

Zestaw 8

1 Podprzestrzenie liniowe

W poniższych rozważaniach będziemy mówić o podprzestrzeniach liniowych nad ciałem liczb rzeczywistych, gdyż takie zadania dominują w zestawie. Nie mniej prawie wszystko co będzie powiedziane, można powtórzyć dla dowolnego ciała.

Niepusty podzbiór $V \subseteq \mathbb{R}^n$ nazywamy podprzestrzenią liniową, jeśli jest zamknięty ze względu na dodawanie wektorów oraz ich mnożenie przez skalary, tzn.

- jeśli $v, w \in V$, to $v + w \in V$;
- jeśli $\lambda \in \mathbb{R}$ i $v \in V$, to $\lambda \cdot v \in V$.

Powyższe dwa warunki można zbiorczo zapisać w postaci warunku:

- jeśli $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i $v, w \in V$, to $\lambda \cdot v + \mu \cdot w \in V$.

Ponadto, warunek $V \neq \emptyset$ można zastąpić warunkiem $0 \in V$, gdzie $0 := [0, \dots, 0]$ oznacza wektor zerowy.

Przykładami podprzestrzeni liniowych są $\{0\}$ (podprzestrzeń złożona z wektora zerowego) oraz $\mathbb{R}^n$. Z wyjątkiem podprzestrzeni $\{0\}$, wszystkie podprzestrzenie liniowe przestrzeni $\mathbb{R}^n$ są nieskończone. W związku z tym zwykle nie opisujemy podprzestrzeni liniowej poprzez podanie jej elementów. Istnieją dwa podstawowe sposoby opisu podprzestrzeni liniowych w $\mathbb{R}^n$: poprzez układy równań oraz zbiory generatorów. Szczególną wersją opisu za pomocą zbioru generatorów jest opis za pomocą bazy.

Pierwszy sposób opisu związany jest z następującymi obserwacjami:

- zbiór rozwiązań każdego jednorodnego układu równań o współczynnikach w ciele liczb rzeczywistych i n niewiadomych jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{R}^n$;
- każda podprzestrzeń liniowa w $\mathbb{R}^n$ jest zbiorem rozwiązań jednorodnego układu równań o współczynnikach w ciele liczb rzeczywistych i n niewiadomych.

Należy wyraźnie podkreślić, że układy równań, o których mowa powyżej, są jednorodne. Powyższe obserwacje mogą stanowić wskazówkę, które ze zbiorów z Zadania 1 są podprzestrzeniami liniowymi. Oczywiście zwykle ta sama podprzestrzeń może być opisana przez wiele układów równań.

Aby przedstawić drugi sposób opisu konieczne jest wprowadzenie pojęcia zbioru generatorów. Jeśli $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$, to przez $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ oznaczamy zbiór złożony z wszystkich kombinacji liniowych wektorów $v_1, \dots, v_m$ (notacja używana na wykładzie to $\text{Lin}(v_1, \dots, v_m)$). Podobnie jak wcześniej mamy obserwacje:

- zbiór $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ jest podprzestrzenią liniową, dla wszystkich wektorów $v_1, \dots, v_m$;
- każda podprzestrzeń liniowa w $\mathbb{R}^n$ jest postaci $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$, dla pewnych wektorów $v_1, \dots, v_m$.

Jeśli $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, to mówimy, że zbiór $\{v_1, \dots, v_m\}$ jest zbiorem generatorów podprzestrzeni V oraz że podprzestrzeń V jest rozpięta (generowana) przez zbiór $\{v_1, \dots, v_m\}$. Jeśli dodatkowo zbiór $\{v_1, \dots, v_m\}$ jest liniowo niezależny, to nazywamy go bazą podprzestrzeni V . Z wyjątkiem sytuacji, gdy $V = \{0\}$, podprzestrzeń V może mieć wiele baz, a więc także wiele zbiorów generatorów. Jedyną bazą podprzestrzeni $\{0\}$ jest zbiór pusty. Mimo iż podprzestrzeń może mieć wiele baz, to każde dwie bazy są równoliczne – liczbę elementów dowolnej bazy podprzestrzeni V nazywamy jej wymiarem i oznaczamy $\dim V$.

Podsumowując: podprzestrzeń liniowa może być opisana (zadana) na jeden z następujących sposobów:

- (1) jako zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań;
- (2) poprzez podanie zbioru generatorów;
- (2') poprzez podanie bazy.

Jednym z celów w tym zestawie jest poznanie metod przechodzenia pomiędzy powyższymi opisami. Zauważmy, że ponieważ każda baza jest zbiorem generatorów, więc przejście od opisu za pomocą bazy do opisu za pomocą zbioru generatorów jest trywialne (nic nie trzeba robić). W konsekwencji, jeśli będziemy potrafili znaleźć bazę zbioru rozwiązań jednorodnego układu równań, to będzie też umieli znaleźć zbiór generatorów tego zbioru rozwiązań. Podobnie, jeśli dla zbioru generatorów będziemy potrafili znaleźć jednorodny układ równań liniowych, którego zbiorem rozwiązań jest podprzestrzeń liniowa rozpięta przez wyjściowy zbiór generatorów, to będziemy umieli zrobić to samo, jeśli na starcie otrzymamy bazę docelowej podprzestrzeni.

Zostaje nam zatem opisać następujące przejścia:

- dla danego jednorodnego układu równań liniowych znaleźć bazę przestrzeni rozwiązań tego układu;

- dla zbioru $\{v_1, \dots, v_m\}$ wektorów znaleźć jednorodny układ równań liniowych, którego zbiorem rozwiązań jest podprzestrzeń $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$;
- dla zbioru $\{v_1, \dots, v_m\}$ znaleźć podzbiór $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_r}\}$, które jest liniowo niezależny i taki, że

$$\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \langle v_{j_1}, \dots, v_{j_r} \rangle.$$

Odpowiednie metody zostaną przedstawione przy okazji omawiania kolejnych zadań.

Przykład: Zadanie 1(a)

Niech

$$U := \{[u, v, 2u, 4v] : u, v \in \mathbb{R}\}.$$

Łatwo widzieć, że $[0, 0, 0, 0] \in U$ (bierzemy $u = 0 = v$).

Chcemy sprawdzić, czy jeśli $x, y \in U$ oraz $\lambda, \mu \in U$, to

$$\lambda x + \mu y \in U.$$

Ponieważ $x, y \in U$, więc

$$x = [u', v', 2u', 4v'] \quad \text{i} \quad y = [u'', v'', 2u'', 4v'']$$

dla pewnych $u', v', u'', v'' \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\lambda x + \mu y = [\lambda u' + \mu u'', \lambda v' + \mu v'', 2\lambda u' + 2\mu u'', 4\lambda v' + 4\mu v''].$$

Przyjmując $u := \lambda u' + \mu u''$ i $v := \lambda v' + \mu v''$, otrzymujemy, że

$$\lambda x + \mu y = [u, v, 2u, 4v],$$

a więc $\lambda x + \mu y \in U$. Zatem U jest podprzestrzenią liniową.

Przykład: Zadanie 1(b)

Niech

$$U := \{[u, v, uv] : u, v \in \mathbb{R}\}.$$

Łatwo widzieć, że $[0, 0, 0] \in U$ (bierzemy $u = 0 = v$).

Chcemy sprawdzić, czy jeśli $x, y \in U$ oraz $\lambda, \mu \in U$, to

$$\lambda x + \mu y \in U.$$

Ponieważ $x, y \in U$, więc

$$x = [u', v', u'v'] \quad \text{i} \quad y = [u'', v'', u''v'']$$

dla pewnych $u', v', u'', v'' \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\lambda x + \mu y = [\lambda u' + \mu u'', \lambda u'v' + \mu u''v''].$$

Jeśli chcemy znaleźć $u, v \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\lambda x + \mu y = [u, v, uv],$$

to musimy przyjąć $u = \lambda u' + \mu u''$ oraz $v = \lambda v' + \mu v''$. Wtedy jednak

$$uv = \lambda^2 u'v' + \lambda\mu(u'v'' + u''v') + \mu^2 u''v'' \neq \lambda u'v' + \mu u''v'',$$

co sugeruje, że U nie jest podprzestrzenią liniową.

Aby potwierdzić powyższe przypuszczenie należy znaleźć wektory $x, y \in U$ (a więc skalary u', v', u'' i v'') oraz skalary $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ takie, że $\lambda x + \mu y \notin U$. Przyjmując,

$$u' = v' = u'' = v'' = \lambda = \mu = 1,$$

mamy $x = y = [1, 1, 1] \in U$ (gdyż $1 \cdot 1 = 1$) oraz

$$\lambda x + \mu y = [2, 2, 2] \notin U,$$

gdyż $2 \cdot 2 = 4 \neq 2$. Zatem U nie jest podprzestrzenią liniową.

Odpowiedzi do Zadania 1

Należy jeszcze raz podkreślić, że w poniższych odpowiedziach znajdują się jedne z wielu możliwych baz (nie mniej, są to bazy, które otrzymuje się, stosując metody eliminacji Gaussa w „standardowy” sposób).

(c) Nie.

(d) Tak.

(e) Tak.

(f) Nie.

(g) Nie.

9 Od układu równań do bazy

Metoda

Przypomnijmy, że jeśli mamy jednorodny układ równań liniowych z niewiadomymi $x_1, \dots, x_n$, to po rozwiązaniu tego układu mamy podział zbioru indeksów $\{1, \dots, n\}$ na dwa podzbiory $\{i_1, \dots, i_r\}$ oraz $\{j_1, \dots, j_{n-r}\}$ takie, że:

- zmienne $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ mogą przybierać dowolne wartości rzeczywiste;
- na zmienne $x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-r}}$ mamy wzory uzależnione od zmiennych $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$, tzn. dla każdego $j \in \{j_1, \dots, j_{n-r}\}$ istnieją liczby rzeczywiste $a_{j,i_1}, \dots, a_{j,i_r}$ takie, że

$$x_j = a_{j,i_1}x_{i_1} + \dots + a_{j,i_r}x_{i_r}.$$

Innymi słowy, rozwiązanie wyjściowego układu równań ma postać:

$$\begin{cases} x_{j_1} = a_{j_1,i_1}x_{i_1} + \dots + a_{j_1,i_r}x_{i_r}, \\ \dots \\ x_{j_{n-r}} = a_{j_{n-r},i_1}x_{i_1} + \dots + a_{j_{n-r},i_r}x_{i_r}, \\ x_{i_1}, \dots, x_{i_r} \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aby znaleźć bazę powyższego zbioru stosujemy następującą procedurę: dla każdego $k = 1, \dots, r$ tworzymy wektor v_k , podstawiając $x_{i_k} := 1$, $x_{i_l} := 0$ dla $l \neq k$, oraz wyliczając $x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-r}}$ z powyższych wzorów. Wtedy wektory $\{v_1, \dots, v_r\}$ tworzą bazę przestrzeni rozwiązań wyjściowego układu. Zauważmy, że jeśli $r = 0$, a więc jedynym rozwiązaniem układu równań jest wektor zerowy, to otrzymujemy w ten sposób jako bazę zbiór pusty. Z wyjątkiem tej szczególnej sytuacji, otrzymana baza jest jedną z wielu możliwych baz. Na przykład, w niektórych sytuacjach (szczególnie gdy we wzorach występują ułamki) wygodniej jest podstawić za x_{i_k} inną liczbę niż 1, ważne jest jedynie, aby była to liczba różna od zera.

Przykład: Zadanie 9(a)

Rozwiązując wyjściowy układ równań, otrzymujemy

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 2x_4, \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4, \\ x_3, x_4 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Zatem baza zbioru rozwiązań składać się będzie z dwóch wektorów. Pierwszy wektor otrzymujemy, podstawiając $x_3 := 1$ i $x_4 := 0$, skąd $x_1 = 1$ i $x_2 =$

-2 , a więc wektor ma postać $[1, -2, 1, 0]$. Podobnie, aby wyliczyć drugi z wektorów bazy, podstawiamy $x_3 := 0$ i $x_4 := 1$, skąd $x_1 = 2$ i $x_2 = -3$, zatem dostajemy wektor $[2, -3, 0, 1]$. Ostatecznie otrzymujemy odpowiedź $\{[1, -2, 1, 0], [2, -3, 0, 1]\}$.

Należy podkreślić, że zgodnie z jedną z wcześniejszych uwag, każda niezerowa podprzestrzeń ma (nieskończenie) wiele baz, więc możliwe jest uzyskanie innych odpowiedzi. Na przykład, rozwiązując „niestandardowo” wyjściowy układ równań, możemy otrzymać postać rozwiązania

$$\begin{cases} x_3 = -3x_1 - 2x_2, \\ x_4 = 2x_1 + x_2, \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

co prowadzi do odpowiedzi $\{[1, 0, -3, 2], [0, 1, -2, 1]\}$. To co (nieprzypadkowo) jest wspólne dla obu odpowiedzi, to liczba wektorów bazowych.

Odpowiedzi do Zadania 9

Należy jeszcze raz podkreślić, że w poniższych odpowiedziach znajdują się jedne z wielu możliwych baz (nie mniej, są to bazy, które otrzymuje się, stosując metody eliminacji Gaussa w „standardowy” sposób).

(b) $\{[-1, 1, -1, 1]\}$.

(c) $\{[1, 0, -1, 1, 0], [0, 1, -1, 0, 1]\}$.

(d) $\{[-1, 0, 1, 0, 0], [0, -1, 0, 1, 0], [1, -2, 0, 0, 1]\}$.

10 Od zbioru generatorów do układu równań

Metoda

Niech V będzie podprzestrzenią rozpiętą przez wektory $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$, tj. $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$. Aby znaleźć układ równań opisujący podprzestrzeń V tworzymy macierz A , której wierszami są wektory $v_1, \dots, v_m$ (zatem A jest macierzą o m wierszach i n kolumnach), a następnie rozwiązujemy jednorodny układ równań liniowych, którego macierzą główną jest macierz A . Jeśli

$$a_1 = [a_{1,1}, \dots, a_{1,n}], \dots, a_k = [a_{k,1}, \dots, a_{k,n}],$$

tworzą bazę rozwiązań przestrzeni powyższego układu (patrz Zadanie 9), to przestrzeń V jest zbiorem rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{k,1}x_1 + \dots + a_{k,n}x_n = 0. \end{cases}$$

Przykład

Znajdziemy układ równań opisujący podprzestrzeń liniową rozpiętą przez wektory $[1, 2, -1, 0]$ i $[1, -1, 2, 3]$. W tym celu rozwiązujemy jednorodny układ równań liniowych, którego macierz główna jest postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

a więc układ równań

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 = 0, \\ y_1 - y_2 + 2y_3 + 3y_4 = 0. \end{cases}$$

Aby odróżnić rozwiązywany układ równań od docelowego układu równań, warto użyć innego oznaczenia zmiennych niż w przypadku „standardowego” układu równań. Rozwiązując powyższy układ równań (w ogólności warto to robić w postaci macierzowej), otrzymujemy zbiór rozwiązań w postaci

$$\begin{cases} y_1 = -y_3 - 2y_4, \\ y_2 = y_3 + y_4, \\ y_3, y_4 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Z powyższych wzorów wyliczamy, że bazę zbioru rozwiązań stanowią wektory $[-1, 1, 1, 0]$ i $[-2, 1, 0, 1]$, zatem podprzestrzeń liniowa rozpięta przez wektory (wyjściowe) $[1, 2, -1, 0]$ i $[1, -1, 2, 3]$ jest zbiorem rozwiązań układu

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Odpowiedzi do Zadania 10

Tak jak poprzednio może się zdarzyć, że otrzymane rozwiązania będą się różnić od poniższych. Częściową weryfikacją otrzymanych wyników jest sprawdzenie, czy wyjściowe wektory są rozwiązaniami otrzymanych układów równań.

(a) $4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, 4x_1 - x_2 + 2x_4 = 0.$

(b) $3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 0.$

6 Od zbioru generatorów do bazy

Metoda

Przedstawiona poniżej metoda znajduje się wśród wskazówek umieszczonych na końcu Zestawu 8. Wśród wskazówek znajduje się również metoda znajdowania bazy zbioru rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych, ale różni się ona w pewnych szczegółach od metody opisanej w omówieniu Zadania 9.

Jeśli dany jest zbiór wektorów $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ i $V := \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, to aby wybrać podzbiór $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_r}\}$ stanowiący bazę podprzestrzeni V , należy wykonać następujące kroki:

- (1) Tworzymy macierz A , której kolumnami są wektory $v_1, \dots, v_m$ (przy założeniu, że wektory pochodzą z przestrzeni $\mathbb{R}^n$ macierz A ma n wierszy i m kolumn).
- (2) Wykonując operacje elementarne na wierszach, doprowadzamy macierz A do postaci górnoschodkowej A' .
- (3) Jeśli współczynniki wiodące w macierzy A' znajdują się w kolumnach $j_1, \dots, j_r$ (innymi słowy, w kolumnach $j_1, \dots, j_r$ zaczynają się schodki), to bazą przestrzeni V jest zbiór $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_r}\}$.

Przykład: Zadanie 6(a)

Jeśli

$$X = \{[1, 1, 0], [0, 1, 1], [1, 2, 1], [2, 3, 1]\},$$

to

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wykonując operacje na wierszach, doprowadzamy macierz A do postaci

$$A' = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

która jest górnoschodkowa. Współczynniki wiodące (liczby w kółkach), znajdują się w kolumnach 1 i 2, a więc bazę naszej podprzestrzeni stanowią wektory $[1, 1, 0]$ i $[0, 1, 1]$. Innymi słowy, odpowiedź to $\{[1, 1, 0], [0, 1, 1]\}$.

Odpowiedzi do Zadania 6

- (b) $\{[1, 1, 0, 0], [0, 1, 1, 0], [0, 0, 1, 1]\}$.
- (c) $\{[1, 0, 0, -1], [2, 1, 1, 0], [1, 2, 3, 4]\}$.
- (d) $\{[1, -1, 2, 3, 1], [1, 1, 0, 0, -1]\}$.

7 Przekrój i suma algebraiczna podprzestrzeni

Teoria

Jeśli U i V są podprzestrzeniami liniowymi, to zbiory $U \cap V$ i $U + V$ są podprzestrzeniami liniowymi, gdzie

$$U + V := \{u + v : u \in U, v \in V\},$$

(tzn. aby otrzymać zbiór $U + V$ należy wyliczyć sumę każdego wektora z podprzestrzeni U z każdym wektorem z podprzestrzeni V).

W Zadaniu 7 należy wykorzystać następujące obserwacje.

- Jeśli podprzestrzeń U jest rozpięta przez wektory $u_1, \dots, u_r$ (tzn. $U = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$) oraz podprzestrzeń V jest rozpięta przez wektory $v_1, \dots, v_s$ (tzn. $V = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$), to

$$U + V = \langle u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s \rangle.$$

W szczególności, aby znaleźć bazę (a co za tym idzie wymiar) podprzestrzeni $U + V$ należy zastosować metodę opisaną w omawianiu Zadania 6 do zbioru $\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$.

- Jeśli podprzestrzeń U jest zbiorem rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{k,1}x_1 + \dots + a_{k,n}x_n = 0, \end{cases} \quad (7.1)$$

a podprzestrzeń V jest zbiorem rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} b_{1,1}x_1 + \dots + b_{1,n}x_n = 0, \\ \dots \\ b_{l,1}x_1 + \dots + b_{l,n}x_n = 0, \end{cases} \quad (7.2)$$

to podprzestrzeń $U \cap V$ jest zbiorem rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{k,1}x_1 + \dots + a_{k,n}x_n = 0, \\ b_{1,1}x_1 + \dots + b_{1,n}x_n = 0, \\ \dots \\ b_{l,1}x_1 + \dots + b_{l,n}x_n = 0, \end{cases}$$

(który można nazwać sumą układów (7.1) i (7.2)).

Z drugiej z powyższych obserwacji wynika metoda, którą będziemy posługiwać się, aby znaleźć bazę podprzestrzeni $U \cap V$, jeśli

$$U = \langle u_1, \dots, u_r \rangle \quad \text{i} \quad V = \langle v_1, \dots, v_s \rangle.$$

Wygląda ona następująco:

- (1) Znajdujemy układy równań opisujące podprzestrzenie U i V w sposób opisany w omówieniu Zadania 10.
- (2) Znajdujemy, w sposób przedstawiony w omówieniu Zadania 9, bazę zbioru rozwiązań układu równań, będącego sumą układów znalezionych w kroku pierwszym.

Przykład: Zadanie 7(a)

Aby znaleźć bazę podprzestrzeni $U + V$ stosujemy metodę opisaną w omówieniu Zadania 6 do zbioru

$$\{[1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0], [1, 1, 2, 3], [2, 2, 4, 5]\}$$

(tj. sumy zbiorów $\{[1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0]\}$ oraz $\{[1, 1, 2, 3], [2, 2, 4, 5]\}$) i otrzymujemy bazę

$$\{[1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 0], [1, 1, 2, 3]\}.$$

W celu znalezienia bazy podprzestrzeni $U \cap V$ znajdujemy najpierw (w sposób opisany w omówieniu Zadania 10) układy równań opisujące podprzestrzenie U i V . Są to odpowiednio układy

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 & = 0, \\ -x_1 & + x_3 = 0 \end{cases}$$

i

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 & = 0, \\ -2x_1 & + x_3 = 0 \end{cases}$$

(należy pamiętać, że mimo iż w powyższych równaniach nie występuje jawnie zmienna x_4 , to są to układy z czterema niewiadomymi). Sumą powyższych układów jest układ

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 & = 0, \\ -x_1 & + x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 & = 0, \\ -2x_1 & + x_3 = 0, \end{cases}$$

którego rozwiązanie jest postaci

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Zatem jedną z możliwych baz przestrzeni $U \cap V$ jest zbiór $\{[0, 0, 0, 1]\}$.

Uwaga

Z wykładu wiadomo, że

$$\dim(U + V) + \dim(U \cap V) = \dim U + \dim V. \quad (7.3)$$

W powyższym przykładzie mamy

$$\dim(U + V) = 3 \quad \text{ i } \quad \dim(U \cap V) = 1$$

(przypomnijmy, że wymiar podprzestrzeni to liczba elementów jej bazy). Ponieważ dodatkowo łatwo widać, że zbiory generatorów podprzestrzeni U i V są liniowo niezależne, więc są one bazami, skąd

$$\dim U = 2 \quad \text{ i } \quad \dim V = 2,$$

zatem istotnie wzór (7.3) zachodzi w tym przypadku.

Zwykle (jest tak we wszystkich przykładach z Zadania 7) wyjściowe zbiory generatorów podprzestrzeni U i V są bazami, można więc wykorzystać wzór (7.3) do częściowej weryfikacji poprawności otrzymanych wyników.

Odpowiedzi do Zadania 7

(b) Baza $U + V$: $\{[1, 0, 1, 0], [0, 1, 0, 1], [0, 1, 1, 1], [1, 0, 0, 1]\}$;

baza $U \cap V$: $\emptyset$.

(c) Baza $U + V$: $\{[1, 0, 1, 0, 1], [0, 1, 1, 1, 0], [1, 1, 1, 1, 1]\}$;

baza $U \cap V$: $\{[0, 1, 1, 1, 0], [1, 0, 1, 0, 1]\}$.

8 Uzupełnianie zbioru niezależnego do bazy

Teoria

Przypomnijmy, że baza to niezależny zbiór generatorów. Inaczej, można scharakteryzować bazy jako minimalne (w sensie zawierania) zbiory generatorów (tzn. zbiór generatorów B jest bazą, jeśli dla każdego zbioru generatorów X z inkluzji $X \subseteq B$ wynika, że $X = B$) lub maksymalne zbiory liniowo niezależne. Konsekwencją tej obserwacji jest fakt, że jeśli X jest zbiorem liniowo niezależnym w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, to istnieje baza B przestrzeni $\mathbb{R}^n$ taka, że $X \subseteq B$. Poniżej przedstawimy sposób konstrukcji zbioru B , który opisany jest również we wskazówkach do Zestawu 8.

Założmy, że $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ jest liniowo niezależnym zbiorem wektorów z przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Tworzymy macierz A , której wierszami są wektory $v_1, \dots, v_m$, zatem macierz A ma m wierszy i n kolumn. Przy pomocy operacji elementarnych doprowadzamy macierz A do postaci górnoschodkowej, którą oznaczamy A' .

Jeśli w macierzy A' jest mniej niż m schodków, to znaczy, że wyjściowy zbiór nie był liniowo niezależny, a więc nie można znaleźć bazy B takiej, że $X \subseteq B$. Innymi słowy w tej sytuacji problem był źle postawiony (i raczej w zadaniach takie sytuacje nie będą się zdarzały).

W przeciwnym wypadku, niech $j_1, \dots, j_m$ będą numerami kolumnami, w których znajdują się współczynniki wiodące w macierzy A' (tj. numerami kolumn, w których zaczynają się schodki), oraz niech $i_1, \dots, i_{n-m}$ będą pozostałymi numerami kolumn, co formalnie można zapisać równością

$$\{i_1, \dots, i_{n-m}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_m\}.$$

Jeśli dla $i \in \{1, \dots, n\}$ przez e_i oznaczamy i -ty standardowy wektor bazowy, tj. wektor, którego i -ta współrzędna jest równa 1, a pozostałe 0, to zbiór B możemy zdefiniować wzorem

$$B := X \cup \{e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-m}}\}.$$

Przykład: Zadanie 8(a)

Jeśli

$$X = \{[2, 1, 0], [0, 0, 1]\},$$

to

$$A = \begin{bmatrix} \textcircled{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix}.$$

Macierz A jest górnotrojkątna ze współczynnikami wiodącymi w kolumnach $j_1 = 1$ i $j_2 = 3$, a więc $i_1 = 2$. Zatem zbiór X należy uzupełnić wektorem $e_2 = [0, 1, 0]$, więc zatem szukaną bazą jest zbiór

$$\{[2, 1, 0], [0, 0, 1], [0, 1, 0]\}.$$

Odpowiedzi do Zadania 8

(b) $\{[1, 2, 3, 4], [2, 3, 4, 5], [0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1]\}.$

(c) $\{[1, 1, 0, 1], [1, 1, 1, 1], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 1]\}.$

(d) $\{[1, 2, -3, 4, 0], [3, 6, -9, 13, 1], [-1, 2, 7, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 1]\}.$

3 Współrzędne wektora w bazie uporządkowanej

Teoria

Ciąg $(v_1, \dots, v_m)$ parami różnych wektorów nazywamy bazą uporządkowaną podprzestrzeni V , jeśli zbiór $\{v_1, \dots, v_m\}$ jest bazą (zwykłą) podprzestrzeni V .

Jeśli $b = (v_1, \dots, v_n)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (zauważmy, że liczba n nieprzypadkowo powtarza się dwa razy), to dla każdego wektora w istnieją jednoznacznie wyznaczone liczby rzeczywiste $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ takie, że

$$w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Wektor $[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ nazywamy współrzędnymi (bardziej poprawnie, wektorem współrzędnych) wektora w w bazie b .

Aby znaleźć współrzędne wektora w w bazie b należy rozwiązać „odpowiedni” układ równań. Jest to ten sam układ równań, który należało rozwiązywać w Zestawie 1 w celu sprawdzenia, czy wektor w jest kombinacją liniową wektorów $v_1, \dots, v_n$. Przypomnijmy, że w postaci macierzowej kolumnami macierzy głównej tego układu były wektory $v_1, \dots, v_n$, a kolumną wyrazów wolnych wektor w . Jeśli okaże się, że otrzymany układ równań jest sprzeczny bądź nieoznaczony, to oznacza to, że wyjściowy ciąg wektorów nie był bazą uporządkowaną (lub w rachunkach zostały popełnione błędy).

Przykład

Aby znaleźć współrzędne wektora $[0, 1]$ w bazie uporządkowanej $([1, 2], [3, 5])$, musimy rozwiązać układ równań, którego postacią macierzową jest

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{array} \right],$$

a więc układ równań

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 = 1, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem są liczby $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = -1$. Zatem szukany wektorem współrzędnych jest $[3, -1]$.

Odpowiedzi do Zadania 3

(a) $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(b) $[1, -1, 0]$.