau}{k + \theta \cdot \tau} \\ & \quad \cdot (\theta \cdot \tau^2 - 2 \cdot \theta^2 \cdot \tau - \theta^2 - k \cdot \theta + k \cdot \tau^2 + 2 \cdot k \cdot \tau) \\ &= -\frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau} - \bar{\theta}} \cdot (n - \bar{k} - 1) \cdot \frac{(\theta + 1) \cdot \tau}{k + \theta \cdot \tau} \cdot \frac{\tau - \theta}{\tau} \cdot \frac{1}{n - k - 1} \end{aligned}$$

$$\cdot ((m_\theta - 1) \cdot (k \cdot a - a^2 - (k - m_\theta) \cdot \tau^2) - (a + (k - m_\theta) \cdot \tau)^2) = 0.$$

Lemat 3.8.9, zastosowany dla grafu $\overline{G}$, implikuje, że graf $\langle N_{\overline{G}}(v) \rangle$ jest pusty lub silnie regularny, a więc graf $\langle M_G(v) \rangle$ jest pełny lub silnie regularny (na mocy Wniosku 2.2.4). $\square$

Przedstawimy teraz przykład zastosowania ograniczeń Kreina. Kolejne zastosowania zobaczymy w podrozdziale 3.9.

Wniosek 3.8.10. *Nie istnieje silnie regularny graf z parametrami $(28, 9, 0, 4)$.* ■

Dowód. Przypuśćmy, że G jest grafem silnie regularnym z parametrami $(28, 9, 0, 4)$. ■
Wtedy graf G jest prymitywny na mocy Wniosku 3.1.5. Ponadto, ze Stwierdzenie 3.2.4 wiemy, że

$$\text{Spec } G = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 9 \\ 6 & 21 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dla $\tau = -5$, $\theta = 1$ i $k = 9$ mamy

$$\theta^2 \cdot \tau - 2 \cdot \theta \cdot \tau^2 - \tau^2 - k \cdot \tau + k \cdot \theta^2 + 2 \cdot k \cdot \theta = -8 \not\geq 0,$$

co kończy dowód na mocy Twierdzenia 3.8.1. $\square$

3.9 Czworokąty uogólnione

W tym podrozdziale będziemy zajmować się grafami pochodzącymi od struktur kombinatorycznych nazywanych czworokątami uogólnionymi. Nasze rozważania rozpoczniemy od zdefiniowania czworokątów uogólnionych.

Czworokątem uogólnionym nazywamy każdą parę $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$, gdzie $\mathcal{P}$ jest niepustym skończonym zbiorem, którego elementy nazywamy *punktami*, natomiast $\mathcal{L}$ jest niepustą rodziną niepustych podzbiorów zbioru $\mathcal{P}$, której elementy nazywamy *prostymi*, taką, że spełnione są następujące warunki:

- (1) dla dowolnych różnych punktów $P, Q \in \mathcal{P}$ istnieje co najwyżej jedna prosta $l \in \mathcal{L}$ taka, że $P, Q \in l$ (w szczególności, jeśli $l_1, l_2 \in \mathcal{L}$ i $l_1 \neq l_2$, to $|l_1 \cap l_2| \leq 1$),
- (2) jeśli $P \in \mathcal{P}$ jest punktem nienależącym do prostej $l \in \mathcal{L}$, to istnieje dokładnie jeden punkt $Q \in l$ taki, że punkty P i Q są *współliniowe*, tzn. leżą na tej samej prostej (w szczególności, dla każdego punktu $P \in \mathcal{P}$ istnieje prosta $l \in \mathcal{L}$ taka, że $P \in l$).

Jeśli para $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ jest czworokątem uogólnionym, to definiujemy *czworokąt dualny* $(\mathcal{L}, \mathcal{P}^*)$ wzorem

$$\mathcal{P}^* := \{P^* : P \in \mathcal{P}\},$$

gdzie

$$P^* := \{l \in \mathcal{L} : P \in l\}$$

dla każdego $P \in \mathcal{P}$ (tzn. P^* jest zbiorem wszystkich linii przechodzących przez punkt P). Innymi słowy, czworokąt dualny powstaje z wyjściowego czworokąta przez zamianę rolami prostych i punktów. Łatwo zauważyć, że para $(\mathcal{L}, \mathcal{P}^*)$ jest istotnie czworokątem uogólnionym.

W naszej pracy będziemy zajmować się regularnymi czworokątami uogólnionymi. Czworokąt uogólniony $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ nazywamy *regularnym*, jeśli istnieją całkowite liczby nieujemne $s, t \in \mathbb{N}$ takie, że $|l| = s + 1$ dla każdej prostej $l \in \mathcal{L}$ oraz

$$\#\{l \in \mathcal{L} : P \in l\} = t + 1$$

dla każdego punktu $P \in \mathcal{P}$. W powyższej sytuacji mówimy, że czworokąt uogólniony $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ jest *rzędu* (s, t) . Parametry s i t w jednoznaczny sposób wyznaczają liczbę punktów czworokąta. Zaczniemy od następującego lematu.

Lemat 3.9.1. *Jeśli para $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ jest regularnym czworokątem uogólnionym rzędu (s, t) i $P \in \mathcal{P}$,*

$$\#\{Q \in \mathcal{P} : Q \neq P \text{ i istnieje } l \in \mathcal{L} \text{ taka, że } P, Q \in l\} = s \cdot (t + 1).$$

Dowód. Punkt P leży na $t + 1$ prostych i na każdej z tych $t + 1$ prostych znajduje się s punktów różnych P . Ponadto, dla każdych takich dwóch prostych punkt P jest jedynym punktem wspólnym. $\square$

Stwierdzenie 3.9.2. *Jeśli para $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ jest regularnym czworokątem uogólnionym rzędu (s, t) , to*

$$|\mathcal{P}| = (s + 1) \cdot (s \cdot t + 1).$$

Dowód. Ustalmy prostą $l_0 \in \mathcal{L}$. Dla każdego punktu $P \in l_0$ rozważmy zbiory

$$\mathcal{L}_P := \{l \in \mathcal{L} : P \in l \text{ i } l \neq l_0\}$$

i

$$\mathcal{P}_P := \{P\} \cup \bigcup_{l \in \mathcal{L}_P} (l \setminus \{P\})$$

(innymi słowy, $\mathcal{P}_P$ jest zbiorem punktów leżących na prostych przechodzących przez punkt P różnych od prostej l_0). Wtedy z Lematu 3.9.1 wynika, że

$$|\mathcal{P}_P| = 1 + s \cdot t$$

dla każdego $P \in l_0$. Ponadto, jeśli $P, Q \in l_0$ i $P \neq Q$, to $\mathcal{P}_P \cap \mathcal{P}_Q = \emptyset$. Istotnie, gdyby $R \in \mathcal{P}_P \cap \mathcal{P}_Q$, to na prostej l_0 istniałyby dwa punkty (P i Q) leżące na tej samej prostej co R . W szczególności,

$$\left| \bigcup_{P \in l_0} \mathcal{P}_P \right| = (s+1) \cdot (s \cdot t + 1).$$

Dla zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że

$$\bigcup_{P \in l_0} \mathcal{P}_P = \mathcal{P}.$$

Oczywiście, $\bigcup_{P \in l_0} \mathcal{P}_P \subseteq \mathcal{P}$. Zatem założymy, że $Q \in \mathcal{P}$. Jeśli $Q \in l_0$, to oczywiście $Q \in \bigcup_{P \in l_0} \mathcal{P}_P$. Z drugiej strony, jeśli $Q \notin l_0$, to istnieje $P \in l_0$ taki, że P i Q leżą na jednej prostej. Wtedy $Q \in \mathcal{P}_P$, co kończy dowód. $\square$

Na zakończenie tych wstępnych rozważań zauważmy, że jeśli czworokąt dualny do regularnego czworokąta uogólnionego jest również regularny.

Lemat 3.9.3. *Jeśli para $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ jest regularnym czworokątem uogólnionym rzędu (s, t) , to para $(\mathcal{L}, \mathcal{P}^*)$ jest regularnym czworokątem uogólnionym rzędu (t, s) .*

Dowód. Oczywiście. $\square$

Dla czworokąta uogólnionego $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ definiujemy nieskierowany graf prosty bez pętli $G_{\mathcal{P}, \mathcal{L}}$, którego zbiorem wierzchołków jest zbiór $\mathcal{P}$, a dwa wierzchołki P i Q są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy punkty P i Q leżą na jednej prostej w czworokącie $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$. Innymi słowy, $V_{G_{\mathcal{P}, \mathcal{L}}} := \mathcal{P}$,

$$E_{G_{\mathcal{P}, \mathcal{L}}} := \{\{P, Q\} : P, Q \in \mathcal{P}, P \neq Q \text{ i istnieje prosta } l \in \mathcal{L} \text{ taka, że } P, Q \in l\}$$

i

$$p_{G_{\mathcal{P}, \mathcal{L}}}(e) := e \quad (e \in E_{G_{\mathcal{P}, \mathcal{L}}}).$$

Zauważmy, że znając graf $G_{\mathcal{P}, \mathcal{L}}$, możemy odtworzyć czworokąt $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$. Jeśli wyjściowy czworokąt jest regularny, to otrzymany graf jest silnie regularny.

Lemat 3.9.4. *Jeśli para $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ jest regularnym czworokątem uogólnionym rzędu (s, t) , to graf $G_{\mathcal{P}, \mathcal{L}}$ jest silnie regularny z parametrami*

$$((s+1) \cdot (s \cdot t + 1), s \cdot (t+1), s-1, t+1).$$

Dowód. W Stwierdzeniu 3.9.2 pokazaliśmy już, że

$$|\mathcal{V}_{G_{\mathcal{P},\mathcal{L}}}| = |\mathcal{P}| = (s+1) \cdot (s \cdot t + 1).$$

Ponadto, z Lematu 3.9.1 wynika, że jeśli $P \in \mathcal{P}$, to

$$|N_{G_{\mathcal{P},\mathcal{L}}}(P)| = s \cdot (t+1).$$

Ustalmy teraz punkty $P, Q \in \mathcal{P}$ takie, że istnieje prosta $l \in \mathcal{L}$ taka, że $P, Q \in l$. Oczywiście, jeśli $R \in l$ i $P \neq R \neq Q$, to punkt R jest wspólnym sąsiadem wierzchołków P i Q . Z drugiej strony, jeśli punkt R jest sąsiadem punktu P w grafie $G_{\mathcal{P},\mathcal{L}}$, który nie leży na prostej l , to z warunku (2) definicji czworokąta uogólnionego wynika, że nie istnieje prosta l' taka, że $Q, R \in l'$. Z powyższego wynika, że

$$N_{G_{\mathcal{P},\mathcal{L}}}(P) \cap N_{G_{\mathcal{P},\mathcal{L}}}(Q) = l \setminus \{P, Q\},$$

a więc

$$|N_{G_{\mathcal{P},\mathcal{L}}}(P) \cap N_{G_{\mathcal{P},\mathcal{L}}}(Q)| = s - 1.$$

Na zakończenie założymy, że $P, Q \in \mathcal{P}$ oraz punkty P i Q nie są sąsiadami w grafie $G_{\mathcal{P},\mathcal{L}}$. Wtedy na każdej prostej przechodzącej przez punkt P istnieje dokładnie jeden punkt współliniowy z punktem Q , skąd wynika, że

$$|N_{G_{\mathcal{P},\mathcal{L}}}(P) \cap N_{G_{\mathcal{P},\mathcal{L}}}(Q)| = t + 1,$$

co kończy dowód. □

Możemy teraz opisać spektrum grafu stowarzyszonego z regularnym czworokątem uogólnionym.

Lemat 3.9.5. *Jeśli para $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ jest regularnym czworokątem uogólnionym rzędu (s, t) , to*

$$\text{Spec } G_{\mathcal{P},\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} -t-1 & s-1 & s \cdot (t+1) \\ \frac{s^2 \cdot (s \cdot t + 1)}{s+t} & \frac{s \cdot t \cdot (s+1) \cdot (t+1)}{s+t} & 1 \end{pmatrix}.$$

Dowód. Bezpośrednie rachunki wykorzystujące Stwierdzenie 3.2.4 oraz Lemat 3.9.4. □

Lemat 3.9.5 implikuje między innymi, że jeśli istnieje czworokąt uogólniony z parametrami (s, t) , to

$$s+t \mid s^2 \cdot (s \cdot t + 1), s \cdot t(s+1).$$

Inne warunki otrzymujemy, stosując ograniczenia Kreina.

Lemat 3.9.6. *Jeśli para $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ jest regularnym czworokątem rzędu (s, t) takim, że $s, t > 1$, to*

$$s \leq t^2 \quad \text{ i } \quad t \leq s^2.$$

Dowód. Z Twierdzenia 3.8.1 wiemy, że jeśli $\tau < \theta < k$ są wartościami własnymi grafu $G_{\mathcal{P}, \mathcal{L}}$, to

$$\theta^2 \cdot \tau - 2 \cdot \theta \cdot \tau^2 - \tau^2 - k \cdot \tau + k \cdot \theta^2 + 2 \cdot k \cdot \theta \geq 0.$$

Z Lematu 3.9.5 wiemy, że

$$\tau = -t - 1, \quad \theta = s - 1 \quad \text{ i } \quad k = s \cdot (t + 1).$$

Podstawiając te wartości, otrzymujemy, że

$$s^3 \cdot t - s^2 \cdot t - s \cdot t^2 + t^2 - s \cdot t + t + s^3 - s^2 \geq 0.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} s^3 \cdot t - s^2 \cdot t + s^3 - s^2 - s \cdot t^2 + t^2 - s \cdot t + t \\ = (s - 1) \cdot (s^2 \cdot t + s^2 - t^2 - t) = (s - 1) \cdot (t + 1) \cdot (s^2 - t), \end{aligned}$$

więc $s^2 \geq t$ (przypomnijmy, że założenia $s > 1$). Nierówność, $t^2 \geq s$ otrzymujemy przez dualność (wykorzystując Lemat 3.9.3). $\square$

Zbadamy teraz dokładniej regularne czworokątów uogólnionych, w którym proste mają dokładnie trzy elementy. Okaże się, że z dokładnością do izomorfizmu, istnieją tylko 3 takie czworokąty.

Lemat 3.9.7. *Jeśli para $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ jest regularnym czworokątem uogólnionym rzędu $(2, t)$, to $t \in \{1, 2, 4\}$.*

Dowód. Z Lematu 3.9.5 wiemy, że $-t - 1$ jest wartością własną grafu $G_{\mathcal{P}, \mathcal{L}}$ krotności

$$\frac{8 \cdot t + 4}{t + 2} = 8 - \frac{12}{t + 2},$$

a więc $t \in \{1, 2, 4, 10\}$. Dodatkowo, Lemat 3.9.6 implikuje, że $t \leq 4$, co kończy dowód. $\square$

Zauważmy, że jeśli $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ jest regularnym czworokątem uogólnionym rzędu $(2, t)$, to graf $G_{\mathcal{P}, \mathcal{L}}$ jest silnie regularnym grafem z parametrami $(6 \cdot t + 3, 2 \cdot t + 2, 1, t + 1)$. Z drugiej strony, każdy graf silnie regularny z takimi parametrami wyznacza regularny czworokąt uogólniony.

Lemat 3.9.8. *Jeśli G jest grafem silnie regularnym z parametrami $(6 \cdot t + 3, 2 \cdot t + 2, 1, t)$, $t \in \mathbb{N}_+$, to istnieje regularny czworokąt uogólniony $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ rzędu $(2, t)$ taki, że $G = G_{\mathcal{P}, \mathcal{L}}$.*

Dowód. Definiujemy czworokąt $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ wzorami:

$$\mathcal{P} := |V_G| \quad \text{ i } \quad \mathcal{L} := \{U \subseteq V_G : \langle U \rangle_G \simeq K_3\}.$$

Pozostawiamy Czytelnikowi udowodnienie, że para $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ jest istotnie regularnym czworokątem uogólnionym z parametrami $(2, t)$. $\square$

Wiemy, że istnieją jedyne (z dokładnością do izomorfizmu) grafy silnie regularne z parametrami $(9, 4, 1, 2)$ i $(15, 6, 1, 3)$ (Stwierdzenia 3.7.4 i 3.7.7). Można też pokazać, że istnieje jedyny graf silnie regularny z parametrami $(27, 10, 1, 4)$ (jest to dopełnienie tzw. graf Schläfliego). Stąd wynika, że istnieją jedyne regularne czworokąty uogólnione z parametrami $(2, t)$.