

Algebra Liniowa z Geometrią, lista zadań nr 6

1. Obliczyć liczbę nieporządków dla podanych permutacji, przedstawić je jako złożenie cykli rozłącznych oraz wyznaczyć ich znak:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 3 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix};$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \quad (d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$(e) (14532)(231)(135); \quad (f) (123456)(654321);$$

$$(g) (12)(34)(234)(1356)(134); \quad (h) (123)(12)(13).$$

2. Korzystając tylko z definicji wyznacznika obliczyć:

$$(a) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix};$$

$$(c) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 8 & 5 & 2 \end{vmatrix}; \quad (d) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

3. Obliczyć wyznacznik:

$$(a) \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} 1 & 98 & 59 \\ 1 & 97 & 61 \\ 1 & 96 & 63 \end{vmatrix};$$

$$(d) \begin{vmatrix} 9 & 4 & 3 \\ 8 & 4 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix}; \quad (e) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 8 \\ 7 & 6 & 8 & 4 \\ 8 & 7 & 9 & 6 \end{vmatrix}; \quad (f) \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 5 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$(g) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \quad (h) \begin{vmatrix} 3 & 8 & 9 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 9 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 9 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 9 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Wykazać że następujące wyznaczniki dzielą się przez 10 (nie obliczając ich!):

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 8 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 8 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix};$$

5. Korzystając z twierdzenia Laplace'a, obliczyć wyznacznik:

$$(a) \begin{vmatrix} 5 & 0 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 13 \\ 0 & 5 & 0 & 11 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 7 & 16 & 5 & 9 \\ 0 & 13 & 2 & 0 \\ 0 & 17 & 3 & 0 \\ 8 & 19 & 9 & 11 \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} 0 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 7 & 13 & 0 \\ 5 & 6 & 8 & 13 \\ 4 & 1 & 19 & 11 \end{vmatrix}.$$

6. Obliczyć wyznaczniki:

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix};$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}; \quad (d) \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & b_{2n} \\ 0 & a_2 & \cdots & b_{2n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_2 & \cdots & a_{2n-1} & \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & a_{2n} \end{vmatrix};$$

7. Przypuśćmy, że $a \neq b$. Udowodnić, że (n oznacza stopień macierzy)

$$(a) \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b \end{vmatrix} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b};$$

$$(b) \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ b & x & a & \cdots & a \\ b & b & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & x \end{vmatrix} = \frac{b(x-a)^n - a(x-b)^n}{b-a}.$$

(n oznacza stopień rozważanego wyznacznika.)

8. Obliczyć wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$$

podnosząc go do kwadratu i stosując twierdzenie Cauchy'ego i twierdzenie o wyznaczniku macierzy transponowanej.

Zadania uzupełniające

1. Niech $n \in \mathbb{N}$. Przypuśćmy, że dana jest permutacja $\sigma \in S_n$ oraz transpozycja $\tau \in S_n$. Wykazać, że liczby $d(\sigma) - d(\sigma\tau)$ i $d(\sigma) - d(\tau\sigma)$ są nieparzyste. ($d(\sigma)$ oznacza liczbę nieporządków permutacji σ). Wskazówka: zacząć od $d(\sigma) - d(\tau\sigma)$, gdzie τ jest permutacją sąsiednich elementów.

2. Korzystając z poprzedniego zadania wykazać, że $\text{sgn}(\sigma\sigma') = \text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\sigma')$ dla dowolnych permutacji σ, σ' .

3. Przypuśćmy, że A i B są macierzami kwadratowymi, niekoniecznie tego samego stopnia. Czy można wyrazić wyznaczniki macierzy postaci

$$(a) \begin{bmatrix} A & \star \\ 0 & B \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} A & 0 \\ \star & B \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & \star \end{bmatrix}; \quad (d) \begin{bmatrix} \star & A \\ B & \star \end{bmatrix}$$

przy pomocy wyznaczników macierzy A i B (gdzie w miejscu $\star$ znajduje się dowolna macierz odpowiedniego rozmiaru)?

4. Przypuśćmy, że A jest 3×2 -macierzą a B - 2×3 macierzą. Wykazać, że wyznacznik macierzy $A \cdot B$ równy jest 0.