

Zestaw 7

4 Pierścienie $\mathbb{Z}_n$

Teoria

Dla $n > 0$ pierścień $\mathbb{Z}_n$ to zbiór $\{0, 1, \dots, n-1\}$ reszt z dzielenia przez n z działaniami dodawania $+=+_n$ i mnożenia $\cdot=\cdot_n$ modulo n , tj.

$$a+_nb:=(a+b)\bmod n \quad \text{ i } \quad (a\cdot_nb):=(a\cdot b)\bmod n \quad (a,b\in\mathbb{Z}_n),$$

gdzie działania dodawania i mnożenia po prawej stronie każdego wzoru są zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia liczb całkowitych oraz $k\bmod n$ oznacza resztę z dzielenia liczby całkowitej k przez n .

Przykład: Zadanie 4

Tabelki dodawania i mnożenia w pierścieniu $\mathbb{Z}_5$ mają postać:

<table><tr><td>$+_5$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>	$+_5$	0	1	2	3	4	0	0	1	2	3	4	1	1	2	3	4	0	2	2	3	4	0	1	3	3	4	0	1	2	4	4	0	1	2	3	oraz	<table><tr><td>$\cdot_5$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>0</td><td>3</td><td>1</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>0</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr></table>	$\cdot_5$	0	1	2	3	4	0	0	0	0	0	0	1	0	1	2	3	4	2	0	2	4	1	3	3	0	3	1	4	2	4	0	4	3	2	1
$+_5$	0	1	2	3	4																																																																					
0	0	1	2	3	4																																																																					
1	1	2	3	4	0																																																																					
2	2	3	4	0	1																																																																					
3	3	4	0	1	2																																																																					
4	4	0	1	2	3																																																																					
$\cdot_5$	0	1	2	3	4																																																																					
0	0	0	0	0	0																																																																					
1	0	1	2	3	4																																																																					
2	0	2	4	1	3																																																																					
3	0	3	1	4	2																																																																					
4	0	4	3	2	1																																																																					

Na przykład

$$2\cdot_5 4 = (2+4)\bmod 5 = 6\bmod 5 = 1$$

oraz

$$2\cdot_5 4 = (2\cdot 4)\bmod 5 = 8\bmod 5 = 3.$$

3 Elementy odwrotne w pierścieniach $\mathbb{Z}_n$

Teoria

Element odwrotny do $a \in \mathbb{Z}_n$ to $b \in \mathbb{Z}_n$ takie, że $a\cdot_nb=1$. Elementu odwrotnego szukamy, mnożąc a przez kolejne elementy b pierścienia $\mathbb{Z}_n$. Element b , dla którego otrzymamy 1, to element odwrotny.

Alternatywnie możemy szukać pierwszej liczby postaci $nk+1$, dla całkowitych $k \geq 0$, która jest podzielna przez a , i wtedy elementem odwrotnym jest $\frac{nk+1}{a}$.

Dla dużych n bardziej efektywną metodą poszukiwania elementu odwrotnego jest rozszerzony algorytm Euklidesa, z którego jednak nie będziemy korzystać na zajęciach.

Nie dla każdego elementu $a \in \mathbb{Z}$ (nawet różnego od zera) istnieje element odwrotny. Łatwo zauważyć, że jeśli element odwrotny istnieje, to $\text{NWD}(a, n) = 1$. Można pokazać, że jest to też warunek wystarczający.

Przykład: Zadanie 3(a)

Aby znaleźć element odwrotny do 2 w pierścieniu $\mathbb{Z}_{11}$ mnożymy 2 kolejno przez element pierścienia $\mathbb{Z}_{11}$ i otrzymujemy:

$$\begin{array}{llll} 2 \cdot_{11} 0 = 0, & 2 \cdot_{11} 1 = 1, & 2 \cdot_{11} 2 = 4, & 2 \cdot_{11} 3 = 6, \\ 2 \cdot_{11} 4 = 8, & 2 \cdot_{11} 5 = 10, & 2 \cdot_{11} 6 = 1, & \end{array}$$

a więc elementem odwrotnym do 2 w pierścieniu $\mathbb{Z}_{11}$ jest 6.

Alternatywna metoda polega na wypisaniu liczb postaci $11k + 1$, dla całkowitych $k \geq 0$, a więc liczb

$$1, 12, 23, \dots$$

Z powyższych liczb pierwszą liczbą podzielną przez 2 jest 12, a więc szukany element odwrotny to $\frac{12}{2} = 6$.

Odpowiedzi do Zadania 3

- (b) 9.
- (c) 8.
- (d) brak elementu odwrotnego.
- (e) brak elementu odwrotnego.

6 Równania liniowe w ciałach $\mathbb{Z}_p$

Metoda

Równania liniowe w ciele $\mathbb{Z}_p$ rozwiązujemy jak „zwykłe” równania w ciele liczb rzeczywistych, pamiętając, że:

- dodawanie, odejmowanie i mnożenie wykonujemy modulo p ,
- dzielenie przez niezerowy element a ciała $\mathbb{Z}_p$ to mnożenie przez jego odwrotność.

Przykład: Zadanie 6(a)

Aby rozwiązać równanie

$$4x + 2 = 1$$

w ciele $\mathbb{Z}_7$, odejmujemy najpierw stronami 2 i otrzymujemy równanie

$$4x = 6,$$

(pamiętając, że $1 - 2 = 6$ w ciele $\mathbb{Z}_7$, gdyż resztą z dzielenia $1 - 2 = -1$ przez 7 to 6).

Aby podzielić równanie stronami przez 4, znajdujemy odwrotność 4 w ciele $\mathbb{Z}_7$, która jest równa 2 ($4 \cdot 2 = 1$ w $\mathbb{Z}_7$). Zatem mnożymy równanie

$$4x = 6$$

stronami przez 2 i otrzymujemy

$$x = 5$$

(gdyż w $\mathbb{Z}_7$ mamy $4 \cdot 2 = 1$ i $6 \cdot 2 = 5$).

Odpowiedzi do Zadania 6

(b) 6.

7 Układy równań liniowych w ciałach $\mathbb{Z}_p$ **Metoda**

Układy równań liniowych w ciele $\mathbb{Z}_p$ rozwiązujemy, podobnie jak to robiliśmy w przypadku pojedynczych równań, analogicznie jak rozwiązywaliśmy układy równań liniowych w ciele liczb rzeczywistych. Ponownie musimy tylko pamiętać, że

- dodawanie, odejmowanie i mnożenie wykonujemy modulo p ,
- dzielenie przez niezerowy element a ciała $\mathbb{Z}_p$ to mnożenie przez jego odwrotność.

Przykład: Zadanie 7(d)

Aby rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 5x + 4y = 0 \end{cases}$$

w ciele $\mathbb{Z}_{13}$, stosując metodę przeciwnych współczynników, mnożymy pierwsze równanie przez 5, a drugie równanie przez 3, i otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 2x - 10y = 5 \\ 2x + 12y = 0 \end{cases}.$$

Odejmując powyższe równania stronami, otrzymujemy równanie

$$4y = 5$$

(-22 modulo 13 to 4, gdyż $-22 = (-2) \cdot 13 + 4$), z którego po przemnożeniu stronami przez 10 ($4 \cdot 10 = 1$ w ciele $\mathbb{Z}_{13}$), otrzymujemy, że

$$y = 11.$$

Podstawiając $y = 11$ do równania

$$3x - 2y = 1$$

(tj. pierwszego równania z naszego układu), otrzymujemy równanie

$$3x - 9 = 1,$$

z którego wynika, że

$$x = 12.$$

Zatem rozwiązaniem wyjściowego układu równań jest para liczb $(12, 11)$.

Odpowiedzi do Zadania 7

(a) $(3, 6)$.

(b) $(1, 1)$.

(c) Układ jest nieoznaczony, w postaci parametrycznej zbiór rozwiązań można przedstawić jako zbiór par postaci $(8y + 4, y)$ dla $y \in \mathbb{Z}_{11}$. Ponieważ ciało $\mathbb{Z}_{11}$ ma 11 elementów, więc można wypisać wszystkie rozwiązania. W efekcie otrzymujemy zbiór

$$\{(4, 0), (1, 1), (9, 2), (6, 3), (3, 4), (0, 5), \\ (8, 6), (5, 7), (2, 8), (10, 9), (7, 10)\}.$$

8 Działania w ciele liczb zespolonych

Teoria

Z praktycznego punktu widzenia liczby zespolone możemy traktować jako wyrażenia algebraiczne postaci $a + bi$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi, a i jest „zmienną”. W szczególności, liczby zespolone dodajemy i odejmujemy jak wyrażenia algebraiczne, a więc

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i$$

oraz

$$(a + bi) - (c + di) = (a - b) + (c - d)i.$$

Również mnożenie liczb zespolonych wykonujemy tak jak mnożenie wyrażeń algebraicznych, wykorzystując jednak dodatkowo, że $i^2 = -1$. Stąd

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci + bd \cdot (-1),$$

zatem

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + dc)i.$$

Nieco bardziej skomplikowane jest dzielenie liczb zespolonych. W tym celu wykorzystujemy metodą analogiczną do metody pozbywania się niewymierności z mianownika, tj. aby policzyć wartość ilorazu $\frac{a+bi}{c+di}$, rozszerzamy licznik i mianownik przez $c - di$ i otrzymujemy

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

Ostatecznie

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i,$$

choć w przypadku dzielenia zdecydowanie lepiej jest zapamiętać metodę niż powyższy wzór.

Zbiór liczb zespolonych oznaczamy symbolem $\mathbb{C}$.

Jeśli $z = a + bi$ jest liczbą zespoloną ($a, b \in \mathbb{R}$), to liczbę $\sqrt{a^2 + b^2}$ nazywamy modulem liczby z i oznaczamy $|z|$, tj.

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ponadto liczby a i b nazywamy częścią rzeczywistą i urojoną liczby z i oznaczamy $\operatorname{re}(z)$ i $\operatorname{im}(z)$, odpowiednio, tj.

$$\operatorname{re}(a + bi) = a \quad \text{ i } \quad \operatorname{im}(a + bi) = b.$$

Wreszcie, liczbę $a - bi$ nazywamy liczbą sprzężoną do liczby z i oznaczamy $\bar{z}$, tj.

$$\overline{a + bi} = a - bi.$$

Przykład: Zadanie 8(f)

Stosując opisane powyżej reguły, otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \frac{(-2 + 2i)^2}{-1 + i} + 2i - 5 &= \frac{(-2)^2 + 2 \cdot (-2) \cdot 2i + (2i)^2}{-1 + i} + 2i - 5 \\ &= \frac{4 - 8i - 4}{-1 + i} + 2i - 5 \\ &= \frac{-8i}{-1 + i} + 2i - 5 \\ &= \frac{(-8i)(-1 - i)}{(-1 + i)(-1 - i)} + 2i - 5 \\ &= \frac{8i - 8}{(-1)^2 - i^2} + 2i - 5 \\ &= \frac{8i - 8}{2} + 2i - 5 \\ &= 4i - 4 + 2i - 5 \\ &= -9 + 6i. \end{aligned}$$

Odpowiedzi do Zadania 8

- (a) $16 + 11i$.
- (b) $-46 - 9i$.
- (c) $10 + i$
- (d) 1 .
- (e) $\frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$.
- (g) $\frac{11}{26} + \frac{23}{26}i$.
- (h) $-\frac{1}{5} + \frac{8}{5}i$.

11 Rozwiązywanie równań wielomianowych w ciele liczb zespolonych

Rozwiązywanie równania $z^2 = s$

Jeśli s jest liczbą rzeczywistą, to rozwiązanie równania $z^2 = s$ można znaleźć relatywnie prosta. Dokładniej, jeśli $s = 0$, to

$$z = 0,$$

jeśli $s > 0$, to

$$z = \sqrt{s} \quad \text{lub} \quad z = -\sqrt{s},$$

natomiast, gdy $s < 0$, to

$$z = i\sqrt{-s} \quad \text{lub} \quad z = -i\sqrt{-s},$$

gdzie $\sqrt{t}$ jest „zwykłym” pierwiastkiem z nieujemnej liczby rzeczywistej t . W dalszej części można więc założyć, że $s \notin \mathbb{R}$, a więc $s = a + bi$ dla liczb rzeczywistych a i b takich, że $b \neq 0$.

Szukamy liczby zespolonej z postaci $z = x + yi$, dla $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

Ponieważ $s = a + bi$, więc równanie $z^2 = s$ jest równoważne układowi równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}.$$

Ponieważ $b \neq 0$, to z drugiego równania otrzymujemy, że

$$y = \frac{b}{2x}, \tag{11.1}$$

co po podstawieniu do pierwszego równania daje równanie

$$x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a,$$

które jest równoważne równaniu

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0.$$

Rozwiązujemy powyższe równanie dwukwadratowe w ciele liczb rzeczywistych. Można pokazać, że ma ono dokładnie dwa pierwiastki rzeczywiste x_1 i x_2 (takie, że $x_2 = -x_1$). Ze wzoru (11.1) wyliczamy odpowiednie wartości y_1 i y_2 niewiadomej y i ostatecznie otrzymujemy rozwiązania

$$z_1 = x_1 + y_1i \quad \text{i} \quad z_2 = x_2 + y_2i$$

równania $z^2 = s$.

Inne równania wielomianowe

Co do zasady równania liniowe i kwadratowe w ciele liczb zespolonych rozwiązujemy w taki sam sposób jak analogiczne równania w ciele liczb rzeczywistych. Zasadnicza różnica dotyczy jedynie znajdowania pierwiastka z wyróżnika równania kwadratowego (tj. $\sqrt{\Delta}$).

Zatem w przypadku równań liniowych przenosimy wyrażenia zawierające niewiadomą na stronę lewą, pozostałe wyrażenia na stronę prawą, i w efekcie uzyskujemy równanie postaci

$$az = b,$$

z którego wnioskujemy, że $z = \frac{b}{a}$, o ile $a \neq 0$, lub $z \in \mathbb{C}$, gdy $a = 0 = b$, lub równanie jest sprzeczne, gdy $a = 0 \neq b$.

W przypadku równania kwadratowego doprowadzamy je do postaci

$$az^2 + bz + c = 0. \quad (11.2)$$

Możemy założyć, że $a \neq 0$ (gdyż w przeciwnym wypadku mamy równanie liniowe), i liczymy

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Jeśli $\Delta = 0$, to

$$z_0 = -\frac{b}{2a}$$

jest (dwukrotnym) pierwiastkiem równania (11.2). Jeśli $\Delta \neq 0$, to w sposób opisany powyżej znajdujemy liczbę zespoloną s taką, że $s^2 = \Delta$ – istnieją zawsze dwie takie liczby różniące się znakiem, wybieramy dowolną z nich – i wtedy pierwiastkami równania (11.2) są

$$z_1 = \frac{-b - s}{2a} \quad \text{oraz} \quad z_2 = \frac{-b + s}{2a}.$$

Warto zauważyć, że podobnie jak w przypadku rozwiązywania równań kwadratowych w ciele liczb rzeczywistych, jeśli $b = 0$, to wystarczy rozwiązać równanie

$$z^2 = \frac{c}{a}.$$

Analogicznie jak w przypadku liczb rzeczywistych, powyższe metody można wykorzystać do rozwiązywania pewnych typów równań trzeciego i czwartego stopnia. Jeśli

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0 \quad (11.3)$$

jest równaniem trzeciego stopnia takim, że a, b, c i d są liczbami całkowitymi, to szukamy pierwiastków równania (11.3) wśród liczb postaci $\pm \frac{p}{q}$, gdzie p

jest dzielnikiem liczby d oraz q jest dzielnikiem liczby a . Jeśli znajdziemy w ten sposób pierwiastek z_0 , to (np. stosując schemat Hornera) zapisujemy równanie (11.3) w postaci

$$(z - z_0)(a'z^2 + b'z + c') = 0$$

i rozwiązujemy równanie

$$a'z^2 + b'z + c' = 0$$

w sposób opisany powyżej.

Innym typem równań, które możemy rozwiązać, są równania dwukwadratowe, tj. równania postaci

$$az^4 + bz^2 + c = 0.$$

W tym przypadku podstawiamy $t = z^2$ i otrzymujemy równanie kwadratowe

$$at^2 + bt + c = 0,$$

które posiada pierwiastki t_1 i t_2 (lub jeden pierwiastek dwukrotny). Rozwiązując równania

$$z^2 = t_1 \quad \text{ i } \quad z^2 = t_2,$$

rozwiązujemy wyjściowe równanie.

Należy podkreślić, że w ciele liczb zespolonych każde równanie wielomianowe stopnia n ma dokładnie n rozwiązań (o ile liczymy je z krotnościami).

Przykład: Zadanie 11(d)

Wyliczając wyróżnik równania

$$x^2 + (-4 + i)x + 5 - 5i = 0, \tag{11.4}$$

otrzymujemy

$$\Delta = (-4 + i)^2 - 4 \cdot (5 - 5i) = -5 + 12i.$$

Zatem, aby rozwiązać równanie (11.4), musimy znaleźć liczbę zespoloną z taką, że

$$z^2 = -5 - 8i. \tag{11.5}$$

Jeśli $z = a + bi$, dla $a, b \in \mathbb{R}$, to $z^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$, zatem równanie (11.5) prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= -5 \\ 2ab &= 12 \end{cases}.$$

Z drugiego równania mamy

$$b = \frac{6}{a}, \quad (11.6)$$

więc po podstawieniu do pierwszego równania, dostajemy równanie

$$a^2 - \frac{36}{a^2} = -5,$$

z którego po przekształceniach i podstawieniu $t = a^2$ otrzymujemy równanie

$$t^2 + 5t - 36 = 0.$$

Rozwiązaniami powyższego równania są

$$t_1 = -9 \quad \text{i} \quad t_2 = 4.$$

Nie istnieje liczba rzeczywista a taka, że $a^2 = -9$, podczas gdy rozwiązaniami równania $a^2 = 4$ są

$$a_1 = -2 \quad \text{i} \quad a_2 = 2.$$

Odpowiednie wartości b (wyliczone ze wzoru (11.6)) to

$$b_1 = -3 \quad \text{i} \quad b_2 = 3,$$

zatem rozwiązaniami równania $z^2 = \Delta$ są

$$z_1 = -2 - 3i \quad \text{i} \quad z_2 = 2 + 3i.$$

Ostatecznie, rozwiązaniami równania (11.4) są

$$x_1 = \frac{-(-4 + i) - z_1}{2} = 3 + i \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-(-4 + i) + z_1}{2} = 1 - 2i.$$

Zauważmy, że wybór liczby z_2 zamiast z_1 prowadziłby do tych samych rozwiązań (choć zapisanych w odwrotnym porządku).

Odpowiedzi do Zadania 11

(a) $x \in \{-i, i\}.$

(b) $x \in \{-2 - 2i, -2 + 2i\}.$

(c) $x \in \{0, \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i, \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i\}.$

(e) $x \in \{-2 + i, 2 - i\}.$

(f) $x \in \{-2 - 3i, 1 - i\}.$

(g) $x \in \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{3}-2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2\sqrt{3}+2}, \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{3}-2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2\sqrt{3}+2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{3}-2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2\sqrt{3}+2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{3}-2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2\sqrt{3}+2} \right\}.$

(h) $x \in \{3, 1 - 2i, 1 + 2i\}.$

9 Postać trygonometryczna liczba zespolonej

Teoria

Jeśli z jest liczbą zespoloną, to istnieją nieujemna liczba rzeczywista r oraz liczba rzeczywista (kąt) α takie, że

$$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Powyższe przedstawienie nazywamy postacią trygonometryczną liczby zespolonej. Liczba r jest jednoznacznie wyznaczona przez liczbę z . W szczególności, $r = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z = 0$. Jeśli dodatkowo $z \neq 0$, to kąt α jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do 2π , tzn. jeśli $r \neq 0$ i

$$r(\cos \alpha + i \sin \alpha) = r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha'),$$

to $r' = r$ oraz istnieje liczba całkowita k taka, że $\alpha' = \alpha + 2k\pi$. W szczególności, jeśli dodatkowo założymy, że $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$ to kąt α jest jednoznacznie wyznaczony przez, oznaczamy go $\text{Arg}(z)$ i nazywamy argumentem głównym liczby z .

Aby opisać metodę wyznaczania postaci trygonometrycznej liczby zespolonej, zauważmy najpierw, że jeśli $z = a + bi$, dla $a, b \in \mathbb{R}$, to

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ponadto, kąt α wyznaczony jest przez warunki

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{r} \quad \text{i} \quad \sin(\alpha) = \frac{b}{r}.$$

Przypomnienie: znajdowanie kąta na podstawie znajomości wartości funkcji trygonometrycznych

Założmy, że mamy dane liczby rzeczywiste c i s takie, że $c^2 + s^2 = 1$. Szukamy kąta $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$ takiego, że

$$\cos \alpha = c \quad \text{i} \quad \sin \alpha = s.$$

Jeśli $c = 0$ lub $s = 0$, to sytuacja jest prosta. Mianowicie, jeśli $c = 0$, to $s = 1$ i wtedy $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, lub $s = -1$ i $\alpha = \frac{3}{2}\pi$. Podobnie, gdy $s = 0$, to $c = 1$ i $\alpha = 0$, lub $c = -1$ i $\alpha = \pi$. Innymi słowy możemy skorzystać z następującej

tabelki:

c	s	α
1	0	0
0	1	$\frac{1}{2}\pi$
-1	0	π
0	-1	$\frac{3}{2}\pi$

Jeśli $c \neq 0$ i $s \neq 0$, to najpierw wyznaczamy ćwiartkę układu współrzędnych, w których znajduje się kąt α (a bardziej precyzyjnie, punkt o współrzędnych (c, s)). Ponownie możemy posłużyć się odpowiednią tabelką:

znak c	znak s	Ćwiartka
+	+	I ćwiartka
-	+	II ćwiartka
-	-	III ćwiartka
+	-	IV ćwiartka

Następnie znajdujemy kąt α_0 w pierwszej ćwiartce (tj. $\alpha_0 \in (0, \frac{1}{2}\pi)$) taki, że

$$\sin \alpha_0 = |s|.$$

Przypomnijmy, że w pierwszej ćwiartce znamy następujące wartości funkcji sinus:

x	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Znając ćwiartkę, w której znajduje się α , oraz kąt α_0 , wyliczamy α zgodnie

z następującą regułą:

Ćwiartka	α
I ćwiartka	α_0
II ćwiartka	$\pi - \alpha_0$
III ćwiartka	$\pi + \alpha_0$
IV ćwiartka	$2\pi - \alpha_0$

Przykład: Zadanie 9(d)

Jeśli $z = 1 - i$, to

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

oraz szukamy kąta α takiego, że

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{oraz} \quad \sin \alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zatem $\alpha = \frac{7}{4}\pi$. Istotnie na podstawie znaków funkcji kosinus i sinus wiemy, że kąt α znajduje się w czwartej ćwiartce. Dodatkowo, kątem α_0 w pierwszej ćwiartce taki, że

$$\sin \alpha = |\sin(\alpha)| = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

jest $\alpha_0 = \frac{1}{4}\pi$. Zatem

$$\alpha = 2\pi - \alpha_0 = 2\pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{7}{4}\pi.$$

Ostatecznie otrzymujemy następującą postać trygonometryczną:

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos(\frac{7}{4}\pi) + i(\sin \frac{7}{4}\pi)).$$

Odpowiedzi do Zadania 9

(a) $2(\cos \pi + i \sin \pi).$

$$(b) \quad 3\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + \imath \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right).$$

$$(c) \quad \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) + \imath \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right).$$

$$(e) \quad 2\left(\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + \imath \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right).$$

$$(f) \quad 2\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \imath \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right).$$

10 Mnożenie i dzielenie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej

Teoria

Jeśli

$$z_1 = r_1(\cos \alpha_1 + \imath \sin \alpha_1) \quad \text{ i } \quad z_2 = r_2(\cos \alpha_2 + \imath \sin \alpha_2),$$

to

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \imath \sin(\alpha_1 + \alpha_2))$$

oraz

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \imath \sin(\alpha_1 - \alpha_2)).$$

Mówiąc obrazowo,

- moduł iloczynu jest iloczynem modułów,
- argument iloczynu jest sumą argumentów (z dokładnością do wielokrotności 2π),
- moduł ilorazu dwóch liczb zespolonych jest ilorazem modułów,
- argument ilorazu jest różnicą argumentów (z dokładnością do wielokrotności 2π).

Jako konsekwencję pierwszego z powyższych wzór otrzymujemy wzór na potęgowanie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej, który nosi nazwę wzoru de Moivre'a:

$$(r(\cos \alpha + \imath \sin \alpha))^n = r^n (\cos(n\alpha) + \imath \sin(n\alpha)).$$

Przykład: Zadanie 10(e)

Znajdując postać trygonometryczną liczb $1 - \imath\sqrt{3}$ i $1 + \imath\sqrt{3}$, otrzymujemy

$$1 - \imath\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + \imath\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right)$$

i

$$1 + \imath\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + \imath\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right).$$

Ze wzoru de Moivre'a otrzymujemy, że

$$(1 - \imath\sqrt{3})^6 = 2^6\left(\cos\left(6 \cdot \frac{5}{3}\pi\right) + \imath\sin\left(6 \cdot \frac{5}{3}\pi\right)\right) = 2^6(\cos(10\pi) + \imath\sin(10\pi))$$

i

$$(1 + \imath\sqrt{3})^4 = 2^4\left(\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + \imath\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right),$$

zatem

$$\begin{aligned}\frac{(1 - \imath\sqrt{3})^6}{(1 + \imath\sqrt{3})^4} &= \frac{2^6}{2^4}\left(\cos\left(10\pi - \frac{4}{3}\pi\right) + \imath\sin\left(10\pi - \frac{4}{3}\pi\right)\right) \\ &= 2^2\left(\cos\left(\frac{26}{3}\pi\right) + \imath\sin\left(\frac{26}{3}\pi\right)\right) \\ &= 4\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \imath\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right),\end{aligned}$$

gdzie w ostatnim przejściu wykorzystaliśmy okresowość funkcji trygonometrycznych. Jeśli chcemy otrzymać postać algebraiczną, to dodatkowo możemy wyliczyć, że

$$4\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \imath\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + 2\imath\sqrt{3}.$$

Odpowiedzi do Zadania 10

- (a) $\cos(\pi) + \imath\sin(\pi) = -1$.
- (b) $2^9\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \imath\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2^9\imath$.
- (c) $2^{25}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \imath\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2^{25}\imath$.
- (d) $\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - 5\alpha\right) + \imath\sin\left(\frac{\pi}{3} - 5\alpha\right)\right)$ (należy pamiętać, że kąt wyznaczony jest jedynie z dokładnością do wielokrotności 2π).
- (f) $2(\cos 0 + \imath\sin 0) = 2$.
- (g) $2(\cos \pi + \imath\sin \pi) = -2$.
- (h) $\frac{2^{99}\sqrt{3}}{3^{50}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \imath\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{2^{99}\sqrt{3}}{3^{50}}\imath$.

15 Pierwiastkowanie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej

Teoria

Dla każdej liczby zespolonej $z \neq 0$ oraz dodatniej liczby całkowitej n istnieje dokładnie n (parami różnych) liczb zespolonych s takich, że $s^n = z$. Symbolem $\sqrt[n]{z}$ oznaczamy **zbiór** liczb s takich, że $s^n = z$. Oczywiście przy takim znaczeniu mamy $\sqrt[n]{0} = \{0\}$. W dalszym ciągu będziemy więc zakładać, że $z \neq 0$.

Jeśli liczba z dana jest w postaci algebraicznej (tj. $z = a + bi$), to znalezienie zbioru $\sqrt[n]{z}$ jest wymagające rachunkowo, a nawet zwykle niewykonalne. Sytuacja zmienia się, gdy liczba z jest w postaci trygonometrycznej. W takim przypadku opis zbioru $\sqrt[n]{z}$ jest konsekwencją wzoru de Moivre'a. Dokładniej, jeśli

$$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

dla dodatniej liczby rzeczywistej r i $\alpha \in \mathbb{R}$, to $\sqrt[n]{z}$ składa się z liczb postaci

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\alpha}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha}{n} \right) \right), \quad \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\alpha+2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha+2\pi}{n} \right) \right), \\ \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\alpha+4\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha+4\pi}{n} \right) \right), \quad \dots, \\ \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n} \right) \right), \end{aligned}$$

tzn.

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\alpha+2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha+2k\pi}{n} \right) \right) : k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}.$$

Innymi słowy, $\sqrt[n]{z}$ składa się z liczb, dla których

- moduł jest pierwiastkiem n -tego stopnia z modułu liczby z ,
- argument różni się o całkowitą wielokrotność kąta $\frac{2\pi}{n}$ od argumentu liczby z podzielonego przez n .

Przykład: Zadanie 15(d)

Znajdując postać trygonometryczną liczb $\sqrt{3} - i$ oraz $i - 1$, otrzymujemy, że

$$\sqrt{3} - i = 2 \left(\cos \left(\frac{11}{6} \pi \right) + i \sin \left(\frac{11}{6} \pi \right) \right),$$

i

$$i - 1 = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{3}{4} \pi \right) + i \sin \left(\frac{3}{4} \pi \right) \right).$$

Stąd

$$\frac{\sqrt{3} - \imath}{\imath - 1} = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{13}{12}\pi\right) + \imath \sin\left(\frac{13}{12}\pi\right) \right).$$

Ostatecznie otrzymujemy, że $\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}-\imath}{\imath-1}}$ składa się z następujących liczb zespolonych:

$$\begin{aligned} & \sqrt[12]{2} \left(\cos\left(\frac{13}{72}\pi\right) + \imath \sin\left(\frac{13}{72}\pi\right) \right), \quad \sqrt[12]{2} \left(\cos\left(\frac{37}{72}\pi\right) + \imath \sin\left(\frac{37}{72}\pi\right) \right), \\ & \sqrt[12]{2} \left(\cos\left(\frac{61}{72}\pi\right) + \imath \sin\left(\frac{61}{72}\pi\right) \right), \quad \sqrt[12]{2} \left(\cos\left(\frac{85}{72}\pi\right) + \imath \sin\left(\frac{85}{72}\pi\right) \right), \\ & \sqrt[12]{2} \left(\cos\left(\frac{109}{72}\pi\right) + \imath \sin\left(\frac{109}{72}\pi\right) \right), \quad \sqrt[12]{2} \left(\cos\left(\frac{133}{72}\pi\right) + \imath \sin\left(\frac{133}{72}\pi\right) \right). \end{aligned}$$

Odpowiedzi do Zadania 15

Wyznaczanie postaci algebraicznej należy traktować jako nieobowiązkowe.

$$(a) \left\{ \cos(0) + \imath \sin(0), \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + \imath \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right), \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \imath \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right), \right. \\ \left. \cos(\pi) + \imath \sin(\pi), \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + \imath \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right), \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + \imath \sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) \right\}.$$

Obliczając postać algebraiczną, otrzymujemy zbiór:

$$\left\{ 1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\imath, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\imath, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\imath, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\imath \right\}.$$

$$(b) \left\{ \cos\left(\frac{3}{8}\pi\right) + \imath \sin\left(\frac{3}{8}\pi\right), \cos\left(\frac{7}{8}\pi\right) + \imath \sin\left(\frac{7}{8}\pi\right), \cos\left(\frac{11}{8}\pi\right) + \imath \sin\left(\frac{11}{8}\pi\right), \right. \\ \left. \cos\left(\frac{15}{8}\pi\right) + \imath \sin\left(\frac{15}{8}\pi\right) \right\}.$$

Korzystając z równości

$$2 \cos^2\left(\frac{1}{8}\pi\right) - 1 = \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

otrzymujemy, że

$$\cos\left(\frac{1}{8}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

Z jedynki trygonometrycznej wyliczamy, że

$$\sin\left(\frac{1}{8}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

Korzystając z wzorów redukcyjnych, można teraz policzyć wartości funkcji trygonometrycznych kątów $\frac{3}{8}\pi$, $\frac{7}{8}\pi$, $\frac{11}{8}\pi$ i $\frac{15}{8}\pi$. W efekcie otrzymujemy, że powyższy zbiór możemy też przedstawić następująco w postaci algebraicznej:

$$\left\{ \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\iota\sqrt{2+\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\iota\sqrt{2-\sqrt{2}}, \right. \\ \left. -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\iota\sqrt{2+\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\iota\sqrt{2-\sqrt{2}} \right\}.$$

$$(c) \left\{ \sqrt[6]{2}(\cos(\frac{1}{12}\pi) + \iota \sin(\frac{1}{12}\pi)), \sqrt[6]{2}(\cos(\frac{3}{4}\pi) + \iota \sin(\frac{3}{4}\pi)), \right. \\ \left. \sqrt[6]{2}(\cos(\frac{17}{12}\pi) + \iota \sin(\frac{17}{12}\pi)) \right\}.$$

Ponieważ $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, więc korzystając ze wzór na kosinus i sinus różnicy, otrzymujemy, że

$$\cos(\frac{1}{12}\pi) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{i} \quad \sin(\frac{1}{12}\pi) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Korzystając ze wzorów redukcyjnych, wyliczamy wartości funkcji trygonometrycznych kąta $\frac{17}{12}$, zatem powyższy zbiór możemy też przedstawić następująco w postaci algebraicznej:

$$\left\{ \frac{\sqrt[6]{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} + \iota \frac{\sqrt[6]{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}, -\sqrt[6]{2} + \iota \sqrt[6]{2}, -\frac{\sqrt[6]{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} - \iota \frac{\sqrt[6]{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} \right\}.$$

$$(e) \left\{ \sqrt{3}(\cos(\frac{1}{4}\pi) + \iota \sin(\frac{1}{4}\pi)), \sqrt{3}(\cos(\frac{7}{12}\pi) + \iota \sin(\frac{7}{12}\pi)), \right. \\ \sqrt{3}(\cos(\frac{11}{12}\pi) + \iota \sin(\frac{11}{12}\pi)), \sqrt{3}(\cos(\frac{5}{4}\pi) + \iota \sin(\frac{5}{4}\pi)), \\ \left. \sqrt{3}(\cos(\frac{19}{12}\pi) + \iota \sin(\frac{19}{12}\pi)), \sqrt{3}(\cos(\frac{23}{12}\pi) + \iota \sin(\frac{23}{12}\pi)) \right\}.$$

Obliczając postać algebraiczną, otrzymujemy zbiór:

$$\left\{ \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\iota, -\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\iota, -\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\iota, \right. \\ \left. -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\iota, \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} - \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\iota, \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} - \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\iota \right\}.$$

$$(f) \left\{ \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{1}{8}\pi) + \iota \sin(\frac{1}{8}\pi)), \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{3}{8}\pi) + \iota \sin(\frac{3}{8}\pi)), \right. \\ \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{5}{8}\pi) + \iota \sin(\frac{5}{8}\pi)), \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{7}{8}\pi) + \iota \sin(\frac{7}{8}\pi)), \\ \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{9}{8}\pi) + \iota \sin(\frac{9}{8}\pi)), \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{11}{8}\pi) + \iota \sin(\frac{11}{8}\pi)), \\ \left. \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{13}{8}\pi) + \iota \sin(\frac{13}{8}\pi)), \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{15}{8}\pi) + \iota \sin(\frac{15}{8}\pi)) \right\}.$$

Obliczając postać algebraiczną, otrzymujemy zbiór:

$$\left\{ \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\iota\sqrt{2-\sqrt{2}}, \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\iota\sqrt{2+\sqrt{2}}, \right. \\ -\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\iota\sqrt{2+\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\iota\sqrt{2-\sqrt{2}}, \\ \left. -\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} - \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\iota\sqrt{2-\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\iota\sqrt{2+\sqrt{2}}, \right.$$

$$\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\iota\sqrt{2+\sqrt{2}}, \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} - \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\iota\sqrt{2-\sqrt{2}}\Big\}.$$

$$(g) \left\{ \sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) + \iota\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right), \sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\frac{13}{20}\pi\right) + \iota\sin\left(\frac{13}{20}\pi\right)\right), \right. \\ \sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\frac{21}{20}\pi\right) + \iota\sin\left(\frac{21}{20}\pi\right)\right), \sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\frac{29}{20}\pi\right) + \iota\sin\left(\frac{29}{20}\pi\right)\right), \\ \left. \sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\frac{37}{20}\pi\right) + \iota\sin\left(\frac{37}{20}\pi\right)\right) \right\}.$$

$$(h) \left\{ \sqrt[16]{2}\left(\cos\left(\frac{17}{96}\pi\right) + \iota\sin\left(\frac{17}{96}\pi\right)\right), \sqrt[16]{2}\left(\cos\left(\frac{41}{96}\pi\right) + \iota\sin\left(\frac{41}{96}\pi\right)\right), \right. \\ \sqrt[16]{2}\left(\cos\left(\frac{65}{96}\pi\right) + \iota\sin\left(\frac{65}{96}\pi\right)\right), \sqrt[16]{2}\left(\cos\left(\frac{89}{96}\pi\right) + \iota\sin\left(\frac{89}{96}\pi\right)\right), \\ \sqrt[16]{2}\left(\cos\left(\frac{113}{96}\pi\right) + \iota\sin\left(\frac{113}{96}\pi\right)\right), \sqrt[16]{2}\left(\cos\left(\frac{137}{96}\pi\right) + \iota\sin\left(\frac{137}{96}\pi\right)\right), \\ \left. \sqrt[16]{2}\left(\cos\left(\frac{161}{96}\pi\right) + \iota\sin\left(\frac{161}{96}\pi\right)\right), \sqrt[16]{2}\left(\cos\left(\frac{185}{96}\pi\right) + \iota\sin\left(\frac{185}{96}\pi\right)\right) \right\}.$$

12 Równania różne

W przypadku zadania 12 możemy stosować jedną z następujących dwóch metod:

- (1) Podstawiamy do równania liczbę zespoloną w postaci algebraicznej (tj. $z = x + y\iota$, $x, y \in \mathbb{R}$). Po uproszczeniu otrzymanych wyrażeń, dostajemy równanie postaci

$$f_1(x, y) + g_1(x, y)\iota = f_2(x, y) + g_2(x, y)\iota,$$

gdzie $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $g_1(x, y)$ i $g_2(x, y)$ są wyrażeniami zależnymi od x i y (może się zdarzyć, że niektóre z nich są równe zero). Ponieważ liczby zespolone w postaci algebraicznej są równe wtedy i tylko wtedy, gdy równe są ich części rzeczywiste i urojone, więc otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} f_1(x, y) &= f_2(x, y) \\ g_1(x, y) &= g_2(x, y) \end{cases}$$

Rozwiązując powyższy układ równań w ciele liczb rzeczywistych, rozwiązujemy wyjściowe równanie.

W przypadku zadania 12 powyższą metodę można stosować w przykładach (a)–(e). Przykład (a) można też rozwiązywać, traktując go jako równanie wielomianowe ze zmienną z (a więc w sposób opisany przy okazji omawiania zadania 11).

- (2) Podstawiamy do równania liczbę zespoloną w postaci trygonometrycznej, tzn.

$$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

dla $r \geq 0$ i $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Metodę tę należy stosować tylko w przypadku, gdy jedynymi operacjami wykonywanymi na liczbach zespolonych są mnożenie, dzielenia i potęgowanie oraz sprzężenie (a więc w przypadku zadania 12 można ją zastosować w przykładzie (f)). Jeśli powyższy warunek jest spełniony, to po zastosowaniu reguł omówionych przez okazji zadania 10 (oraz reguły dotyczącej sprzężenia przedstawionej poniżej), otrzymujemy równanie postaci

$$f_1(r)(\cos(g_1(\alpha)) + \sin(g_1(\alpha))) = f_2(r)(\cos(g_2(\alpha)) + \sin(g_2(\alpha))),$$

dla pewnych wyrażeń $f_1(r)$, $f_2(r)$, $g_1(\alpha)$ i $g_2(\alpha)$, przy czym $f_1(r)$ i $f_2(r)$ muszą być dobrane w taki sposób, aby $f_1(r) \geq 0$ i $f_2(r) \geq 0$ dla każdego $r \geq 0$. Z powyższej równości otrzymujemy, że albo $f_1(r) = 0 = f_2(r)$ albo

$$f_1(r) = f_2(r) \quad \text{i} \quad g_1(\alpha) = g_2(\alpha) + 2k\pi,$$

dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązując powyższe równania (pamiętając, że $r \geq 0$ i $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$), rozwiązujemy wyjściowe równanie.

W przypadku stosowania tej metody należy wykorzystać fakt, że jeśli

$$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

to

$$\bar{z} = r(\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)).$$

Przykład: Zadanie 12(d)

Podstawiając $z = x + yi$ do równania

$$2z + (1 - 7i) = (1 + i)\bar{z}$$

oraz przekształcając otrzymane równanie, dostajemy równanie

$$(2x + 1) + (2y - 7)i = (x + y) + (x - y)i,$$

co prowadzi układu równań

$$\begin{cases} 2x + 1 &= x + y \\ 2y - 7 &= x - y \end{cases}$$

Rozwiązaniem powyższego układu równań jest para $(x, y) = (2, 3)$, a więc rozwiązaniem wyjściowego równania jest $z = 2 + 3i$.

Odpowiedzi do Zadania 12

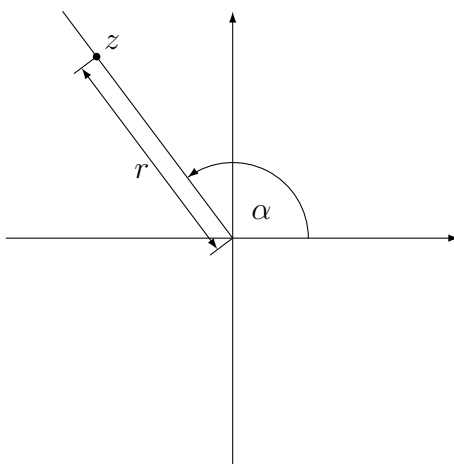
- (a) $z = \frac{11}{5} + \frac{3}{5}i$.
- (b) $z = yi$, dla $y \in \langle -1, 1 \rangle$.
- (c) $z \in \emptyset$.
- (e) Wszystkie liczby zespolone postaci yi , $y \in \mathbb{R}$, tj. wszystkie liczby zespolone z takie, że $\operatorname{re}(z) = 0$.
- (f) $z \in \left\{ 0, \cos\left(\frac{5}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{12}\pi\right), \cos\left(\frac{11}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{11}{12}\pi\right), \right.$
 $\left. \cos\left(\frac{17}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{17}{12}\pi\right), \cos\left(\frac{23}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{23}{12}\pi\right) \right\}$
 $= \left\{ 0, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \right.$
 $\left. \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \right\}$.

13 Płaszczyzna Gaussa

W zadaniu 13 korzystamy z interpretacji geometrycznej liczb zespolonych, zgodnie z którą liczbie zespolonej $z = x + yi$ odpowiada punkt, który w ustalonym na płaszczyźnie układzie współrzędnych ma współrzędne (x, y) . Analogicznie, jeśli liczba zespolona dana jest w postaci trygonometrycznej

$$z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)),$$

dla $r \geq 0$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, to odpowiada jej punkt leżący w odległości r od początku układu współrzędnych na półprostej, która z dodatnią półosią odciętych (tj. x -ów) tworzy dodatnio zorientowany (tj. mierzony przeciwnie do ruchu wskazówek zegara) kąt α . Powyższą sytuację ilustruje poniższy rysunek.



W zadaniu 13 posługujemy się analogicznymi metodami jak w zadaniu 12, tj. podstawiamy z w postaci algebraicznej lub trygonometrycznej i rozwiązujemy odpowiednie równania bądź nierówności. Z oczywistych powodów w przykładach (i) oraz (j) naturalnie jest zastosować postać trygonometryczną (choć w przykładzie (j) można też skorzystać z postaci algebraicznej), we wszystkich pozostałych można stosować postać algebraiczną, choć w niektórych równie dobrze (a czasami nawet łatwiej) jest zastosować postać trygonometryczną.

Przykład: Zadanie 13 (e)

Metoda I: Postać algebraiczna

Jeśli $z = x + yn$, dla $x, y \in \mathbb{R}$, to

$$z^2 = (x^2 - y^2) - 2xyi,$$

a więc

$$\operatorname{im}(z^2) = -2xy.$$

Zatem warunek $\operatorname{im}(z^2) = 0$ prowadzi do równania

$$2xy = 0,$$

którego zbiorem rozwiązań jest zbiór par (x, y) takich, że $x = 0$ lub $y = 0$, tj. suma dwóch prostych: pierwszej o równania $x = 0$ (oś rzędnych) i drugiej o równaniu $y = 0$ (oś odciętych).

Metoda II: Postać trygonometryczna

Jeśli $z = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$, dla $r \geq 0$ i $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$, to

$$z^2 = r^2(\cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha)),$$

a więc

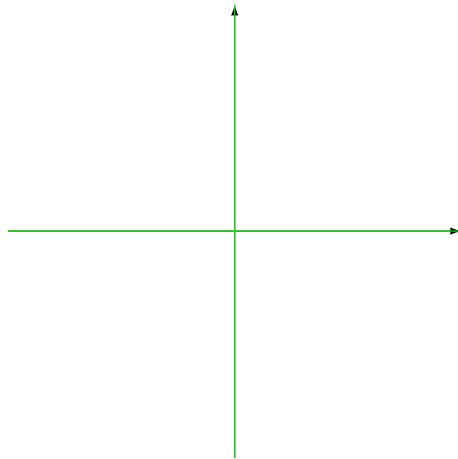
$$\operatorname{im}(z^2) = r^2 \sin(2\alpha).$$

Zatem warunek $\operatorname{im}(z^2) = 0$ prowadzi do równania

$$r^2 \sin(2\alpha) = 0,$$

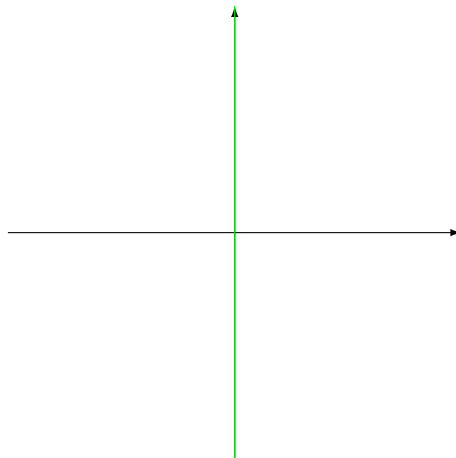
którego rozwiązaniem jest zbiór par (r, α) takich, że $r = 0$ lub $\sin(2\alpha) = 0$. W pierwszym przypadku otrzymujemy $z = 0$ (tj. początek układu współrzędnych), w drugim zaś $2\alpha = k\pi$, a więc $\alpha = k\frac{\pi}{2}$, dla $k \in \mathbb{Z}$. Pamiętając, że $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$, otrzymujemy, że $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, a więc $\alpha = 0$ (co odpowiada dodatniej półosi odciętych), lub $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (co odpowiada dodaniej półosi rzędnych), lub $\alpha = \pi$ (co odpowiada ujemnej osi odciętych), lub $\alpha = \frac{3}{2}\pi$ (co odpowiada ujemnej półosi rzędnych).

Rysunek W przypadku obu metod uzyskujemy następujący zbiór (zaznaczony kolorem zielonym):

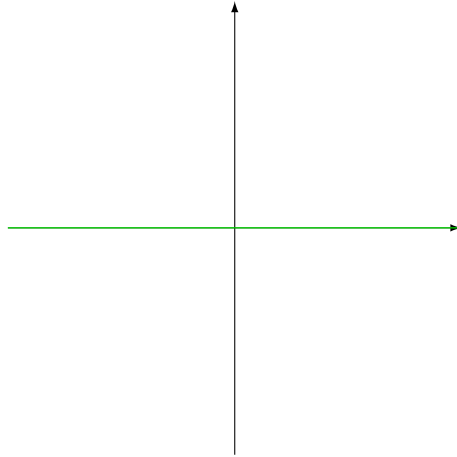


Odpowiedzi do Zadania 13

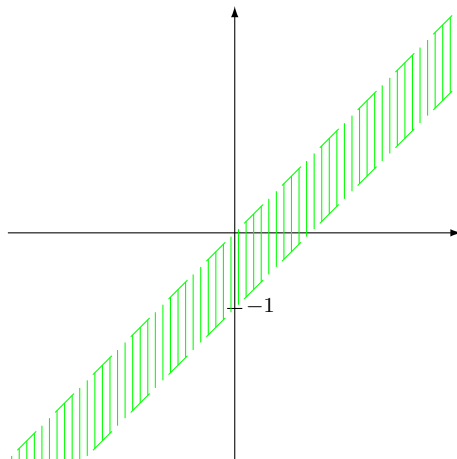
(a) $\{(x, y) : x = 0\}$, tj.



(b) $\{(x, y) : y = 0\}$, tj.

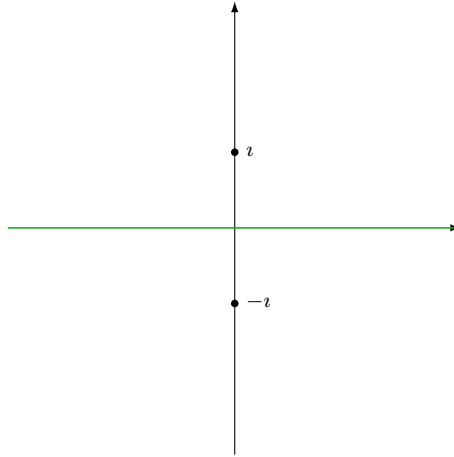


(c) $\{(x, y) : 0 < x - y < 1\}$, tj.



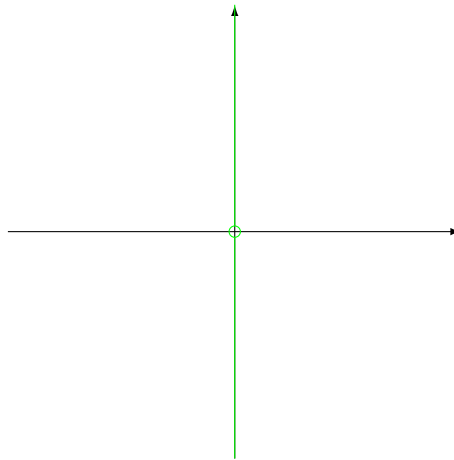
gdzie przerywana linia oznacza, że prosta nie należy do zbioru.

(d) Symetralna odcinka o końcach i i $-i$, a więc zbiór $\{(x, y) : y = 0\}$, tj.



(f) Wersja algebraiczna: $\{(x, y) : x = 0 \text{ i } y \neq 0\}$.

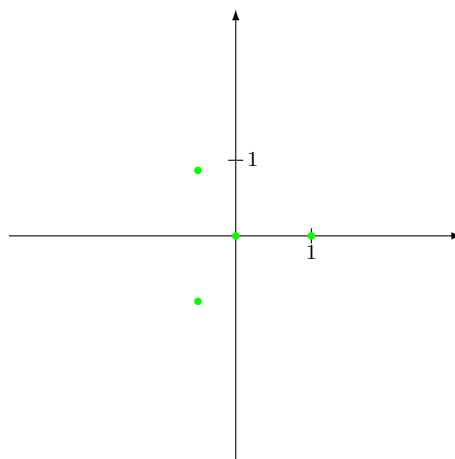
Wersja trygonometryczna: $\{(r, \alpha) : r > 0 \text{ i } \alpha \in \{\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\}\}$.



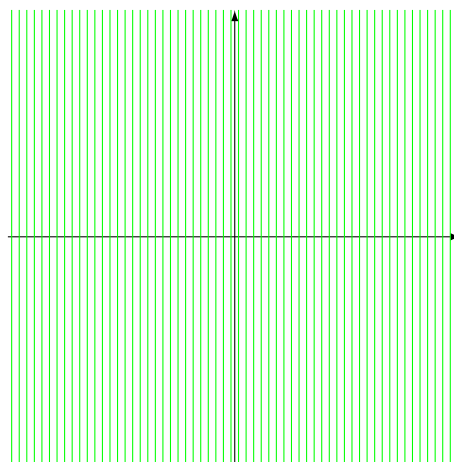
(g) Wersja algebraiczna: $z \in \{0, 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$.

Wersja trygonometryczna:

$$z \in \left\{ 0, \cos 0 + i \sin 0, \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right), \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) \right\}.$$

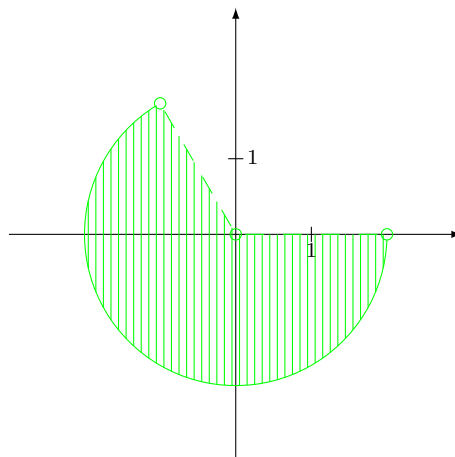


(h) $z \in \mathbb{C}$, tj.



(i) Liczby zespolone $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, dla których $0 < r < 2$ oraz

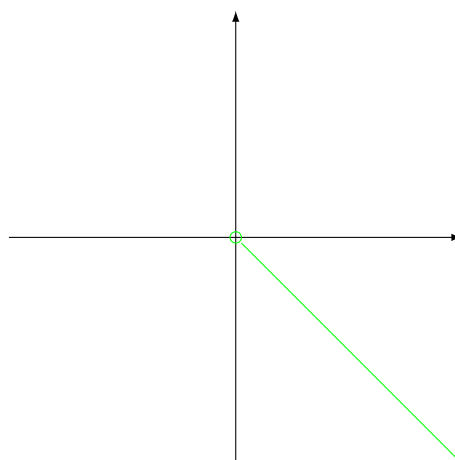
$\frac{2}{3}\pi < \alpha < 2\pi$, a więc



(w powyższych rozważaniach przyjmujemy, że $z \neq 0$, gdyż argument główny nie jest dobrze zdefiniowany dla $z = 0$).

(j) Wersja algebraiczna: $\{(x, y) : x > 0 \text{ i } y = -x\}$.

Wersja trygonometryczna: $\{(r, \alpha) : r > 0 \text{ i } \alpha = \frac{7}{4}\pi\}$.



14 Dowodzenie tożsamości

W przykładach (a), (b) i (c) wystarczy podstawić z w postaci algebraicznej (tj. $z = a + bi$) i przekształcając obie strony tożsamości, doprowadzić je do tej samej postaci. W niektórych przypadkach można też użyć postaci trygonometrycznej lub w ogóle zrezygnować z podstawiania i wykorzystać znane tożsamości.

W przykładzie (d) należy skorzystać ze związku funkcji tangens z funkcjami sinus i kosinus oraz wzoru de Moivre'a.

Przykład: Zadanie 14(b)

Metoda I: Postać algebraiczna

Podstawiamy $z = a + bi$ dla liczb rzeczywistych a i b . Założenie $|z| = 1$ oznacza, że $a^2 + b^2 = 1$. Mamy

$$\bar{z} = a - bi.$$

Z drugiej strony,

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

Ponieważ $a^2 + b^2 = 1$, więc

$$\frac{1}{z} = a - bi,$$

co kończy dowód.

Metoda II: Postać trygonometryczna

Podstawiamy $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ dla $r > 0$ i $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Wtedy

$$\bar{z} = r(\cos(2\pi - \alpha) + i \sin(2\pi - \alpha))$$

oraz

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(2\pi - \alpha) + i \sin(2\pi - \alpha)).$$

Założenie $|z| = 1$ oznacza, że $r = 1$, więc

$$\bar{z} = \cos(2\pi - \alpha) + i \sin(2\pi - \alpha) = \frac{1}{z}.$$

Metoda III

Rozszerzając ułamek $\frac{1}{z}$ przez $\bar{z}$, otrzymujemy

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}.$$

Wiadomo, że $z\bar{z} = |z|^2$. Zatem w naszym przypadku $z\bar{z} = 1$, co kończy dowód.