

ALGEBRA LINIOWA Z GEOMETRIĄ, LISTA ZADAŃ NR 11

1. Sprawdzić, że funkcja $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcjonałem dwuliniowym¹. Czy H jest funkcjonałem dwuliniowym symetrycznym? Znaleźć macierz funkcjonału H .

- (a) $(n = 2), H([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = (x_1 + x_2)(y_1 - y_2),$
- (b) $(n = 2), H([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = x_1 y_2 + x_2 y_1,$
- (c) $(n = 3), H([x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, x_3]) = x_1 y_3 - x_2 y_1 - x_3(y_1 + 2y_2),$
- (d) $(n = 3), H([x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, x_3]) = (x_1 + x_2 + 2x_3)(y_1 + y_2 + 2y_3).$

2. Zastosować ortogonalizację Schmidta do podanej bazy przestrzeni $\mathbb{R}^n$:

- (a) $(n = 2), [1, 2], [1, 3],$
- (b) $(n = 3), [1, 1, 1], [1, -2, 1], [0, 0, 1],$
- (c) $(n = 3), [1, 1, 0], [2, 1, 1], [-1, 0, 1],$
- (d) $(n = 4), [1, 1, 0, 0], [1, -1, 1, 0], [0, 0, 1, 0], [0, 0, 1, 1].$

3. Która z następujących macierzy jest dodatnio (ujemnie) określona?

- (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix},$
- (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$
- (c) $\begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$
- (d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$
- (e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix},$
- (f) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
- (g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix},$
- (h) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$

4. Jakie warunki powinny spełniać liczby $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, żeby macierz

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

była ujemnie określona?

5. Obliczyć iloczyn wektorowy $\vec{v} \times \vec{w}$, jeśli

- (a) $\vec{v} = [1, 2, -1], \vec{w} = [0, 1, 1],$
- (b) $\vec{v} = [1, 1, -1], \vec{w} = [2, 2, -2].$

6. Obliczyć objętość czworościanu o wierzchołkach w punktach: $(0, 0, 0), (1, 2, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1).$

¹przynajmniej w przykładach (a) i (b)

Zadania uzupełniające (do Listy 10)

Znaleźć postać kanoniczną Jordana C macierzy A oraz macierz P taką, że $C = P^{-1}AP$, jeśli

7. (a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$

8. (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$

9. (c) $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$

Wskazówka (do (b)). Znajdujemy wielomian charakterystyczny: $\chi_A(t) = (2-t)^2(3-t)$. Wektory własne dla 2: niezerowe wielokrotności $[1, 1, 1]$, dla 3: niezerowe wielokrot-

ności $[0, 1, 1]$. Stąd postać kanoniczna A równa jest: $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (dlaczego nie

$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$?). Wiemy też P może mieć postać: $\begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & z & 1 \end{bmatrix}$. Znajdziemy x, y, z korzystając z zależności $AP = PC$