

Zestaw 9

1 Przekształcenia liniowe

Teoria

Jeśli V i W są przestrzeniami liniowymi nad ciałem K , to funkcję $F: V \rightarrow W$ nazywamy przekształceniem liniowym, jeśli

$$F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w)$$

dla dowolnych skalarów $\lambda, \mu \in K$ oraz wektorów $v, w \in V$.

Jeśli K jest ciałem nieskończonym, $V = K^n$ i $W = K^m$, to funkcja $F: V \rightarrow W$ jest przekształceniem liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją wielomiany $f_1, \dots, f_m$ jednorodnego stopnia 1 od n zmiennych takie, że

$$F(x_1, \dots, x_n) = [f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)],$$

dla wszystkich $x_1, \dots, x_n \in K$, gdzie $F(x_1, \dots, x_n)$ jest skrótowym zapisem wyrażenia $F([x_1, \dots, x_n])$ (pomijamy jedną parę nawiasów). Przypomnijmy, że wielomian f od zmiennych $x_1, \dots, x_n$ nazywamy jednorodnym stopnia 1 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją skalary $a_1, \dots, a_n \in K$ takie, że

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n.$$

W szczególności, wielomian zerowy jest wielomianem jednorodnym stopnia 1 (należy wziąć $a_1 = \dots = a_n = 0$).

Powyższa reguła pozwala przewidzieć, które z funkcji w Zadaniu 1 są przekształceniami liniowymi (odpowiedzi poniżej). Warto jednak dodać, że właściwe rozwiązanie Zadania 1 polega na sprawdzeniu liniowości z definicji, jak w poniższych przykładach.

Przykład I: Zadanie 1(a)

Niech $v = [x_1, y_1] \in \mathbb{R}$, $w = [x_2, y_2] \in \mathbb{R}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} F(\lambda v + \mu w) &= F(\lambda[x_1, y_1] + \mu[x_2, y_2]) \\ &= F(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) \\ &= (\lambda x_1 + \mu x_2)(\lambda y_1 + \mu y_2) \\ &= \lambda^2 x_1 y_1 + \lambda \mu (x_1 y_2 + x_2 y_1) + \mu^2 y_1 y_2. \end{aligned}$$

Podobnie,

$$\begin{aligned} \lambda F(v) + \mu F(w) &= \lambda F(x_1, y_1) + \mu F(x_2, y_2) \\ &= \lambda x_1 y_1 + \mu x_2 y_2. \end{aligned}$$

Z powyższych równości nie wygląda, aby

$$F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w).$$

Aby potwierdzić, że istotnie funkcja F nie jest przekształceniem liniowym, dobrze jest wskazać konkretne wartości $\lambda, \mu, x_1, x_2, y_1, y_2$, dla których

$$F(\lambda v + \mu w) \neq \lambda F(v) + \mu F(w).$$

Takimi wartościami są na przykład $\lambda = \mu = x_1 = x_2 = y_1 = y_2 := 1$. Istotnie, podstawiając do powyższych wzorów (lub licząc z definicji), mamy

$$F(1 \cdot [1, 1] + 1 \cdot [1, 1]) = 1^2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1(1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + 1^2 \cdot 1 \cdot 1 = 4,$$

podczas gdy

$$1 \cdot F(1, 1) + 1 \cdot F(1, 1) = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \neq 4,$$

co kończy rozwiązanie.

Przykład II: Zadanie 1(c)

Niech $v = [x_1, y_1] \in \mathbb{R}, w = [x_2, y_2] \in \mathbb{R}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} F(\lambda v + \mu w) &= F(\lambda[x_1, y_1] + \mu[x_2, y_2]) \\ &= F(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) \\ &= [3(\lambda x_1 + \mu x_2) + 2(\lambda y_1 + \mu y_2), (\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2), \\ &\quad - 5(\lambda y_1 + \mu y_2)] \\ &= [3\lambda x_1 + 3\mu x_2 + 2\lambda y_1 + 2\mu y_2, \lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2, -5\lambda y_1 - 5\mu y_2] \end{aligned}$$

Podobnie,

$$\begin{aligned} \lambda F(v) + \mu F(w) &= \lambda F(x_1, y_1) + \mu F(x_2, y_2) \\ &= \lambda[3x_1 + 2y_1, x_1 + y_1, -5y_1] + \mu[3x_2 + 2y_2, x_2 + y_2, -5y_2] \\ &= [3\lambda x_1 + 2\lambda y_1, \lambda x_1 + \lambda y_1, -5\lambda y_1] + [3\mu x_2 + 2\mu y_2, \mu x_2 + \mu y_2, -5\mu y_2] \\ &= [3\lambda x_1 + 2\lambda y_1 + 3\mu x_2 + 2\mu y_2, \lambda x_1 + \lambda y_1 + \mu x_2 + \mu y_2, -5\lambda y_1 - 5\mu y_2] \\ &= [3\lambda x_1 + 3\mu x_2 + 2\lambda y_1 + 2\mu y_2, \lambda x_1 + \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2, -5\lambda y_1 - 5\mu y_2]. \end{aligned}$$

Z powyższych równości widać, że

$$F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w),$$

a więc F jest przekształceniem liniowym.

Odpowiedzi do Zadania 1

(b) Nie.

(d) Tak.

(e) Nie.

(f) Tak.

(g) Nie.

2 Macierz przekształcenia liniowego. I

Teoria

Jeśli A jest macierzą o m wierszach i n kolumnach o współczynnikach w ciele K , to macierz A wyznacza przekształcenie liniowe $F_A: K^n \rightarrow K^m$ dane wzorem

$$F_A(v) := v \cdot A^T.$$

Przypomnijmy, że A^T macierzą transponowaną do macierzy A , a więc w szczególności macierz A^T ma m kolumn i n wierszy. W konsekwencji, jeśli v jest wektorem (wierszowym) długości n , to $v \cdot A^T$ jest wektorem długości m . Dokładniej, jeśli $v = [x_1, \dots, x_n]$ oraz macierz A ma współczynniki $a_{i,j}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, gdzie oczywiście współczynnik $a_{i,j}$ znajduje się na przecięciu i -tego wiersza i j -tej kolumny, to

$$F_A(v) = [a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n, \dots, a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n]. \quad (2.1)$$

Dla każdego przekształcenia liniowego $F: K^n \rightarrow K^m$ istnieje jednoznacznie wyznaczona macierz A taka, że $F = F_A$, tzn. $F(v) = v \cdot A^T$. Przedstawimy teraz dwie metody znajdowania macierzy.

Aby przedstawić pierwszą metodę, przypomnijmy, że jeśli $F: K^n \rightarrow K^m$ jest przekształceniem liniowym, to istnieją wielomiany jednorodnego stopnia 1 od n zmiennych takie, że

$$F(x_1, \dots, x_n) = [f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)]. \quad (2.2)$$

Ponieważ wielomiany $f_1, \dots, f_m$ są jednorodnego stopnia 1, więc z definicji istnieją składowe $a_{i,j}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, takie, że

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n, \quad i = 1, \dots, m.$$

Wstawiając powyższe wyrażenia do wzoru (2.2) oraz porównując otrzymane wyrażenie ze wzorem 2.1, otrzymujemy, że składowe $a_{i,j}$ są współczynnikami poszukiwanej macierzy A .

Inny sposób wyznaczenia macierzy A polega na wyliczeniu wartości przekształcenia F na wektorach bazy standardowej. Zatem dla $i = 1, \dots, n$ niech e_i będzie wektorem długości n , który ma 1 na i -tym miejscu oraz 0 na pozostałych. Niech

$$v_1 := F(e_1), \dots, v_n := F(e_n).$$

Wtedy A jest macierzą, której kolumnami są wektory $v_1, \dots, v_n$.

Przykład: Zadanie 2(c)

Niech $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie dane wzorem

$$F(x, y) := [3x + 2y, x + y, -5y].$$

Metoda I

W powyższym przykładzie mamy

$$F(x, y) = [f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)],$$

gdzie

$$f_1(x, y) = 3 \cdot x + 2 \cdot y, \quad f_2(x, y) = 1 \cdot x + 1 \cdot y$$

i

$$f_3(x, y) = 0 \cdot x + (-5) \cdot y,$$

zatem $F = F_A$ dla

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Metoda II

Mamy

$$F(e_1) = F(1, 0) = [3 \cdot 1 + 2 \cdot 0, 1 + 0, -5 \cdot 0] = [3, 1, 0].$$

Podobnie

$$F(e_2) = F(0, 1) = [2, 1, -5].$$

Tworzymy macierz, której kolumnami są powyższe wektory i otrzymujemy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Odpowiedzi do Zadania 2

$$(d) \quad A = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$(f) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

3 Macierz przekształcenia liniowego. II

Teoria

Przypomnijmy, że jeśli A jest macierzą, to

$$F_A(x) = x \cdot A^T.$$

Z powyższego wzoru wynika w szczególności, że aby znaleźć wektory y takie, że $F_A(y) = 0$, trzeba rozwiązać jednorodny układ równań, którego macierzą główną jest macierz A .

Przykład

Jeśli

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad x = [2, 1, -1],$$

to

$$F_A(x) = [2, 1] \cdot A^T = [2, 1, -1] \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = [7, 10].$$

Aby znaleźć wektory $y = [y_1, y_2, y_3]$ takie, że $F_A(y) = 0$, rozwiązujemy układ równań, którego postać macierzowa wygląda następująco

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right],$$

a więc układ równań

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 = 0, \\ 2y_1 + y_2 - 5y_3 = 0. \end{cases}$$

Rozwiązaniem powyższego układu równań jest zbiór opisany warunkami

$$\begin{cases} y_1 = -5y_3, \\ y_2 = 15y_3, \\ y_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Odpowiedzi do Zadania 3

(a) $[4, 32]$, $y_1 = -2y_2$, $y_2 \in \mathbb{R}$, $y_3 = 3y_2$.

(b) $[0, 2, 1]$, $y_1 = y_2$, $y_2 \in \mathbb{R}$, $y_3 = 0$.

5 Odwracalne przekształcenia liniowe

Teoria

Jeśli $F = F_A$ dla macierzy A , to przekształcenie liniowe F jest odwracalne wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest odwracalna. Ponadto, w powyższej sytuacji $F^{-1} = F_{A^{-1}}$. Zauważmy w szczególności, że jeśli macierz A nie jest kwadratowa, to przekształcenie F nie może być odwracalne.

Zatem, aby sprawdzić, czy dane przekształcenie F jest odwracalne, należy znaleźć macierz A taką, że $F = F_A$ i sprawdzić, czy macierz A jest odwracalna. Jeśli macierz A jest odwracalna i chcemy znaleźć postać przekształcenia odwrotnego do F , to musimy znaleźć macierz odwrotną A^{-1} do macierzy A i wyznaczone przez macierz A^{-1} przekształcenie. W szczególności, aby rozwiązywać Zadanie 5 należy przypomnieć sobie informacje o macierzach odwrotnych przedstawione przez okazji omawiania Zestawu 5.

Przykład: Zadanie 5(a)

Zauważmy, że $F = F_A$ dla

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Wtedy macierz A jest odwracalna oraz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{-2}{13} \end{bmatrix}.$$

Zatem przekształcenie F jest odwracalne oraz przekształcenie odwrotne

$$F^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

dane jest wzorem

$$F^{-1}(x, y) = \left[\frac{5}{13}x + \frac{1}{13}y, \frac{3}{13}x - \frac{2}{13}y \right].$$

Odpowiedzi do Zadania 5

(b) Przekształcenie F nie jest odwracalne.

Uwaga: $F = F_A$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Przekształcenie F nie jest odwracalne.

(d) Przekształcenie F jest odwracalne i

$$F^{-1}(x, y, z) = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z, -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}z \right].$$

6 Macierz przekształcenia liniowego w bazach

Teoria

Niech $F: K^n \rightarrow K^m$ będzie przekształceniem liniowym oraz $b = (b_1, \dots, b_n)$ i $c = (c_1, \dots, c_m)$ bazami uporządkowanymi przestrzeni K^n i K^m , odpowiednio. Dla każdego $j = 1, \dots, n$, niech $h_j = [h_{1,j}, \dots, h_{m,j}]$ będzie wektorem współrzędnych wektora $F(b_j)$ w bazie c (pojęcie to pojawiło się w Zadaniu 3 w Zestawie 8). Macierz H , której kolumnami są wektory $h_1, \dots, h_n$, a więc $H = [h_{i,j}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$, nazywamy macierzą przekształcenia F w bazach b i c oraz oznaczamy $M_F^{b,c}$.

Jeśli $F = F_A$, to A jest macierzą przekształcenia F w bazach standardowych, tzn. $A = M_F^{e,f}$, gdzie e i f są bazami standardowymi dziedziny i przeciwdziedziny, odpowiednio.

Opiszemy teraz metodę znajdowania macierzy przekształcenia F w bazach „niestandardowych”. Opiera się ona na następującej obserwacji. Niech $F: K^n \rightarrow K^m$ i $G: K^m \rightarrow K^l$ będą przekształceniami liniowymi, a e, f i c bazami w przestrzeniach K^n, K^m i K^l , odpowiednio. Wtedy wiadomo, że złożenie $G \circ F$ jest przekształceniem liniowym oraz

$$M_{G \circ F}^{e,c} = M_G^{e,f} \cdot M_F^{f,c}. \quad (6.3)$$

Powyższa obserwacja w łatwy sposób uogólnia się na przypadek trzech odwzorowań, co można symbolicznie zapisać

$$M_{G \circ F \circ H}^{b,c} = M_G^{f,c} \cdot M_F^{e,f} \cdot M_H^{b,e}.$$

Stosując powyższą obserwację dla odwzorowań G i H będących identycznościami na odpowiednich przestrzeniach, otrzymujemy, że

$$M_F^{b,c} = P_{c,f} \cdot M_F^{e,f} \cdot P_{e,b},$$

gdzie $P_{e,b} := M_{\text{Id}}^{b,e}$ i $P_{c,f} := M_{\text{Id}}^{f,c}$ (macierz $P_{e,b}$ nazywamy macierzą przejścia od bazy e do b ; podobnie, $P_{c,f}$ to macierz przejścia od bazy c do f). Jeśli dodatkowo, $F = F_A$ oraz e i f są bazami standardowymi, to $M_F^{e,f} = A$. Podsumowując,

$$M_{F_A}^{b,c} = P_{c,f} \cdot A \cdot P_{e,b},$$

zatem, aby policzyć $M_{F_A}^{b,c}$, wystarczy znaleźć opis macierzy $P_{c,f}$ i $P_{e,b}$.

Bezpośrednio z definicji wynika, że jeśli $b = (b_1, \dots, b_n)$, to $P_{e,b}$ jest macierzą, której kolumnami są wektory $b_1, \dots, b_n$. Ponadto, wzór (6.3) implikuje, że $P_{c,f} = P_{f,c}^{-1}$, gdzie podobnie jak wcześniej $P_{f,c}$ jest macierzą, której kolumnami są wektory tworzące bazę c .

Podsumujemy teraz powyższe rozważania. Załóżmy, że mamy daną macierz A o m wiersza i n kolumnach oraz bazy uporządkowane $b = (b_1, \dots, b_n)$ i $c = (c_1, \dots, c_m)$ przestrzeni K^n i K^m , odpowiednio. Aby znaleźć macierz $M_{F_A}^{b,c}$ przekształcenia F_A w bazach b i c , wykonujemy następujące kroki:

- Tworzymy macierze $P_{e,b}$ i $P_{f,c}$, gdzie $P_{e,b}$ jest macierzą, której kolumnami są wektory $b_1, \dots, b_n$, a $P_{f,c}$ jest macierzą, której kolumnami są wektory $c_1, \dots, c_m$.
- Wyliczamy macierz $P_{f,c}^{-1}$.
- Wtedy

$$M_{F_A}^{b,c} = P_{f,c}^{-1} \cdot A \cdot P_{e,b}. \quad (6.4)$$

Przykład: Zadanie 4

Przypomnijmy, że $F = F_A$ dla

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $b = ([1, -1, 2], [1, 1, 0], [0, 1, 1])$, więc

$$P_{e,b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podobnie,

$$P_{f,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

więc

$$P_{f,c}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ze wzoru (6.4) wynika zatem, że

$$M_F^{b,c} = P_{f,c}^{-1} \cdot A \cdot P_{e,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 16 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aby znaleźć macierze odwracalne P i Q takie, że

$$M_F^{b,c} = PAQ^{-1},$$

wystarczy, korzystając ze wzoru (6.4), wziąć

$$P = P_{f,c}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

oraz

$$Q = P_{e,b}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Metoda II – definicja

Macierz $M_F^{b,c}$ można też znaleźć bezpośrednio z definicji. W tym celu liczymy

$$F(1, -1, 2) = [-1, 14], \quad F(1, 1, 0) = [3, 6]$$

i

$$F(0, 1, 1) = [2, 4]$$

(patrz Zadanie 3). Następnie znajdujemy współrzędne powyższych wektorów w bazie c (patrz Zadanie 3 z Zestawu 8) i otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} [-1, 14] &= (-1) \cdot [1, 2] + 16 \cdot [0, 1], \\ [3, 6] &= 3 \cdot [1, 2] + 0 \cdot [0, 1] \end{aligned}$$

i

$$[2, 4] = 2 \cdot [1, 2] + 0 \cdot [0, 1].$$

Z powyższych równości i definicji macierzy $M_F^{b,c}$ wynika, że

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 16 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Znajdowanie macierzy P i Q z równości $M = PAQ^{-1}$ jest również możliwe, ale bardziej kłopotliwe. Należy zamienić równość $M = PAQ^{-1}$ na równość $MQ = PA$ i rozwiązać powyższe równanie macierzowe z niewiadomymi P i Q (patrz Zestaw 5). To prowadzi do jednorodnego układu 6 równań z 13 niewiadomymi. Wybierając jedno z jego rozwiązań, należy zwrócić uwagę na to, aby otrzymane macierze P i Q były odwracalne.

Odpowiedzi do Zadania 6

Ponieważ we wszystkich przykładach mamy tę samą bazę b , więc warto od razu zauważyć, że we wszystkich przykładach

$$P_{e,b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ponadto $c = b$ i $f = e$, więc

$$P_{f,c}^{-1} = P_{e,b}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (b) W treści zadania jest błąd, gdyż aby zadanie było właściwie postawione, w zadaniu 5(b) przeciwdziedziną powinno być $\mathbb{R}^3$. Przy zmianie przekształcenia w zadaniu 5(b) na $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dane wzorem

$$F(x, y, z) := [2x + y, -x + 2y, 0],$$

otrzymujemy odpowiedź

$$M_F^{b,b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \quad M_F^{b,b} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$(d) \quad M_F^{b,b} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

7 Jądro i obraz przekształcenia liniowego. I

Teoria

Jeśli $F: V \rightarrow W$ jest przekształceniem liniowym, to definiujemy

$$\text{Ker } F := \{v \in V : F(v) = 0\} \quad \text{oraz} \quad \text{Im } F := \{F(v) : v \in V\}.$$

Zbiór $\text{Ker } F$ nazywamy jądrem przekształcenia F , natomiast $\text{Im } F$ obrazem przekształcenia F . Jądro jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V , natomiast obraz jest podprzestrzenią liniową przestrzeni W .

Jeśli $F = F_A$ dla macierzy A , to podprzestrzeń $\text{Ker } F$ jest zbiorem rozwiązań jednorodnego układu równań, którego macierzą główną jest macierz A . Zatem, aby znaleźć bazę podprzestrzeni $\text{Ker } F$ należy posłużyć się metodą opisaną w Zadaniu 9 z Zestawu 8. Podobnie, podprzestrzeń $\text{Im } F$ jest rozpięta przez wektory $w_1, \dots, w_n$, które są kolumnami macierzy A . Zatem, aby znaleźć bazę podprzestrzeni $\text{Im } F$ należy wykorzystać metodę z Zadania 6 w Zestawie 8.

Przykład: Zadanie 7(1.c)

Jeśli $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dane jest wzorem

$$F(x, y) = [3x + 2y, x + y, -5y],$$

to

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix},$$

zatem aby znaleźć bazę podprzestrzeni $\text{Ker } F$ musimy rozwiązać układ równań o postaci macierzowej

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{array} \right],$$

a więc układ równań

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0, \\ x + y = 0, \\ -5y = 0 \end{cases}$$

(zauważmy, że jest to po prostu układ równań, który uzyskujemy, przyrównując współrzędne przekształcenia F do zera). Rozwiązaniem tego układu równań jest para $(0, 0)$, czyli jest ono postaci

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

a więc bazą podprzestrzeni $\text{Ker } F$ jest zbiór pusty (w powyższym opisie nie ma zmiennych „wolnych”).

Podprzestrzeń $\text{Im } F$ jest rozpięta przez wektory $[3, 1, 0]$ i $[2, 1, -5]$ (kolumny macierzy A). Stosując metodę opisaną w Zadaniu 6 z Zestawu 8, łatwo widać, że tworzą też one bazę podprzestrzeni $\text{Im } F$. Ostatecznie otrzymujemy zatem odpowiedź:

- Baza $\text{Ker } F$: $\emptyset$.
- Baza $\text{Im } F$: $\{[3, 1, 0], [2, 1, -5]\}$.

Uwaga

Jeśli $F: V \rightarrow W$ jest przekształceniem liniowym, to

$$\dim \text{Ker } F + \dim \text{Im } F = \dim V. \quad (7.5)$$

W powyższym przykładzie mamy

$$\dim \text{Ker } F = 0, \quad \dim \text{Im } F = 2 \quad \text{oraz} \quad \dim V = \dim \mathbb{R}^2 = 2$$

(przypomnijmy, że wymiar $\dim U$ podprzestrzeni U to liczba elementów bazy), a więc istotnie zachodzi powyższy wzór. Wzór (7.5) możemy wykorzystać do częściowej weryfikacji poprawności otrzymanych wyników, gdy zwykle wymiar dziedziny przekształcenia F jest łatwy do wyliczenia.

Odpowiedzi do Zadania 7

Przypomnijmy, że podprzestrzeń liniowa ma zwykle wiele baz, więc prezentowane odpowiedzi nie są jedynymi możliwymi poprawnymi odpowiedziami. W uzupełnieniu treści zadania proponuję, aby policzyć dodatkowo bazy jądra i obrazu dla przekształceń z Zadania 5.

- 1(d) Baza $\text{Ker } F$: $\emptyset$.
 Baza $\text{Im } F$: $\{[1, 5, 0]\}$.
- 1(f) Baza $\text{Ker } F$: $\emptyset$.
 Baza $\text{Im } F$: $\{[2, 3, 1], [1, -2, 0], [1, 0, -5]\}$.
- 3(a) Baza $\text{Ker } F$: $\{[-2, 1, 3]\}$.
 Baza $\text{Im } F$: $\{[1, 6], [2, 0]\}$.
- 3(b) Baza $\text{Ker } F$: $\{[1, 1, 0]\}$.
 Baza $\text{Im } F$: $\{[-1, 1, 0], [1, 1, 1]\}$.
- 5(a) Baza $\text{Ker } F$: $\emptyset$.
 Baza $\text{Im } F$: $\{[2, 3], [1, -5]\}$.
- 5(b) Baza $\text{Ker } F$: $[0, 0, 1]$.
 Baza $\text{Im } F$: $\{[2, -1], [1, 2]\}$.
- 5(c) Baza $\text{Ker } F$: $[-3, 1, 2]$.
 Baza $\text{Im } F$: $\{[1, 1, 2], [1, -1, 0]\}$.
- 5(d) Baza $\text{Ker } F$: $\emptyset$.
 Baza $\text{Im } F$: $\{[1, 1, 0], [-1, 1, 1], [-1, 1, -1]\}$.

8 Jądro i obraz przekształcenia liniowego. II

Teoria

Niech $v_1, \dots, v_k$ oraz $w_1, \dots, w_l$ będą wektorami z przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$, odpowiednio. Aby znaleźć przekształcenie liniowe $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ takie, że

$$\text{Ker } F = V \quad \text{i} \quad \text{Im } F = W, \quad (8.6)$$

gdzie

$$V := \langle v_1, \dots, v_k \rangle \quad \text{i} \quad W := \langle w_1, \dots, w_l \rangle,$$

można posłużyć się następującą metodą.

- (1) Stosując metodę z Zadania 6 w Zestawie 8, znajdujemy wektory $v_{i_1}, \dots, v_{i_p}$ tworzące bazę podprzestrzeni V oraz wektory $w_{j_1}, \dots, w_{j_q}$ tworzące bazę podprzestrzeni W .

- (2) Jeśli $p + q \neq n$, to nie istnieje poszukiwane przekształcenie F , gdyż nie jest spełniony wzór (7.5). Dalsze kroki wykonujemy tylko, gdy $p + q = n$.
- (3) Korzystając z metody z Zadania 8 w Zestawie 8, znajdujemy wektory $b_1, \dots, b_q$ oraz $c_1, \dots, c_{m-q}$ takie, że

$$b := (v_{i_1}, \dots, v_{i_p}, b_1, \dots, b_q)$$

jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (zauważmy, że w tym miejscu korzystamy z równości $p + q = n$) oraz

$$c := (w_{j_1}, \dots, w_{j_q}, c_1, \dots, c_{m-q})$$

jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^m$.

- (4) Warunki (8.6) spełniać będzie przekształcenie F , dla którego macierz w bazach b i c jest postaci

$$M := \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right],$$

gdzie nad poziomą kreską jest q wierszy (a więc poniżej $m - q$ wierszy), natomiast na lewo od pionowej kreski jest p kolumn (a więc na prawo q kolumn). Należy dodać, że kreski w powyższej macierzy mają jedynie charakter pomocniczy i nie należy ich rysować pisząc macierz M w konkretnym zadaniu.

W bardziej zwarty sposób możemy macierz M przedstawić w postaci

$$M = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{q \times p} & \mathbf{1}_q \\ \mathbf{0}_{(m-q) \times p} & \mathbf{0}_{(m-q) \times q} \end{bmatrix},$$

gdzie $\mathbf{1}_q$ oznacza macierz jednostkową (tj. macierz kwadratową z jedynkami na głównej przekątnej i zerami poza główną przekątną) rozmiaru q , natomiast $\mathbf{0}_{s \times t}$ jest macierzą zerową (tj. złożoną z samych zer) o s wierszach i t kolumnach.

Powyższa postać macierzy $M_F^{b,c}$ oznacza, że przekształcenie F jest wyznaczone przez warunki

$$F(v_{i_1}) = 0, \dots, F(v_{i_p}) = 0,$$

oraz

$$F(b_1) = w_{j_1}, \dots, F(b_q) = w_{j_q}.$$

- (5) Aby znaleźć wzór przekształcenia F wystarczy znaleźć macierz przekształcenia F w bazach standardowych, a więc macierz A taką, że $F = F_A$. Z Zadania 6 (a dokładniej ze wzoru (6.4)) wiemy jednak, że

$$A = P_{f,c} \cdot M \cdot P_{e,b}^{-1},$$

gdzie e i f są bazami standardowymi w $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$, odpowiednio.

Przypomnijmy, że wtedy

$$F(x_1, \dots, x_n) = [x_1, \dots, x_n] \cdot A^T.$$

Dokładniej, jeśli

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

to

$$F(x_1, \dots, x_n) = [a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n, \dots, a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n].$$

Aby upewnić się co do poprawności wykonanych obliczeń można sprawdzić, czy

$$F(v_1) = 0, \dots, F(v_k) = 0,$$

oraz że wektory $w_{j_1}, \dots, w_{j_q}$ pojawiają się wśród kolumn macierzy A .

Warto dodać, że w zadaniach zwykle okazuje się, że $p = k$ i $q = l$, a co za tym idzie $v_{i_1} = v_1, \dots, v_{i_p} = v_k$ oraz $w_{j_1} = w_1, \dots, w_{j_q} = w_l$. Dodatkowo, jeśli $k \leq 2$, to aby się przekonać o tym, że $p = k$, wystarczy skorzystać z poniższych kryteriów na liniową niezależność:

- gdy $k = 2$, to wektory v_1 i v_2 są liniowo niezależne (a więc $p = k = 2$), gdy $v_1 \neq 0 \neq v_2$ i wektor v_2 nie jest wielokrotnością wektora v_1 ;
- gdy $k = 1$, to wektor v_1 jest liniowo niezależny (a więc $p = k = 1$), gdy $v_1 \neq 0$;
- gdy $k = 0$, to oczywiście nie ma czego wybierać i rzecz jasna $p = k = 0$.

Analogiczne reguły dotyczą sytuacji, gdy $l \leq 2$.

Przykład

Znajdziemy przekształcenie $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ takie, że

$$\text{Ker } F = V := \langle [-3, 1, 2] \rangle \quad \text{i} \quad \text{Im } F = W := \langle [1, 1, 2], [1, -1, 0] \rangle.$$

- (1) Łatwo widać (z uwag po opisie algorytmu lub z metody z Zadania 6 w Zestawie 8), że wektor $[-3, 1, 2]$ tworzy bazę podprzestrzeni U , a wektory $[1, 1, 2]$ i $[1, -1, 0]$ tworzą bazę podprzestrzeni V .
- (2) Ponieważ $1 + 2 = 3$, więc istnieje poszukiwane przekształcenie.
- (3) Korzystając z metody z Zadania 8 w Zestawie 8, znajdujemy bazy

$$b = ([-3, 1, 2], [0, 1, 0], [0, 0, 1]) \quad \text{i} \quad c = ([1, 1, 2], [1, -1, 0], [0, 0, 1])$$

dziedziny i przeciwdziedziny.

- (4) Definiujemy macierz M wzorem

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (5) Z kroku (3) wiemy, że

$$P_{e,b} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad P_{f,c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $e = f$ jest bazą standardową w $\mathbb{R}^3$. Wyliczamy, że

$$P_{e,b}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a następnie obliczamy

$$A = P_{f,c} \cdot M \cdot P_{e,b}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -1 \\ \frac{2}{3} & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poszukiwane przekształcenie to $F = F_A$, a więc

$$F(x_1, x_2, x_3) := \left[x_1 + x_2 + x_3, -\frac{1}{3}x_1 + x_2 - x_3, \frac{2}{3}x_1 + 2x_2 \right].$$

Możemy sprawdzić, że istotnie

$$F(-3, 1, 2) = 0.$$

Ponadto wektory $[1, 1, 2]$ i $[1, -1, 0]$ są kolumnami (odpowiednio drugą i trzecią) macierzy A .

Zauważmy na zakończenie, że Zadanie 5(c) dostarcza innego przykładu przekształcenia liniowego F takiego, że

$$\text{Ker } F = U \quad \text{i} \quad \text{Im } F = W.$$

Należy więc po raz kolejny pamiętać, że opisane metoda dostarcza jednego (z zazwyczaj wielu) przykładów przekształcenia liniowego o żądanych własnościach.

Odpowiedzi do Zadania 8

(a) $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = [-2x_1 + x_2 - x_3 + x_4, -x_1 + x_2, -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4, -x_1 + x_2].$

(b) $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = [-x_1 + x_3, -x_1 + x_3 + x_4, -x_1 + x_3, 0].$