

Zestaw 10

1 Zadanie 1

Wskazówki

Niech b i c będą bazami przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$. Załóżmy, że mamy macierz $M_F^{b,b}$ przekształcenia liniowego $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ w bazie b i chcemy znaleźć macierz $M_F^{c,c}$ przekształcenia F w bazie c . Z Zestawu 9 wiemy, że jeśli e jest bazą standardową oraz $M_F^{e,e}$ jest bazą przekształcenia F w bazie standardowej, to

$$M_F^{b,b} = P_{e,b}^{-1} \cdot M_F^{e,e} \cdot P_{e,b}$$

i

$$M_F^{c,c} = P_{e,c}^{-1} \cdot M_F^{e,e} \cdot P_{e,c}.$$

Z pierwszego z powyższych wzór otrzymujemy, że

$$M_F^{e,e} = P_{e,b} \cdot M_F^{b,b} \cdot P_{e,b}^{-1}, \quad (1.1)$$

co po podstawieniu do drugiego wzoru daje wzór

$$M_F^{c,c} = P_{e,c}^{-1} \cdot P_{e,b} \cdot M_F^{b,b} \cdot P_{e,b}^{-1} \cdot P_{e,c},$$

z którego należy skorzystać rozwiązując punkt (a). Przypomnijmy, że metoda znajdowania macierzy $P_{e,b}$ i $P_{e,c}$ (a co za tym idzie również $P_{e,b}^{-1}$ i $P_{e,c}^{-1}$) została przedstawiona w Zestawie 9 (Zadanie 6).

Przypomnijmy, że jeśli $v \in \mathbb{R}^n$, to

$$F(v) = v \cdot (M_F^{e,e})^T,$$

gdzie dla macierzy A symbol A^T oznacza macierz transponowaną macierzy A . Korzystając ze wzoru (1.1) i własności transponowania, otrzymujemy wzór

$$F(v) = v \cdot (P_{e,b}^{-1})^T \cdot (M_F^{b,b})^T \cdot P_{e,b}^T.$$

z którego należy skorzystać w części (b)

Odpowiedź

$$(a) \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$(b) [8, 6, 6].$$

2 Wektory i wartości własne

Teoria

Niech F będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej V nad ciałem K , tzn. $F: V \rightarrow V$ jest przekształceniem liniowym. Parę (λ, v) , gdzie $\lambda \in K$ i $v \in V$, taką, że

$$v \neq 0 \quad \text{oraz} \quad F(v) = \lambda \cdot v$$

nazwiemy parą własną endomorfizmu F .¹ Jeśli (λ, v) jest parą własną endomorfizmu F , to λ nazywamy wartością własną endomorfizmu F (odpowiadającą wektorowi v), zaś v wektorem własnym endomorfizmu F (odpowiadającym wartości własnej λ). Jeśli v jest wektorem własnym endomorfizmu odpowiadającym wartości własnej λ , to dla każdego niezerowego składowego μ wektor $\mu \cdot v$ też jest wektorem własnym endomorfizmu odpowiadającym wartości własnej λ . Zatem zwykle jednej wartości własnej odpowiada wiele wektorów własnych, ale jeśli v jest wektorem własnym, to odpowiada mu dokładnie jedna wartość własna.

Jeśli A jest macierzą kwadratową o n wierszach i n kolumnach i współczynnikach w ciele K , to wartościami i wektorami własnymi macierzy A są wektory i wartości własne przekształceń $F_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. A więc $\lambda \in K$ jest wartością własną macierzy A wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wektor $v \in K^n$ taki, że

$$v \neq 0 \quad \text{oraz} \quad v \cdot A^T = \lambda \cdot v.$$

Podobnie, v jest wektorem własnym macierzy A , jeśli $v \neq 0$ oraz istnieje skalar $\lambda \in K$ taki, że

$$v \cdot A^T = \lambda \cdot v.$$

Opiszemy teraz metodę znajdowania wartości i wektorów własnych. Do tego celu potrzebujemy pojęcia wielomianu charakterystycznego. Jeśli A jest macierzą, to wielomianem charakterystycznym macierzy A nazywamy wyznacznik macierzy $A - tI_n$, gdzie t jest zmienną, a I_n macierzą jednostkową rozmiaru n . Wielomian charakterystyczny oznaczamy χ_A , zatem

$$\chi_A(t) := \det(A - tI_n).$$

Zauważmy, że macierz $A - tI_n$ powstaje z macierzy A przez odjęcie zmiennej t od wyrazów stojących na głównej przekątnej. Ponieważ wielomian charakterystyczny liczymy w pierścieniu wielomianów, więc najczęściej wyznacznik

¹Należy podkreślić, że nazwa „para własna” nie jest powszechnie stosowana, nie mniej wprowadzenie tego pojęcia pozwala sformułować definicję wektora i wartości własnej bez dwukrotnego powtarzania odpowiedniego warunku.

$\det(A - tI_n)$ wyliczamy, posługując się rozwinięciem Laplace'a (choć do pewnego stopnia można próbować sobie pomóc metodą eliminacji Gaussa).

Dysponując pojęciem wielomianu charakterystycznego, możemy przedstawić zapowiadaną metodą. Wartości własnej macierzy będziemy znajdować korzystając z następującego faktu: *Skalar λ jest wartością własną macierzy A wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi_A(\lambda) = 0$* . Innymi słowy, aby znaleźć wartości własne, musimy w ciele K rozwiązać równanie $\chi_A(t) = 0$ (z niewiadomą t). Zauważmy, że jest to równanie wielomianowe stopnia n , w konkretnych zadaniach dla „dużych” n (tj. $n > 2$) możliwość jego rozwiązania zależy najczęściej od tego, czy uda nam się „zgadnąć” przykładowe pierwiastki. Warto przy okazji zaznaczyć, że w przypadku ciała liczb zespolonych liczba wartości własnych liczonych z krotnościami powinna być równa rozmiarowi macierzy, a więc n .

Jeśli znajdziemy wartości własne macierzy A (albo przynajmniej niektóre z nich), to możemy znaleźć odpowiadające im wektory własne. Jeśli λ jest wartością własną macierzy A , to aby znaleźć odpowiadające jej wektory własne należy rozwiązać jednorodny układ równań liniowych, którego macierzą główną jest macierz $A - \lambda I_n$ (tj. macierz powstała przez podstawienie do macierzy $A - tI_n$, którą utworzyliśmy na potrzeby wyliczenia wielomianu charakterystycznego, w miejsce zmiennej t wartość λ). Wektorami własnymi są niezerowe rozwiązania tego układu równań. W praktyce oznacza to, że jeśli otrzymamy zbiór rozwiązań postaci

$$\begin{cases} x_{j_1} = a_{j_1, i_1} x_{i_1} + \dots + a_{j_1, i_r} x_{i_r}, \\ \dots \\ x_{j_{n-r}} = a_{j_{n-r}, i_1} x_{i_1} + \dots + a_{j_{n-r}, i_r} x_{i_r}, \\ x_{i_1}, \dots, x_{i_r} \in K, \end{cases}$$

to opisując wektory własne musimy dodać warunek $[x_{i_1}, \dots, x_{i_r}] \neq [0, \dots, 0]$ (oczywiście nawiasy kwadratowe można pominąć, gdy $r = 1$). Innymi słowy, opis zbioru wektorów własnych ma w tym przypadku postać

$$\begin{cases} x_{j_1} = a_{j_1, i_1} x_{i_1} + \dots + a_{j_1, i_r} x_{i_r}, \\ \dots \\ x_{j_{n-r}} = a_{j_{n-r}, i_1} x_{i_1} + \dots + a_{j_{n-r}, i_r} x_{i_r}, \\ x_{i_1}, \dots, x_{i_r} \in K, [x_{i_1}, \dots, x_{i_r}] \neq [0, \dots, 0]. \end{cases}$$

Ostatnim elementem, który pojawia się w Zadaniu 2, to twierdzenie Cayleya–Hamiltona. Twierdzenie to mówi, że jeśli do wielomianu charakterystycznego macierzy A w miejsce zmiennej t podstawimy macierz A , to po wykonaniu wszystkich obliczeń otrzymamy macierz zerową. W skrócie,

$$\chi_A(A) = 0.$$

Podstawiając macierz A do wielomianu charakterystycznego, należy pamiętać, że jeśli wyrazem wolnym wielomian $\chi_A(t)$ jest liczba a_0 (która, na marginesie, musi być równa $\det A$), to w jej miejsce wpisujemy macierz $a_0 \cdot \mathbf{1}_n$ (gdzie $\mathbf{1}_n$ macierzą jednostkową rozmiaru tego samego rozmiaru co macierz A), czyli innymi słowy $A^0 = I_n$.

Przykład: Zadanie 2(b)

Jeśli

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

to aby wyznaczyć wartości własne macierzy, tworzymy macierz

$$A - tI_3 = \begin{bmatrix} -t & 1 & 0 \\ -4 & 4-t & 0 \\ -2 & 1 & 2-t \end{bmatrix},$$

a następnie wyliczamy (posługując się np. metodą Sarrusa) jej wyznacznik

$$\chi_A(t) = \det(A - tI_3) = -t^3 + 6t^2 - 12t + 8.$$

Trzykrotnym pierwiastkiem tego wielomianu jest 2 (pierwszą 2 możemy znaleźć, sprawdzając dzielniki 8, następnie po zastosowaniu schematu Hornera, rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe). Zatem jedyną wartością własną macierzy A jest 2.

Aby znaleźć wektory własne odpowiadające (jedynej) wartości własnej 2, rozwiązujemy układ równań, którego postacią macierzową jest

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Zbiór rozwiązań tego układu ma postać

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1, \\ x_1, x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

zatem zbiorem wektorów własnych odpowiadających wartości własnej 2 jest

$$\{[x_1, 2x_1, x_3] : x_1, x_3 \in \mathbb{R}, [x_1, x_3] \neq [0, 0]\}.$$

Jeśli szukamy wektorów własnych nad ciałem liczb zespolonych, to odpowiedni zbiór przyjmuje postać

$$\{[x_1, 2x_1, x_3] : x_1, x_3 \in \mathbb{C}, [x_1, x_3] \neq [0, 0]\}.$$

Aby sprawdzić tezę twierdzenia Cayleya–Hamiltona zauważmy, że

$$A^2 = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ -16 & 12 & 0 \\ -8 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad A^3 = \begin{bmatrix} -16 & 12 & 0 \\ -48 & 32 & 0 \\ -24 & 12 & 8 \end{bmatrix},$$

więc

$$\begin{aligned} \chi_A(A) = & - \begin{bmatrix} -16 & 12 & 0 \\ -48 & 32 & 0 \\ -24 & 12 & 8 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ -16 & 12 & 0 \\ -8 & 4 & 4 \end{bmatrix} \\ & - 12 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Odpowiedzi do Zadania 2

(a) Wartości własne: -1 .

Wektory własne dla -1 nad $\mathbb{R}$: $[-x_3, -x_3, x_3]$, $x_3 \in \mathbb{R}$, $x_3 \neq 0$.

Wektory własne dla -1 nad $\mathbb{C}$: $[-x_3, -x_3, x_3]$, $x_3 \in \mathbb{C}$, $x_3 \neq 0$.

(c) Wartości własne: $1, 2, -3$.

Wektory własne dla 1 nad $\mathbb{R}$: $[0, x_2, 3x_2, 4x_2]$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_2 \neq 0$.

Wektory własne dla 1 nad $\mathbb{C}$: $[0, x_2, 3x_2, 4x_2]$, $x_2 \in \mathbb{C}$, $x_2 \neq 0$.

Wektory własne dla 2 nad $\mathbb{R}$: $[0, 0, x_4, x_4]$, $x_4 \in \mathbb{R}$, $x_4 \neq 0$.

Wektory własne dla 2 nad $\mathbb{C}$: $[0, 0, x_4, x_4]$, $x_4 \in \mathbb{C}$, $x_4 \neq 0$.

Wektory własne dla -3 nad $\mathbb{R}$: $[-4x_2, x_2, 3x_2, 4x_2]$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_2 \neq 0$.

Wektory własne dla -3 nad $\mathbb{C}$: $[-4x_2, x_2, 3x_2, 4x_2]$, $x_2 \in \mathbb{C}$, $x_2 \neq 0$.

(d) Wartości własne: 1 .

Wektory własne dla 1 nad $\mathbb{R}$: $[x_1, x_2, x_3]$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, $[x_1, x_2, x_3] \neq [0, 0, 0]$.

Wektory własne dla 1 nad $\mathbb{C}$: $[x_1, x_2, x_3]$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$, $[x_1, x_2, x_3] \neq [0, 0, 0]$.

(e) Wartości własne: 1 .

Wektory własne dla 1 nad $\mathbb{R}$: $[x_1, 0, x_3]$, $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$, $[x_1, x_3] \neq [0, 0]$.

Wektory własne dla 1 nad $\mathbb{C}$: $[x_1, 0, x_3]$, $x_1, x_3 \in \mathbb{C}$, $[x_1, x_3] \neq [0, 0]$.

(f) Wartości własne: 1.

Wektory własne dla 1 nad $\mathbb{R}$: $[x_1, 0, 0]$, $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq 0$.

Wektory własne dla 1 nad $\mathbb{C}$: $[x_1, 0, 0]$, $x_1 \in \mathbb{C}$, $x_1 \neq 0$.

(g) Wartości własne nad $\mathbb{R}$: brak.

Wartości własne nad $\mathbb{C}$: $1 - i$, $1 + i$.

Wektory własne dla $1 - i$ (nad $\mathbb{C}$): $[-ix_2, x_2]$, $x_2 \in \mathbb{C}$, $x_2 \neq 0$.

Wektory własne dla $1 + i$ (nad $\mathbb{C}$): $[ix_2, x_2]$, $x_2 \in \mathbb{C}$, $x_2 \neq 0$.

(h) Wartości własne: $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$.

Wektory własne dla $\sqrt{2}$ (nad $\mathbb{R}$): $[(\sqrt{2} - 1)x_2, x_2]$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_2 \neq 0$.

Wektory własne dla $\sqrt{2}$ (nad $\mathbb{C}$): $[(\sqrt{2} - 1)x_2, x_2]$, $x_2 \in \mathbb{C}$, $x_2 \neq 0$.

Wektory własne dla $-\sqrt{2}$ (nad $\mathbb{R}$): $[-(\sqrt{2} + 1)x_2, x_2]$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_2 \neq 0$.

Wektory własne dla $-\sqrt{2}$ (nad $\mathbb{C}$): $[-(\sqrt{2} + 1)x_2, x_2]$, $x_2 \in \mathbb{C}$, $x_2 \neq 0$.

(i) Wartości własne: 1, 2, 3.

Wektory własne dla 1 (nad $\mathbb{R}$): $[x_3, x_3, x_3]$, $x_3 \in \mathbb{R}$, $x_3 \neq 0$.

Wektory własne dla 1 (nad $\mathbb{C}$): $[x_3, x_3, x_3]$, $x_3 \in \mathbb{C}$, $x_3 \neq 0$.

Wektory własne dla 2 (nad $\mathbb{R}$): $[x_3, 0, x_3]$, $x_3 \in \mathbb{R}$, $x_3 \neq 0$.

Wektory własne dla 2 (nad $\mathbb{C}$): $[x_3, 0, x_3]$, $x_3 \in \mathbb{C}$, $x_3 \neq 0$.

Wektory własne dla 3 (nad $\mathbb{R}$): $[x_2, x_2, 0]$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_2 \neq 0$.

Wektory własne dla 3 (nad $\mathbb{C}$): $[x_2, x_2, 0]$, $x_2 \in \mathbb{C}$, $x_2 \neq 0$.

(j) Wartości własne: 3, 6.

Wektory własne dla 3 (nad $\mathbb{R}$): $[0, -x_3, x_3]$, $x_3 \in \mathbb{R}$, $x_3 \neq 0$.

Wektory własne dla 3 (nad $\mathbb{C}$): $[0, -x_3, x_3]$, $x_3 \in \mathbb{C}$, $x_3 \neq 0$.

Wektory własne dla 6 (nad $\mathbb{R}$): $[\frac{3}{2}x_3, 2x_3, x_3]$, $x_3 \in \mathbb{R}$, $x_3 \neq 0$.

Wektory własne dla 6 (nad $\mathbb{C}$): $[\frac{3}{2}x_3, 2x_3, x_3]$, $x_3 \in \mathbb{C}$, $x_3 \neq 0$.

Odpowiedzi do Zadania 3

(a) Wartości własne: brak.

(b) Wartości własne: 4.

Wektory własne dla 4: $[3x_2, x_2]$, $x_2 \in \mathbb{Z}_5$, $x_2 \neq 0$, a więc wektory

$$[3, 1], [1, 2], [4, 3], [2, 4].$$

Odpowiedź do Zadania 4

Niech

$$\omega := \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \imath \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Wartości własne: $\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{n-1}$ (innymi słowy, wartościami własnymi są zespolone pierwiastki n -tego stopnia z 1).

[Przypomnijmy, że

$$\omega^k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \imath \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

W szczególności, $\omega^0 = 1$.]

Wektory własne dla ω^k :

$$[\xi, \xi\omega^{-k}, \xi\omega^{-2k}, \dots, \xi\omega^{-(i-1)k}, \dots, \xi\omega^{-(n-1)k}], \quad \xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Wskazówki:

$$M_T^{e,e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \chi_{M_T^{e,e}}(t) = (-1)^n(t^n - 1).$$

5 Diagonalizowalność macierzy

Teoria

Niech A będzie macierzą kwadratową o n wierszach i n kolumnach i współczynnikach z ciała K . Mówimy, że macierz A jest diagonalizowalna, jeśli istnieje baza b przestrzeni K^n taka, że macierz $M_{F_A}^{b,b}$ przekształcenia F_A w bazie b jest diagonalna. Równoważnie, korzystając z rozważań z Zestawu 9, oznacza to, że istnieje macierz odwracalna B taka, że macierz $B^{-1}AB$ jest diagonalna.

Będziemy sprawdzać diagonalizowalność macierzy, korzystając z wartości i wektorów własnych. W tym celu wprowadzimy dodatkowe oznaczenia i definicje. Dla wartości własnej macierzy λ niech $E_\lambda(A)$ będzie zbiorem wszystkich wektorów $v \in K^n$ takich, że $v \cdot A^T = \lambda \cdot v$. Innymi słowy, jest to zbiór rozwiązań układu równań, o którym była mowa przy okazji omówienia zadania Zadania 2. Zbiór $E_\lambda(A)$ jest podprzestrzenią liniową, która składa się z wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ oraz wektora zerowego. Wymiar podprzestrzeni $E_\lambda(A)$ nazywamy krotnością geometryczną wartości własnej λ .

Przypomnijmy, że jeśli λ jest wartością własną macierzy A , to λ jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego macierzy A . Krotność λ jako pierwiastka wielomianu $\chi_A(t)$ nazywamy krotnością algebraiczną wartości własnej λ . Wiadomo, że krotność algebraiczna jest zawsze nie mniejsza niż krotność geometryczna.

Założmy więc, że macierz A ma parami różne wartości własne $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, których krotności algebraiczne i geometryczne wynoszą odpowiednio $r_1, \dots, r_k$ i $d_1, \dots, d_k$. Wtedy macierz A jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy:

- (i) $r_1 + \dots + r_k = n$;
- (ii) dla każdego i (tj. dla każdej wartości własnej), $r_i = d_i$.

Warto pokreślić, że

- (1) warunek (i) jest spełniony zawsze, gdy badamy diagonalizowalność nad ciałem liczb zespolonych,
- (2) dla danego i warunek (ii) jest spełniony (tzn. $r_i = d_i$), jeśli $r_i = 1$.

W powyższej sytuacji, jeśli macierz A jest diagonalizowalna, to aby znaleźć bazę złożoną z wektorów własnych, należy dla każdego $i = 1, \dots, k$ znaleźć bazę przestrzeni $E_{\lambda_i}(A)$. Ponieważ $E_{\lambda_i}(A)$ jest zbiorem rozwiązań jednorodnego układu równań, więc możemy to zrobić, korzystając z metody z Zadania 9 w Zestawie 8. Jeśli $(b_{i,1}, \dots, b_{i,r_i})$ jest bazą uporządkowaną przestrzeni $E_{\lambda_i}(A)$, dla $i = 1, \dots, k$, to

$$b := (b_{1,1}, \dots, b_{1,r_1}, \dots, b_{k,1}, \dots, b_{k,r_k})$$

jest bazą uporządkowaną złożoną z wektorów własnych macierzy A , a odpowiednia macierz diagonalna ma na przekątnej kolejno r_1 powtórzeń elementu λ_1 , r_2 powtórzeń elementu λ_2 , itd.

Przykład: Zadanie 5(a)

Zbadamy diagonalizowalność macierzy

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozpoczynamy od znalezienia jej wartości własnych, przy czym musimy też zwracać uwagę na ich krotności+ jako pierwiastków wielomianu charakterystycznego.

Wykorzystując metody z Zadania 2, wyliczamy, że wartościami własnymi macierzy A są 1 oraz 2, przy czym 1 jest pierwiastkiem jednokrotnym, a 2 dwukrotnym wielomianu charakterystycznego. Zatem mamy, używając wprowadzonej wyżej notacji, $k = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $r_1 = 1$ i $r_2 = 2$. Oczywiście $n = 3$. Zatem $r_1 + r_2 = n$ (tzn. warunek (i) jest spełniony).

Aby znaleźć zbiór $E_1(A)$ rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

Jego zbiór rozwiązań jest postaci

$$\begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = x_3, \\ x_3 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

zatem $d_1 = 1 = r_1$ (co mogliśmy stwierdzić bez konieczności rozwiązywania odpowiedniego układu równań, gdyż $r_1 = 1$, nie mniej wyliczenie zbioru $E_1(A)$ będzie nam potrzebne do znalezienia bazy złożonej z wektorów własnych).

Podobnie zbiór $E_2(A)$ jest postaci

$$\begin{cases} x_3 = -3x_1 + 3x_2, \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

zatem $d_2 = 2 = r_2$.

Ponieważ

$$r_1 + r_2 = n, \quad r_1 = d_1 \quad \text{i} \quad r_2 = d_2,$$

więc macierz A jest diagonalizowalna. Ponadto, z opisu zbiorów $E_1(A)$ i $E_2(A)$ odczytujemy, że ciąg $([1, 1, 1])$ jest bazą uporządkowaną przestrzeni $E_1(A)$ oraz ciąg $([1, 0, -3], [0, 1, 3])$ jest bazą przestrzeni $E_2(A)$. Ostatecznie ciąg

$$([1, 1, 1], [1, 0, -3], [0, 1, 3])$$

jest bazą uporządkowaną przestrzeni $\mathbb{R}^3$ złożoną z wektorów własnych oraz odpowiednia macierz diagonalna jest postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Podkreślmy, że ważne jest, aby wartości własne umieszczać w kolejności odpowiadającej kolejności wektorów w otrzymanej bazie.

Nad ciałem liczby zespolonych rachunki i odpowiedzi wyglądają identycznie (z dokładnością do zamiany każdego wystąpienia $\mathbb{R}$ przez $\mathbb{C}$), gdyż macierz ma współczynniki rzeczywiste i wszystkie jej wartości własne są liczbami rzeczywistymi.

Odpowiedzi do Zadania 5

- (b) Macierz nie jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$ (jedynym pierwiastkiem jednokrotnym nad $\mathbb{R}$ jest 1, a więc $r_1 + \dots + r_k = 1 \neq 3 = n$).

Macierz jest diagonalizowalna nad $\mathbb{C}$.

Bazą wektorów własnych jest (na przykład) ciąg:

$$([1, 1, 2], [3 - 3i, 4, 5 - 3i], [3 + 3i, 4, 5 + 3i]).$$

Odpowiednia macierz diagonalna to:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + 3i & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 3i \end{bmatrix}.$$

- (c) Macierz nie jest diagonalizowalna ani nad $\mathbb{R}$ ani nad $\mathbb{C}$.

- (d) Macierz nie jest diagonalizowalna ani nad $\mathbb{R}$ ani nad $\mathbb{C}$.

6 Zastosowanie diagonalizowalności macierzy

Teoria

Przypuśćmy, że A jest macierzą diagonalizowalną. Wtedy istnieje macierz B taka, że macierz $B^{-1}AB$ jest diagonalna, tj.

$$D := B^{-1}AB = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

dla pewnych $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Wtedy $A = BDB^{-1}$, a więc jeśli m jest dodatnią liczbą całkowitą, to

$$A^m = \underbrace{AA \cdots A}_{m \text{ powtórzeń}} = \underbrace{(BDB^{-1})(BDB^{-1}) \cdots (BDB^{-1})}_{m \text{ powtórzeń}} = B \underbrace{DD \cdots D}_{m \text{ powtórzeń}} B^{-1} = BD^m B^{-1}.$$

Ponieważ

$$D^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \lambda_n^m \end{bmatrix},$$

więc powyższy wzór pozwala (szybciej) wyliczyć macierz A^m . Warto dodać, że macierz B jest macierzą przejścia od bazy b złożonej z wektorów własnych do bazy standardowej e , a więc macierzą, której kolumnami są wektory tworzące bazę b (w kolejności odpowiadającej kolejności wartości własnych na przekątnej macierzy D).

Przypuśćmy teraz, że mamy ciąg (a_n) taki, że istnieją liczby c_1 i c_2 takie, że $c_1^2 + 4c_2 \neq 0$ oraz dla każdej dodatniej liczby całkowitej n spełniony jest warunek

$$a_{n+2} = c_1 \cdot a_{n+1} + c_2 \cdot a_n.$$

Powyższe równanie możemy zapisać w postaci

$$[a_{n+2}, a_{n+1}] = [a_{n+1}, a_n] \cdot A,$$

gdzie

$$A := \begin{bmatrix} c_1 & 1 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iterując powyższą równość, otrzymujemy

$$[a_{n+2}, a_{n+1}] = [a_2, a_1] \cdot A^n.$$

Zauważmy, że

$$\chi_A(t) = t^2 - c_1 t - c_2,$$

więc warunek $c_1^2 + 4c_2 \neq 0$ oznacza, że wielomian ma dwa różne pierwiastki, zatem macierz A jest diagonalizowalna. Korzystając z opisanej wcześniej metody, znajdujemy

$$A^n = \begin{bmatrix} c_{1,1}^{(n)} & c_{1,2}^{(n)} \\ c_{2,1}^{(n)} & c_{2,2}^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$a_{n+2} = c_{1,1}^{(n)} \cdot a_2 + c_{2,1}^{(n)} a_1.$$

Przykład

Założmy, że ciąg (a_n) spełnia warunek

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n,$$

dla każdej dodatniej liczby całkowitej n . Ponadto $a_1 = 1$ i $a_2 = 2$. Wtedy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Wartościami własnymi macierzy A są 1 i 2, odpowiednią bazą wektorów własnych jest

$$b = ([1, -2], [1, -1]).$$

Zatem

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$A^n = BD^nB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ -2^{n+1} + 2 & -2^n + 2 \end{bmatrix}.$$

W efekcie

$$[a_{n+2}, a_{n+1}] = [a_2, a_1] \cdot A^n = [2, 1] \cdot \begin{bmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 \\ -2^{n+1} + 2 & -2^n + 2 \end{bmatrix} = [2^{n+1}, 2^n],$$

a więc $a_{n+2} = 2^{n+1}$, tzn. $a_n = 2^{n-1}$.

Odpowiedzi do Zadania 6

(a) $a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot (-1)^{n-1}$.

(b) $a_n = (-2 - i\frac{\sqrt{3}}{3}) \cdot (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^n + (-2 + i\frac{\sqrt{3}}{3}) \cdot (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^n$.

Ponieważ $(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^6 = -1 = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^6$, więc wzór jawny można też zapisać w postaci:

$$a_n = \begin{cases} -4 & \text{gdy } n \equiv 0 \pmod{6}, \\ -1 & \text{gdy } n \equiv 1 \pmod{6}, \\ 3 & \text{gdy } n \equiv 2 \pmod{6}, \\ 4 & \text{gdy } n \equiv 3 \pmod{6}, \\ 1 & \text{gdy } n \equiv 4 \pmod{6}, \\ -3 & \text{gdy } n \equiv 5 \pmod{6}, \end{cases}$$

gdzie dla $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ zapis $n \equiv r \pmod{6}$ oznacza, że r jest resztą z dzielenia n przez 6.