

ALGEBRA LINIOWA Z GEOMETRIĄ, LISTA ZADAŃ NR 8

- Sprawdzić, czy następujące podzbiory są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (dla odpowiednich n)
 - $\{[u, v, 2u, 4v] ; u, v \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$,
 - $\{[u, v, uv] ; u, v \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
 - $\{[u, v] ; u, v \in \mathbb{R}, u \leq v\} \subseteq \mathbb{R}^2$,
 - $\{[u, v, w, 2u + 3v + 4w] ; u, v, w \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$,
 - zbiór rozwiązań układu równań liniowych $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \quad (n = 3)$,
 - zbiór rozwiązań układu równań liniowych $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \quad (n = 3)$,
 - $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : xy = z^2\}$.
- Czy zbiór $\{[z, t] \in \mathbb{C}^2 : \bar{z} = t\}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{C}^2$ traktowanej jako przestrzeń liniowa nad ciałem liczb zespolonych? Jak brzmi odpowiedź, jeśli $\mathbb{C}^2$ potraktujemy jako przestrzeń liniową nad ciałem liczb rzeczywistych?
- Wykazać, że dany ciąg wektorów jest bazą uporządkowaną przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Znaleźć współrzędne wektora $[1, 1, 1]$ względem tej bazy.
 - $[1, 0, 1], [0, 1, 1], [1, 1, 0]$,
 - $[1, 2, 3], [0, 1, 2], [1, 0, 0]$.
- Znaleźć bazy wszystkich przestrzeni liniowych występujących w zadaniu 1.
- Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K . W każdym z poniższych przypadków podać co najmniej dwie różne bazy.

(a) $V = \mathbb{R}^3, K = \mathbb{R}$,	(c) $V = K^n, n > 0$,	(e) $V = \mathbb{C}, K = \mathbb{C}$,
(b) $V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}, K = \mathbb{R}$,	(d) $V = \mathbb{C}, K = \mathbb{R}$,	(f) $V = \mathbb{Z}_2^3, K = \mathbb{Z}_2$.
- Dany jest zbiór X . Znaleźć podzbiór $B \subseteq X$ tworzący bazę przestrzeni $\langle X \rangle$ generowanej przez X .
 - $X = \{[1, 1, 0], [0, 1, 1], [1, 2, 1], [2, 3, 1]\}$,
 - $X = \{[1, 1, 0, 0], [0, 1, 1, 0], [0, 0, 1, 1], [1, 0, 0, 1]\}$,
 - $X = \{[1, 0, 0, -1], [2, 1, 1, 0], [1, 1, 1, 1], [1, 2, 3, 4], [0, 1, 2, 3]\}$,
 - $X = \{[1, -1, 2, 3, 1], [1, 1, 0, 0, -1], [2, 0, 2, 3, 0], [3, 1, 2, 3, -1]\}$.
- Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni $U \cap V$ oraz $U + V$, jeśli
 - $U = \langle [1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0] \rangle, V = \langle [1, 1, 2, 3], [2, 2, 4, 5] \rangle$,
 - $U = \langle [1, 0, 1, 0], [0, 1, 0, 1] \rangle, V = \langle [0, 1, 1, 1], [1, 0, 0, 1] \rangle$,
 - $U = \langle [1, 0, 1, 0, 1], [0, 1, 1, 1, 0] \rangle, V = \langle [1, 1, 1, 1, 1], [2, 1, 1, 1, 2], [-1, 2, 1, 2, -1] \rangle$.
- Uzupełnić dany układ wektorów do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^n$, jeśli
 - $[2, 1, 0], [0, 0, 1], n = 3$,

- (b) $[1, 2, 3, 4], [2, 3, 4, 5], n = 4$
 (c) $[1, 1, 0, 1], [1, 1, 1, 1], n = 4$,
 (d) $[1, 2, -3, 4, 0], [3, 6, -9, 13, 1], [-1, -2, 7, 0, 0], n = 5$

9. Znaleźć bazę przestrzeni rozwiązań układu równań liniowych

$$(a) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0, \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_5 = 0. \end{cases}$$

10. Znaleźć układ równań liniowych, którego zbiorem rozwiązań jest przestrzeń

- (a) $\langle [1, 2, 1, -1], [0, 2, 3, 1] \rangle$,
 (b) $\langle [1, -1, 1, -1, 1], [1, -2, 3, 2, 1], [0, 0, 1, 1, 1] \rangle$.

Zadania uzupełniające

- Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K oraz niech $v \in V$, $a \in K$. Pokazać, że
 - $0_K \cdot v = 0_V$
 - $a \cdot 0_V = 0_V$
 - $a \cdot v = 0_V$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0_K$ lub $v = 0_V$.
- Niech V będzie przestrzenią wszystkich ciągów (x_n) o wyrazach rzeczywistych (traktujemy ją jako przestrzeń nad ciałem $\mathbb{R}$). Czy następujące zbiory są podprzestrzeniami liniowymi V ?
 - zbiór wszystkich ciągów niemalejących,
 - zbiór wszystkich ciągów zbieżnych,
 - zbiór ciągów okresowych o ustalonym okresie T (tj. ciągów (x_n) takich, że $x_{n+T} = x_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$).
 - zbiór ciągów okresowych (tj. ciągów (x_n) takich, że istnieje $T \in \mathbb{N}$ taka, że $x_{n+T} = x_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$).
- Wykazać, że podane wektory należą do podprzestrzeni $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i uzupełnić je do bazy U .
 - $[-1, 3, -1, 0], U = \langle [1, 2, -1, 1], [0, 1, 1, -1], [2, -1, 0, 1] \rangle, n = 4$,
 - $[2, 2, 3, 2, 0], [1, 3, 2, 1, 0], U = \langle [1, 0, 1, 0, -1], [1, 1, 0, 1, 1], [0, 1, 2, 1, 0], [1, 2, 0, 0, 0] \rangle, n = 5$.

Wskazówki

Znajdowanie bazy przestrzeni rozwiązań układu równań $Ax^T = 0$

$$x = [x_1, \dots, x_n].$$

- Znajdujemy macierz górnoschodkową A' wierszowo równoważną A .
- Wypisujemy numery kolumn, w których NIE MA współczynników wiodących: $l_1, \dots, l_k$.

3. Dla każdego $i = 1, \dots, k$ znajdujemy (jedyne!) rozwiązanie $\vec{x}^{(i)} = [x_1, \dots, x_n]$ układu równań takie, że $x_{l_i} = 1$ oraz $x_{l_j} = 0$ dla $j \neq i$.
4. Wektory $\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(k)}$ tworzą bazę przestrzeni rozwiązań układu $Ax^T = 0$ (zwaną też *fundamentalnym układem rozwiązań* tego układu).

PRZYKŁAD. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Sprowadzamy macierz A do postaci górnoschodkowej:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_3 := w_3 - 2w_1]{w_2 := w_2 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_4 := w_4 + w_2]{w_3 := w_3 - w_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

2. $k = 1$, $l_1 = 3$.

3. Szukamy rozwiązania układu równań $Ax^T = 0$ postaci $\vec{x}^{(1)} = [x_1, x_2, 1]$. Zatem nasz układ równań jest postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Przenosząc „współczynniki” na drugą stronę otrzymujemy układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi x_1, x_2 w „kanonicznej” postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu równań jest $[x_1, x_2] = [-1, -1]$, czyli $\vec{x}^{(1)} = [-1, -1, 1]$.

4. Bazą przestrzeni rozwiązań układu równań $Ax^T = 0$ jest jednoelementowy zbiór $\{[-1, -1, 1]\}$.

Wybieranie bazy z danego układu generatorów.

Niech $U = \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$.

1. Tworzymy $n \times m$ -macierz A , której KOLUMNAMI są $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$.
2. Znajdujemy macierz górnoschodkową A' wierszowo równoważną A .
3. Wypisujemy numery kolumn, w których znajdują się współczynniki wiodące: $j_1, \dots, j_r$.
4. Wektory $\vec{u}_{j_1}, \vec{u}_{j_2}, \dots, \vec{u}_{j_r}$ tworzą bazę przestrzeni U .

PRZYKŁAD. Niech $U = \langle [1, 1, 1, 1], [1, 1, 0, 0], [1, 0, 1, 0], [1, 2, 0, 1] \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Sprowadzamy macierz A do postaci górnoschodkowej:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(i=2,3,4)]{w_i := w_i - w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_4 := w_4 - w_3]{w_2 := w_2 - w_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{w_3 := w_3 + w_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 := w_4 - w_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

3. $r = 3, j_1 = 1, j_2 = 2, j_3 = 3$.

4. Wektory $[1, 1, 1, 1], [1, 1, 0, 0], [1, 0, 1, 0]$ tworzą bazę przestrzeni U .

Uzupełnianie zbioru wektorów niezależnych do bazy $\mathbb{R}^n$

Dane są wektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$

1. Tworzymy $m \times n$ -macierz A , której WIERSZAMI są $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$.
2. Znajdujemy macierz górnoschodkową A' wierszowo równoważną A .
3. Wypisujemy numery kolumn, w których NIE MA współczynników wiodących: $l_1, \dots, l_{n-m}$. (Uwaga: jeśli w A' jest mniej niż m współczynników wiodących, to wektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ są liniowo zależne i nie da się ich uzupełnić do bazy $\mathbb{R}^n$.)
4. Wektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ wraz z wektorami bazy standardowej $e_{l_1}^{(n)}, e_{l_2}^{(n)}, \dots, e_{l_{n-m}}^{(n)}$ tworzą bazę $\mathbb{R}^n$.

PRZYKŁAD. Dane są wektory $[1, 1, 0, 0], [1, 0, 1, 0] \in \mathbb{R}^4$.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Sprowadzamy macierz A do postaci górnoschodkowej:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 := w_2 - w_1} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} & 1 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

3. $n = 4, m = 2, n - m = 2, l_1 = 3, l_2 = 4$.

4. Wektory $[1, 1, 0, 0], [1, 0, 1, 0], [0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1] \in \mathbb{R}^4$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^4$.