

Algebra Liniowa z Geometrią, lista zadań nr 2

1. Rozwiązać¹ układ równań (uwaga na kolejność niewiadomych w równaniach!):

$$(a) \begin{cases} x - 4y = 1, \\ 2x - 7y = 3, \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + 7y = 1, \\ 4x + 9y = 2, \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 3y + x + 5z = 2, \\ 2x + 7y + 9z = -1, \\ 3x + 8y + 7z = -7, \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + y - 4z = 0, \\ x + 3y - 3z = 4, \\ 3x - 5y - 5z = 6, \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 7x + 3y + 4z = 5, \\ 9x + 6y + 5z = 2, \\ 3x - y + z = 6, \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} 4x + 5y + 2z = 1, \\ x + 2z + y = 13, \\ x + 2y + 2z = 4, \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} x + 2y - 4z + 5t = 11, \\ x + 3y - 5z + 6t = 9, \\ 2x - 2y - 7z + t = 3, \\ 3x - 8y - 9z + 4t = 12, \end{cases}$$

2. Rozwiązać układ równań (uwaga na kolejność niewiadomych w równaniach!):

$$(a) \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 = 3, \\ x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 1, \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_2 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 9, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 11x_2 + 7x_3 = 9, \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 3, \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 - 8x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 9, \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 = 8, \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 - 8x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 9, \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 = 7, \end{cases}$$

3. Znaleźć wielomian o współczynnikach rzeczywistych, co najwyżej drugiego stopnia, spełniający warunki:

$$(a) f(1) = 5, f(2) = 10, f(3) = 17;$$

$$(b) f(2) = 4, f(3) = 7, f(5) = 25;$$

4. Znaleźć wielomian o współczynnikach rzeczywistych, co najwyżej trzeciego stopnia, spełniający warunki:

$$(a) f(1) = 7, f(2) = 1, f(3) = 1, f(4) = 13;$$

$$(b) f(-1) = 4, f(1) = 6, f(2) = 1, f(4) = 9;$$

$$(c) f(-1) = 11, f(1) = 1, f(3) = 15, f(5) = 53;$$

5. W zależności od parametru a zbadać liczbę rozwiązań i opisać wszystkie rozwiązania układu równań liniowych.

$$(a) \begin{cases} 2x + ay = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} ax + 2y = 6 \\ x + (a-1)y = 3 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + ay = 1 \\ ax + 9y = 1 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 2x - ay = a \\ 2ax + (6-5a)y = 2a \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x + y - z = a \\ x + 2y + (a-1)z = a+1 \\ ax - (a+4)z = a^2+2 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 3x + y - z = a \\ 2x + 2y - 3z = 2 \end{cases}$$

¹dowolną metodą

Zadania uzupełniające

1. Wykazać, że każdy jednorodny układ równań o współczynnikach rzeczywistych posiada rozwiązanie. Jakie jest rozwiązanie jednorodnego układu równań, który jest oznaczony?
2. Podać przykład układu równań liniowych z trzema niewiadomymi, którego zbiorem rozwiązań jest prosta przechodząca przez punkty o współrzędnych $(1, 2, 0)$ i $(3, 1, 3)$.
3. Podać przykład układu równań liniowych z czterema niewiadomymi, którego zbiorem rozwiązań jest

$$\{[1 + s + 2t, 2 - s, 2t - 1, s + t] : s, t \in \mathbb{R}\}$$

4. Wykazać, że jeśli układ równań liniowych o współczynnikach rzeczywistych ma dwa różne rozwiązania, to ma ich nieskończenie wiele.