

Zestaw 11

1 Funkcjonały dwuliniowe

Teoria

Jeśli V jest przestrzenią liniową nad ciałem K , to funkcję $H: V \times V \rightarrow K$ nazywamy funkcjonałem dwuliniowym, jeśli

$$H(\lambda_1 v_1 + \lambda v_2, w) = \lambda_1 H(v_1, w) + \lambda H(v_2, w)$$

oraz

$$H(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 H(v, w_1) + \lambda_2 H(v, w_2)$$

dla dowolnych wektorów $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$ oraz skalarów $\lambda_1, \lambda_2 \in K$. Sprawdzenie z definicji, że funkcja H jest funkcjonałem dwuliniowym, wygląda więc analogicznie, jak sprawdzanie liniowości przekształceń, wymaga jedynie wprowadzenie większej liczby oznaczeń oraz (dwukrotnie) dłuższych rachunków.

Podobnie jak w przypadku przekształceń liniowych z funkcjami dwuliniowymi określonymi na przestrzeni K^n można łączyć macierze. Dokładniej, jeśli $H: K^n \times K^n \rightarrow K$ jest funkcjonałem dwuliniowym, to istnieją skalary $a_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$, takie, że

$$H([x_1, \dots, x_n], [y_1, \dots, y_n]) = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i y_j.$$

Macierz

$$A := \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą funkcjonału H . Jest ona powiązana z funkcjonałem H wzorem

$$H(v, w) = v \cdot A \cdot w^T.$$

W związku z powyższym współczynniki macierzy A można też znaleźć, korzystając z równości

$$a_{i,j} = H(e_i, e_j),$$

gdzie jak zwykle $e = (e_1, \dots, e_n)$ jest bazą standardową przestrzeni K^n .

Funkcjonał $H: V \times V \rightarrow K$ nazywamy symetrycznym, jeśli

$$H(v, w) = H(w, v)$$

dla dowolnych wektorów v i w w przestrzeni V . Jeśli $V = K^n$ i A jest macierzą funkcjonału H , to funkcjonal H jest symetryczny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest symetryczna, tzn. $A = A^T$ (a więc $a_{i,j} = a_{j,i}$ dla wszystkich indeksów $i, j = 1, \dots, n$).

Przykład: Zadanie 1(a)

Jeśli

$$H([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = (x_1 + x_2)(y_1 - y_2),$$

to

$$H([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = x_1 y_1 - x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_2 y_2, \quad (1.1)$$

a więc macierz funkcjonału H ma postać

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Powyższa macierz nie jest symetryczna (lub równoważnie, współczynniki przy $x_1 y_2$ oraz $x_2 y_1$ we wzorze (1.1) są różne), więc funkcjonal H nie jest symetryczny.

Odpowiedzi do Zadania 1

(b) Macierz funkcjonału: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$

Funkcjonał jest symetryczny.

(c) Macierz funkcjonału: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$

Funkcjonał nie jest symetryczny.

(d) Macierz funkcjonału: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$

Funkcjonał jest symetryczny.

3 Macierze dodatnio i ujemnie określone

Teoria

Funkcjonał symetryczny $H: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy dodatnio określonym, jeśli

$$H(v, v) > 0$$

dla każdego niezerowego wektora $v \in V$. Analogicznie, H nazywamy ujemnie określonym, gdy

$$H(v, v) < 0$$

dla każdego niezerowego wektora $v \in V$. Mówimy, że macierz symetryczna (a więc w szczególności kwadratowa) A rozmiaru n jest dodatnio/ujemnie określona, gdy odpowiednią własność ma funkcjonal wyznaczony przez macierz A (patrz Zadanie 1), a więc gdy

$$v^T \cdot A \cdot v > 0 \quad (v^T \cdot A \cdot v < 0, \text{ odpowiednio})$$

dla każdego niezerowego wektora $v \in \mathbb{R}^n$.

Dodatnią (ujemną) określoność macierzy można badać, posługując się kryterium Sylwestera. Dla symetrycznej macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix},$$

oraz $i \in \{1, \dots, n\}$, niech

$$A_i := \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,i} \end{bmatrix}.$$

Innymi słowy, A_i jest macierzą powstałą z macierzy A przez skreślenie wierszy i kolumn o numerach większych niż i . Kryterium Sylwestera mówi, że macierz A jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy wyznaczniki wszystkich tych macierzy są dodatnie, tzn.

$$\det(A_1) > 0, \quad \det(A_2) > 0, \quad \dots, \quad \det(A_n) > 0.$$

Oczywiście $\det(A_1) = a_{1,1}$ oraz $\det(A_n) = \det(A)$. Podobnie, macierz A jest ujemnie określona, gdy powyższe wyznaczniki na przemian zmieniają znak, tzn.

$$\det(A_1) < 0, \quad \det(A_2) > 0, \quad \det(A_3) < 0, \quad \det(A_4) > 0, \quad \dots$$

Zauważmy, że i -ty warunek na powyższej warunek można zapisać w postaci

$$(-1)^i \det(A_i) > 0.$$

Przykład: Zadanie 3(a)

Jeśli

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

to

$$A_1 = [1], \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\det(A_1) = 1, \quad \det(A_2) = 1 \quad \text{i} \quad \det(A_3) = 0,$$

a więc macierz nie jest ani dodatnio określona (nie mamy trzech wyznaczników dodatnich) ani ujemnie określona (nie mamy na przemian znaków plus, minus i plus).

Odpowiedzi do Zadania 3

- (b) Macierz dodatnio określona.
- (c) Macierz ani dodatnio ani ujemnie określona.
- (d) Macierz ani dodatnio ani ujemnie określona.
- (e) Macierz ani dodatnio ani ujemnie określona.
- (f) Macierz dodatnio określona.
- (g) Macierz dodatnio określona.
- (h) Macierz ani dodatnio ani ujemnie określona.

Odpowiedź do Zadania 4

$$a, b, c, d < 0.$$

2 Ortogonalizacja Schmidta

Teoria

Bazę $(u_1, \dots, u_n)$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy ortogonalną, jeśli wektory $u_1, \dots, u_n$ są parami prostopadłe, tzn.

$$u_i \circ u_j = 0$$

dla dowolnych $1 \leq i < j \leq n$, gdzie

$$[x_1, \dots, x_n] \circ [y_1, \dots, y_n] := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Jeśli $(b_1, \dots, b_n)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^n$, to ortogonalizacja Schmidta pozwala znaleźć bazę ortogonalną $(u_1, \dots, u_n)$ taką, że

$$\langle u_1, \dots, u_i \rangle = \langle b_1, \dots, b_i \rangle,$$

dla wszystkich $i = 1, \dots, n$. Przypomnijmy, że jeśli $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$, to $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ jest podprzestrzenią liniową generowaną przez wektory $v_1, \dots, v_m$, tj. zbiorem wszystkich kombinacji liniowych wektorów $v_1, \dots, v_m$.

Wektory $u_1, \dots, u_n$ znajdujemy, korzystając z następujących wzorów:

$$\begin{aligned} u_1 &:= b_1, \\ u_2 &:= b_2 - \frac{b_2 \circ u_1}{u_1 \circ u_1} \cdot u_1, \\ u_3 &:= b_3 - \frac{b_3 \circ u_1}{u_1 \circ u_1} \cdot u_1 - \frac{b_3 \circ u_2}{u_2 \circ u_2} \cdot u_2, \\ &\dots \\ u_n &:= b_n - \frac{b_n \circ u_1}{u_1 \circ u_1} \cdot u_1 - \frac{b_n \circ u_2}{u_2 \circ u_2} \cdot u_2 - \dots - \frac{b_n \circ u_{n-1}}{u_{n-1} \circ u_{n-1}} \cdot u_{n-1}. \end{aligned}$$

Warto podkreślić, że geometrycznie wektor $\frac{b \circ u}{u \circ u} \cdot u$ można zinterpretować jako rzut prostopadły wektora b na prostą składającą się z wielokrotności wektora u .

Przykład: Zadanie 2(b)

Stosując ortogonalizację Schmidta do bazy

$$([1, 1, 1], [1, -2, 1], [0, 0, 1]),$$

otrzymujemy wektory

$$\begin{aligned} u_1 &= [1, 1, 1], \\ u_2 &= [1, -2, 1] - \frac{[1, -2, 1] \circ [1, 1, 1]}{[1, 1, 1] \circ [1, 1, 1]} \cdot [1, 1, 1] \\ &= [1, -2, 1] - \frac{1 - 2 + 1}{3} \cdot [1, 1, 1] = [1, -2, 1], \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} u_3 &= [0, 0, 1] - \frac{[0, 0, 1] \circ [1, 1, 1]}{[1, 1, 1] \circ [1, 1, 1]} \cdot [1, 1, 1] - \frac{[0, 0, 1] \circ [1, -2, 1]}{[1, -2, 1] \circ [1, -2, 1]} \cdot [1, -2, 1] \\ &= [0, 0, 1] - \frac{1}{3} \cdot [1, 1, 1] - \frac{1}{6} [1, -2, 1] = \left[-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right]. \end{aligned}$$

Innymi słowy, otrzymujemy bazę ortogonalną

$$\left([1, 1, 1], [1, -2, 1], \left[-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right]\right).$$

Zauważmy, że istotnie

$$[1, 1, 1] \circ [1, -2, 1] = [1, 1, 1] \circ \left[-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right] = [1, -2, 1] \circ \left[-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right] = 0.$$

Sprawdzenie tych równości jest częściową weryfikacją, czy nie ma błędów w wykonanych rachunkach.

Odpowiedzi do Zadania 2

(a) $\left([1, 2], \left[-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right]\right).$

(c) $\left([1, 1, 0], \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right], \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]\right)$

(d) $\left([1, 1, 0, 0], [1, -1, 1, 0], \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right], [0, 0, 0, 1]\right).$

5 Iloczyn wektorowy

Teoria

Jeśli

$$v = [x_1, x_2, x_3] \quad \text{i} \quad u = [y_1, y_2, y_3]$$

są dwoma wektorami z przestrzeni $\mathbb{R}^3$, to definiujemy iloczyn wektorowy $v \times u$ wektorów v i u wzorem

$$v \times u := \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}.$$

Równoważnie, choć nie do końca poprawnie pod względem formalnym, ale za to w sposób ułatwiający zapamiętanie powyższego wzoru, iloczyn wektorowy można zdefiniować wzorem

$$v \times u := \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix},$$

gdzie (e_1, e_2, e_3) jest bazą standardową przestrzeni $\mathbb{R}^3$, tj. $e_1 = [1, 0, 0]$, $e_2 = [0, 1, 0]$ i $e_3 = [0, 0, 1]$.

Odpowiedzi do Zadania 5

(a) $[3, -1, 1]$.

(b) $[0, 0, 0]$.

6 Iloczyn mieszany – zastosowanie

Teoria

Jeśli P_0, P_1, P_2 i P_3 są punktami w przestrzeni $\mathbb{R}^3$, to objętość V czworościanu $P_0P_1P_2P_3$ można wyliczyć ze wzoru

$$V = \frac{1}{6} \cdot |v_1 \circ (v_2 \times v_3)|,$$

gdzie, dla $i = 1, 2, 3$, v_i jest wektorem o początku P_0 i końcu P_i . Zauważmy, że jeśli

$$v_1 = [x_1, x_2, x_3], \quad v_2 = [y_1, y_2, y_3] \quad \text{oraz} \quad v_3 = [z_1, z_2, z_3],$$

to

$$v_1 \circ (v_2 \times v_3) := \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}.$$

Odpowiedź do Zadania 6

$\frac{1}{3}$.