

Algebra Liniowa z Geometrią
Zestaw 15
Funkcjonały dwuliniowe

1. Uzasadnić, że funkcja $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcjonałem dwuliniowym i znaleźć macierz G_b^e , gdzie e jest bazą standardową.

- (1) $b(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$.
- (2) $b(x, y) = 3x_1y_1 + x_1y_2 - 2x_2y_3$.
- (3) $b(x, y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 8x_2y_2$.

2. Wyliczyć $b(x, y)$ znając macierz funkcjonału b w bazie standardowej.

- (1) $G_b^e = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $x = (1, 0, 3)$, $y = (-1, 2, -4)$.
- (2) $G_b^e = \begin{bmatrix} i & 1+i & 0 \\ -1+i & 0 & 2-i \\ 2+i & 3-i & -1 \end{bmatrix}$, $x = (1+i, 1-i, 1)$, $y = (-2+i, -i, 3+2i)$.

3. Na podstawie macierzy funkcjonału b w bazie standardowej wyznaczyć macierz $G_b^{e'}$.

- (1) $G_b^e = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $e'_1 = (1, -1, 0)$, $e'_2 = (1, 0, 1)$, $e'_3 = (1, 1, 1)$.
- (2) $G_b^e = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $e'_1 = (1, 2, -1)$, $e'_2 = (0, 1, -1)$, $e'_3 = (-1, 1, -3)$.

4. Wyznaczyć macierz w bazie standardowej funkcjonału $b' : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ danego wzorem $b'(x, y) := b(x, f(y))$ znając macierze funkcjonału b i przekształcenia liniowego f w bazie standardowej.

- (1) $G_b^e = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $M_f^e = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$.
- (2) $G_b^e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, $M_f^e = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Dla danego funkcjonału b oraz podprzestrzeni $U \subset \mathbb{R}^3$ wyznaczyć podprzestrzenie

$$U^{\perp b} := \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \forall u \in U : b(u, v) = 0\}$$

i

$${}^{\perp b}U := \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \forall u \in U : b(v, u) = 0\}.$$

- (1) $G_b^e = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$, $U = \mathbb{R}(1, -1, 0) + \mathbb{R}(-2, 3, 1)$.
- (2) $G_b^e = \begin{bmatrix} 6 & -8 & 5 \\ 5 & -5 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, $U = \mathbb{R}(2, 0, -3) + \mathbb{R}(3, 1, -5)$.