

Algebra Liniowa z Geometrią, lista zadań nr 3

1. Wykonać działania na macierzach:

$$(a) \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(c) 3 \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad (d) 2 \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Rozwiązać równanie:

$$(a) X + \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) 3X = \begin{bmatrix} 0 & 33 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$(c) 4X - \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 17 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 17 & -9 \\ -3 & 46 \end{bmatrix} - 5X = \begin{bmatrix} 2 & 21 \\ -8 & 21 \end{bmatrix}$$

$$(e) X + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(X - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

3. Obliczyć, o ile jest to możliwe, iloczyny AB i BA podanych macierzy:

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (d) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(e) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad (f) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

4. Wskazać macierz transponowaną danej macierzy:

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 9 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad (b) B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

5. Rozwiązać równanie macierzowe:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(c) 2Y \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + Y \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(d) X \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X$$

6. Podać przykłady macierzy kwadratowych takich, że

$$(a) AB \neq 0 \text{ oraz } BA = 0$$

$$(b) A \neq 0 \text{ oraz } A^2 = 0$$

$$(c) A^2 \neq 0 \text{ oraz } A^3 = 0 \text{ (Pytanie dodatkowe: jaki jest najmniejszy możliwy stopień takiej macierzy?)}$$

7. Znaleźć wzór ogólny na

$$(a) \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^n, \quad (b) \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}^n,$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$.