

ALGEBRA LINIOWA Z GEOMETRIĄ, LISTA ZADAŃ NR 7

1. Wykazać, że w dowolnym pierścieniu: $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$ ($-a$ oznacza element pierścienia taki, że $a + (-a) = 0$).
2. Wykazać, że w dowolnym ciele: $-\frac{1}{a} = \frac{1}{(-a)}$, o ile $a \neq 0$.
3. Znaleźć elementy odwrotne do: (a) 2 w $\mathbb{Z}_{11}$, (b) 5 w $\mathbb{Z}_{11}$, (c) 5 w $\mathbb{Z}_{13}$, (d) 5 w $\mathbb{Z}_{15}$, (e) 33 w $\mathbb{Z}_{102}$, lub wykazać, że element odwrotny nie istnieje.
4. Zbudować tabelki działań $+$ i $\cdot$ w $\mathbb{Z}_5$.
5. Podać przykład ciała czteroelementowego (tzn. zbudować tabelki dwóch działań spełniających odpowiednie warunki).
6. Rozwiązać równanie: (a) $\bar{4}x + \bar{2} = \bar{1}$ w $\mathbb{Z}_7$, (b) $\bar{3}x - \bar{5} = \bar{2}$ w $\mathbb{Z}_{11}$.
7. Rozwiązać układ równań:

$$(a) \begin{cases} \bar{4}x - \bar{4}y = \bar{1}, \\ \bar{2}x - \bar{7}y = \bar{3}, \end{cases} \text{ w } \mathbb{Z}_{13}$$

$$(c) \begin{cases} x + \bar{3}y = \bar{4}, \\ \bar{4}x + y = \bar{5}, \end{cases} \text{ w } \mathbb{Z}_{11}$$

$$(b) \begin{cases} x + \bar{3}y = \bar{4}, \\ \bar{4}x + y = \bar{5}, \end{cases} \text{ w } \mathbb{Z}_7$$

$$(d) \begin{cases} \bar{3}x - \bar{2}y = \bar{1}, \\ \bar{5}x + \bar{4}y = \bar{0}, \end{cases} \text{ w } \mathbb{Z}_{13}$$
8. Wykonć następujące działania na liczbach zespolonych:

$$(a) (2 + 3i)(5 - 2i)$$

$$(b) (2 - 3i)^3$$

$$(c) (3 - 2i)(1 + i) + |3 + 4i|$$

$$(d) \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

$$(e) \frac{4-3i}{1+i}$$

$$(f) \frac{(-2+2i)^2}{-1+i} + 2i - 5$$

$$(g) \frac{3-2i}{1-i} - \frac{3-7i}{2-3i}$$

$$(h) \frac{(1-i)^3-1}{(1+i)^3+1}$$
9. Zapisać w postaci trygonometrycznej liczby zespolone: (a) -2 ; (b) $-3i$; (c) $1 + i$; (d) $1 - i$; (e) $1 + \sqrt{3}i$; (f) $-1 + \sqrt{3}i$.
10. Wykonać następujące działania na liczbach zespolonych (wynik przedstawić w postaci trygonometrycznej):

$$(a) i^{70}$$

$$(b) (1 + i)^{18}$$

$$(c) (-1 - i)^{50}$$

$$(d) \frac{(-\cos \alpha + i \sin \alpha)^5}{-1 + i\sqrt{3}}$$

$$(e) \frac{(1-i\sqrt{3})^6}{(1+i\sqrt{3})^4}$$

$$(f) \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$$

$$(g) \frac{(1+i)^{11}}{(1-i)^9}$$

$$(h) (1 + i \cdot \operatorname{ctg}(240^\circ))^{99}$$
11. Rozwiązać w zbiorze liczb zespolonych następujące równania:

$$(a) x^2 + 1 = 0$$

$$(b) x^2 + 4x + 8 = 0$$

$$(c) 3x^2 - 2x = 2x^3$$

$$(d) x^2 + (-4 + i)x + 5 - 5i = 0$$

$$(e) x^2 = 3 - 4i$$

$$(f) x^2 + (1 + 4i)x - 5 - i = 0$$

$$(g) x^4 + 2x^2 + 3 = 0$$

$$(h) x^3 - 5x^2 + 11x - 15 = 0.$$
12. Rozwiązać w zbiorze liczb zespolonych następujące równania:

$$(a) (i + z) - 3i(2 - z) = iz + 1$$

$$(b) |z + i| + |z - i| = 2$$

$$(c) \bar{z}z + (z - \bar{z})^2 = 3 + 2i$$

$$(d) 2z + (1 - 7i) = (1 + i)\bar{z}$$

$$(e) |z - 1| = |z + 1|$$

$$(f) \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z}^3 = -z.$$

13. Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej zbiór wszystkich liczb spełniających następujące warunki:

- | | |
|---|---|
| (a) $z + \bar{z} = \operatorname{re}(z)$ | (f) $\operatorname{im}(z^2) = 0$ i $\operatorname{re}(z^2) < 0$ |
| (b) $z = \operatorname{re}(z) + \operatorname{im}(\bar{z})$ | (g) $\bar{z} = z^2$ |
| (c) $0 < \operatorname{im}(iz) + \operatorname{re}(iz) < 1$ | (h) $\operatorname{im}(iz) = \operatorname{re}(z)$ |
| (d) $ z - i = z + i $ | (i) $ z \leq 2$ i $\operatorname{Arg}(z) > \frac{2\pi}{3}$ |
| (e) $\operatorname{im}(z^2) = 0$ | (j) $\operatorname{Arg}(z \cdot 2i) = \frac{\pi}{4}$ |

14. Udowodnić, że:

- (a) jeżeli $x \in \mathbb{R}$ i $z \in \mathbb{C}$, to $\operatorname{re}(x \cdot z) = x \cdot \operatorname{re}(z)$
 (b) jeżeli $|z| = 1$, to $\bar{z} = \frac{1}{z}$
 (c) $z - \bar{z} = 2i \cdot \operatorname{im}(z)$
 (d) $\left(\frac{1+i \cdot \operatorname{tg}(\phi)}{1-i \cdot \operatorname{tg}(\phi)}\right)^n = \frac{1+i \cdot \operatorname{tg}(n\phi)}{1-i \cdot \operatorname{tg}(n\phi)}$

15. Znaleźć

- (a) $\sqrt[6]{1}$ (b) $\sqrt[4]{-i}$ (c) $\sqrt[3]{1+i}$ (d) $\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}-i}{i-1}}$
 (e) $\sqrt[6]{-27i}$ (f) $\sqrt[8]{-4}$ (g) $\sqrt[5]{-1-i}$ (h) $\sqrt[8]{\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}}$.

Zadania uzupełniające

- Wykazać, że w dowolnym ciele: jeśli m jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że suma m jedynek $1 + 1 + \dots + 1$ równa jest 0, to m jest liczbą pierwszą.
- Niech $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Pokazać, że jeżeli liczba $z \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem wielomianu f , to liczba $\bar{z}$ też jest pierwiastkiem wielomianu f .
- Obliczyć sumę oraz sumę kwadratów wszystkich pierwiastków zespolonych n -tego stopnia z jedynki. [Wskazówka: Pomnożyć sumę $\sum_{i=0}^{n-1} \zeta_n^i$ przez $1 - \zeta_n$.]
- Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczbę zespoloną $1 - (2 + \sqrt{3})i$.
- Przedstawić wielomian $x^6 + x^3 + 1 = 0$ (ogólniej: $x^{2n} + x^n + 1 = 0$) jako iloczyn trójmianów kwadratowych o współczynnikach rzeczywistych.
- Niech $ABCD$ będzie prostokątem o boku AB długości 3 i boku BC długości 1. Niech E, F będą punktami na boku DC takimi, że $|DE| = |EF| = |FC| = 1$. Wykazać, że suma miar kątów EAB, FAB i CAB równa jest $\frac{\pi}{2}$.