

ALGEBRA LINIOWA Z GEOMETRIĄ, LISTA ZADAŃ NR 9

1. Sprawdzić, które z poniższych odwzorowań są przekształceniami liniowymi (nad ciałem K).

- (a) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, F(x, y) = x \cdot y, K = \mathbb{R},$
- (b) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x, y) = [2x - y, 3y + 1],$
- (c) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, F(x, y) = [3x + 2y, x + y, -5y], K = \mathbb{R},$
- (d) $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3, F(x) = [ix, 5x, 0], K = \mathbb{C},$
- (e) $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = x^2, K = \mathbb{R},$
- (f) $F : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3, F(x, y, z) = [2x + y + z, 3x - 2y, x - 5z], K = \mathbb{Q},$
- (g) $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, F(x, y) = [x + \bar{y}, x - y], K = \mathbb{C}.$

2. Dla przekształceń liniowych z Zadania 1. znaleźć macierze A takie, że $F = F_A$.

3. Znaleźć $F_A(x)$ oraz opisać te wektory y , dla których $F_A(y) = 0$, jeśli

- (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}, x = [2, 1, 5],$
- (b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, x = [3, 2, 1].$

4. Niech A będzie macierzą z Zadania 3(a). Znaleźć macierz $M = M_{F_A}^{\underline{b}, \underline{c}}$ przekształcenia F_A względem baz uporządkowanych $\underline{b} = ([1, -1, 2], [1, 1, 0], [0, 1, 1])$ i $\underline{c} = ([1, 2], [0, 1])$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ odpowiednio. Znaleźć macierze odwracalne P i Q takie, że $M = PAQ^{-1}$.

5. Czy F jest przekształceniem odwracalnym? Jeśli tak, to znaleźć przekształcenie odwrotne. (Zalecana metoda: znaleźć macierz przekształcenia i zbadać jej odwracalność.)

- (a) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x, y) = [2x + y, 3x - 5y],$
- (b) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x, y, z) = [2x + y, -x + 2y],$
- (c) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, F(x, y, z) = [x + y + z, x - y + 2z, 2x + 3z],$
- (d) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, F(x, y, z) = [x - y - z, x + y + z, y - z].$

6. Dla przekształceń F z Zadania. 5 (b), (c) i (d) znaleźć macierz $M_F^{\underline{b}, \underline{b}}$, gdzie $\underline{b} = ([1, 1, 1], [1, 0, 1], [0, 0, 1])$ jest bazą uporządkowaną przestrzeni $\mathbb{R}^3$. (Zalecana metoda: zastosować macierze przejścia.)

7. Dla przekształceń liniowych F z Zadań 1. oraz 3. znaleźć bazy przestrzeni $\text{Ker}(F)$ oraz $\text{Im}(F)$.

8. Znaleźć przekształcenie liniowe

$$F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4,$$

takie, że

- (a) $\text{Ker}(F)$ (jądro) generowane jest przez wektory $[1, 1, -1, 0], [1, 1, 0, 1]$, a $\text{Im}(F)$ (obraz) generowany jest przez wektory $[1, 1, 1, 1], [1, 0, 1, 0]$.

- (b) $\text{Ker}(F)$ generowane jest przez wektory $[1, 1, 1, 0]$, $[0, 1, 0, 0]$, a $\text{Im}(F)$ generowany jest przez wektory $[1, 1, 1, 0]$, $[0, 1, 0, 0]$.

Zadania uzupełniające

1. Przypuśćmy, że $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest

- (a) obrotem o kąt α wokół punktu P ,
- (b) symetrią osiową względem prostej l .

Co należy założyć o P i l , by F było przekształceniem liniowym?

2. Przypuśćmy, że $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest

- (a) obrotem o kąt α wokół punktu $(0, 0)$,
- (b) symetrią osiową względem prostej o równaniu $x + y = 0$,
- (c) symetrią osiową względem prostej o równaniu $ax + by = 0$.

W tych przykładach znaleźć macierz A taką, że $F = F_A$.

3. Udowodnić, że każde przekształcenie liniowe odwzorowuje układ liniowo zależnych wektorów na układ liniowo zależny. Jakie przekształcenia liniowe odwzorowują układy liniowo niezależne na układy liniowo niezależne?