

ALGEBRA LINIOWA Z GEOMETRIĄ, LISTA ZADAŃ NR 10

1. Endomorfizm liniowy $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadany jest przez macierz

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

w bazie $[1, 0, 0], [1, 1, 0], [1, 1, 1]$.

- (a) Znaleźć macierz tego endomorfizmu w bazie $[1, 0, 1], [1, 1, 0], [0, 1, 1]$.¹
 (b) Znaleźć wartość F dla wektora $[1, 2, 3]$.
2. Wyznaczyć wielomiany charakterystyczne oraz wartości i wektory własne (rzeczywiste i zespolone) macierzy:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \text{(e)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{(f)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{(g)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{(h)} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ \text{(i)} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{(j)} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sprawdzić na przykładach (b), (e) i (f) tezę twierdzenia Cayleya-Hamiltona.

3. Znaleźć wartości i wektory własne macierzy $\begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix}$ traktowanej jako macierz nad ciałem (a) $\mathbb{Z}_3$, (b) $\mathbb{Z}_5$.
4. Znaleźć wartości i wektory własne przekształcenia liniowego $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ zadanego na bazie $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ następująco:

$$T(e_1) = e_2, \quad T(e_2) = e_3, \quad \dots, \quad T(e_{n-1}) = e_n, \quad T(e_n) = e_1.$$

5. Zbadać, które spośród poniższych macierzy są diagonalizowalne nad ciałem $\mathbb{R}$ lub nad ciałem $\mathbb{C}$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

W przypadku macierzy diagonalizowalnych, znaleźć bazę odpowiedniej przestrzeni złożoną z wektorów własnych oraz odpowiednią macierz diagonalną.

¹Zalecana metoda: zastosowanie macierze przejścia.

6. Znaleźć ogólny wzór na a_n , dla $n = 1, 2, \dots$, jeżeli:

(a) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$,

(b) $a_1 = -1, a_2 = 3, a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$.

Zadania uzupełniające

1. Pokazać, że 0 jest wartością własną macierzy A wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest nieodwracalna.
2. Przypuśćmy, że $F : V \rightarrow V$ jest izomorfizmem. Pokazać, że F oraz F^{-1} mają te same wektory własne.
3. Podać przykład endomorfizmu liniowego nad ciałem $\mathbb{R}$, który nie ma wektorów własnych.
4. Udowodnić, że każde przekształcenie liniowe $T : \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ ma co najmniej jeden wektor własny.
- 5*. Udowodnić, że wartości własne każdej macierzy symetrycznej $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ są rzeczywiste. Udowodnić ten fakt w wersji ogólniejszej: dla $n \times n$ macierzy symetrycznych.
- 6*. Udowodnić tezę twierdzenia Cayleya-Hamiltona dla macierzy górnótrójkątnych.