

Algebra liniowa z geometrią, lista zadań nr 5

1. Za pomocą operacji elementarnych na wierszach sprawdzić czy dana macierz jest odwracalna i jeśli tak, znaleźć macierz odwrotną do niej:

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 11 & 8 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$, (e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$,

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (g) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 7 & 2 \\ 2 & 7 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, (h) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Za pomocą operacji elementarnych na kolumnach znaleźć macierz odwrotną do danej:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 7 & 7 & 3 \end{bmatrix}$,

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 9 \\ 3 & 5 & 8 & 13 \\ 3 & 5 & 7 & 11 \end{bmatrix}$.

3. Rozwiązać równanie macierzowe¹:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, (b) $X \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$,

(c) $\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 9 & -5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$, (d) $\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + 4X \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$,

(f) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & 9 \\ 7 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, (g) $X \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & 9 \\ 8 & 7 & 7 \end{bmatrix}$,

(h) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 7 & -3 & 4 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$.

¹Zalecana metoda: równanie typu $AX = B$ rozwiązujemy znajdując macierz odwrotną A^{-1} do A i obliczając $X = A^{-1}B$. Uwaga na nieprzemienność mnożenia macierzy!

4. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ dana macierz jest odwracalna? Znaleźć macierz odwrotną.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} t & t \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} t & t^2 & t^3 \\ 0 & t^2 & t^3 \\ 0 & 0 & t^3 \end{bmatrix}.$$

5. Udowodnić, że jeśli $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ jest macierzą odwracalną, to A^T jest odwracalna oraz $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
6. Udowodnić, że jeśli $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ i $A^2 + A - I_n = 0$, to A jest odwracalna. Wyrazić A^{-1} za pomocą A oraz I_n .
7. Udowodnić, że jeśli macierze $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ i $B \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ są odwracalne, to dla dowolnej macierzy $n \times m$ -macierzy C macierz

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

jest odwracalna. Jak wygląda macierz odwrotna?

8. Wykazać, że jeśli $B \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ jest macierzą odwracalną, to $rk(A) = rk(BA)$ i $rk(C) = rk(CB)$ dla dowolnej macierzy A mającej m wierszy i dla dowolnej macierzy C mającej m kolumn.

Wskazówka. Macierz odwracalna jest iloczynem macierzy elementarnych, mnożenie przez macierz elementarną odpowiada wykonaniu operacji elementarnej ...