

1. Dla danej macierzy  $A$  znaleźć macierz górnoschodkową całkowicie zredukowaną  $A'$ , która jest wierszowo równoważna  $A$ . Znaleźć macierz  $E$ , która jest iloczynem macierzy elementarnych oraz  $A' = E \cdot A$ .

$$(a) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (b) A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (c) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Niech

$$\vec{u}_1 = [1, 1, 0], \quad \vec{u}_2 = [1, 0, 1], \quad \vec{u}_3 = [0, 1, -1], \quad \vec{u}_4 = [2, 1, 1] \in \mathbb{R}^3.$$

Wskażać maksymalny podzbiór zbioru  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$  złożony z wektorów liniowo niezależnych.

3. Wykazać, że wiersze macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \end{bmatrix}$$

są liniowo niezależne.

4. Wykazać, że niezerowe wiersze macierzy górnoschodkowej są liniowo niezależne.
5. Niech  $n \in \mathbb{N}$ . Załóżmy, że  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^n$  są liniowo niezależne oraz  $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Wykazać, że wektory  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 + a\vec{w}$  są liniowo niezależne lub wektory  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}$  są liniowo niezależne.

6. Znaleźć rząd macierzy

$$(a) \begin{bmatrix} 4 & 9 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 11 & 8 \\ 1 & 1 \\ \pi^2 & \ln(\pi) \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 11 \end{bmatrix}, \quad (d) \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(e) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (f) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(g) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (h) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Znaleźć rząd macierzy (w zależności od wartości parametru  $a$ ).

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} -a & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -a & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -a & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -a & 1 \end{bmatrix}$$

8. Korzystając z twierdzenia Kroneckera-Capellego uzasadnić, że poniższy układ równań liniowych, zależny od parametrów  $a, b \in \mathbb{R}$ , posiada nieskończenie wiele rozwiązań dla  $a = 1$ , posiada dokładnie jedno rozwiązanie dla  $a = b$ ,  $a, b \neq 1$ , oraz nie posiada rozwiązań dla pozostałych wartości  $a$  i  $b$ .

$$\begin{cases} (a-1)x_1 + (a-1)x_2 + (a-1)x_3 = a^2 + a - 2 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ (a-1)x_3 = (a-1)b \end{cases}$$

Zadania uzupełniające

1. Niech  $C \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ ,  $D \in M_{m \times s}(\mathbb{R})$ . Wykazać, że

$$rk(CD) \leq \min(rk(C), rk(D))$$

2. Niech  $A \in M_{m_1 \times n_1}(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_{m_2 \times n_2}(\mathbb{R})$ ,  $C \in M_{m_1 \times n_2}(\mathbb{R})$  dla pewnych  $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ . Wykazać, że

$$rk\left(\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) \geq rk(A) + rk(B)$$

3. Przypuśćmy, że  $A$  i  $B$  są macierzami mającymi tyle samo wierszy. Wykazać, że macierz postaci

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 2A & -5B \end{bmatrix}$$

ma rząd równy  $rk(A) + rk(B)$ .

4. Przypuśćmy, że  $A$  jest macierzą rozmiaru  $m \times n$  oraz istnieją macierze  $B, C$  takie, że  $BA = I_m$  oraz  $AC = I_n$ . Wykazać, że  $m = n$ .