

Algebra liniowa z geometrią II
Zestaw 9

1. Udowodnić, że dowolne dwie proste w $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ przecinają się.
2. Opisać przekrój dwóch płaszczyzn w $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.
3. Wskazać dowolne przekształcenie rzutowe $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ takie, że

$$\begin{aligned}T(1 : 1 : 1) &= (0 : 0 : 1), \\T(1 : 1 : 0) &= (0 : 1 : 1), \\T(1 : 0 : 0) &= (1 : 1 : 0).\end{aligned}$$

4. Wskazać dowolne przekształcenie rzutowe $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ takie, że
 - (a) obrazem prostej $x = 0$ jest prosta $x = 0$ i obrazem prostej $y = 0$ jest prosta $x - z = 0$;
 - (b) obrazem prostej $x + y - z = 0$ jest prosta $x - z = 0$ i obrazem prostej $x + y = 0$ jest prosta $y = 0$.

5. Wyznaczyć liczbę punktów przestrzeni $\mathbb{P}_n(K)$, gdzie K jest ciałem skończonym o q elementach. Podać liczbę przekształceń rzutowych $\mathbb{P}_n(K) \rightarrow \mathbb{P}_n(K)$ w powyższej sytuacji.

6. Udowodnić, że dowolne przekształcenie rzutowe $T : \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ ma punkt stały, tzn. istnieje $x \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ taki, że $T(x) = x$.

7. Na płaszczyźnie rzutowej $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ dane są proste l_1, l_2, l_3 i l_4 oraz m_1, m_2, m_3 i m_4 , przy czym żadne trzy spośród prostych l_1, l_2, l_3 i l_4 nie przecinają się w jednym punkcie i żadne trzy spośród prostych m_1, m_2, m_3 i m_4 nie przecinają się w jednym punkcie. Udowodnić, że istnieje przekształcenie rzutowe $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, które przeprowadza prostą l_i w prostą m_i , $i = 1, \dots, 4$.