

Algebra Liniowa z Geometrią
Zestaw 12
Obraz i jądro przekształcenia liniowego, suma prosta

1. Znaleźć bazy jądra i obrazu oraz rząd przekształcenia liniowego f .

- (1) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) := (2x_1 + x_2 - x_3, -x_1 + x_2 + 3x_3, x_1 - 2x_2 + x_3)$.
- (2) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f((1, 0, 0)) := (1, -3, 2, 4)$, $f((0, 1, 0)) := (5, -3, 0, 2)$, $f((0, 0, 1)) := (-2, 0, 1, 1)$.
- (3) $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f((1, 0, 0, 0)) := (1, -1, 1, -1)$, $f((0, 1, 0, 0)) := (2, 0, -3, 0)$, $f((0, 0, 1, 0)) := (0, 3, -1, 1)$, $f((0, 0, 0, 1)) := (0, 0, 0, 0)$.
- (4) $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}[t]_3$, $f(a_1, a_2, a_3, a_4) := (a_1 - a_2)t^3 + (a_4 - a_1)t^2 + (a_3 - a_4)t + (a_2 - a_4)$.

2. Wyznaczyć rząd przekształcenia liniowego $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$g(x_1, x_2, x_3) :=$$

$$((m-2)x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 + mx_2 + 2x_3, 2mx_1 + 2(m+1)x_2 + (m+1)x_3),$$

w zależności od parametru m .

3. Niech v będzie ustalonym wektorem przestrzeni liniowej V nad ciałem $\mathbb{R}$. Wyznaczyć bazę jądra i rząd przekształcenia liniowego $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow V$, $f((1, 0)) := 2b$, $f((0, 1)) := -3b$, w zależności od wektora b .

4. Czy istnieje (jeśli tak, podać przykład, jeśli nie, uzasadnić) przekształcenie liniowe f o następujących własnościach.

- (1) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\text{Ker } f = \mathbb{R}(1, 1, 1)$, $\text{Im } f = \mathbb{R}(2, 3)$,
- (2) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\text{Ker } f = \mathbb{R}(1, 0, 0) + \mathbb{R}(1, 2, 3)$ oraz $\text{Im } f = \mathbb{R}(4, 5)$.
- (3) $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\text{Ker } f = \mathbb{R}(1, 1, -1, 0) + \mathbb{R}(1, 1, 0, 1)$, $\text{Im } f = \mathbb{R}(1, 1, 1, 1) + \mathbb{R}(1, 0, 1, 0)$.
- (4) $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\text{Ker } f = \mathbb{R}(1, 1, 1, 0) + \mathbb{R}(0, 1, 0, 0)$, $\text{Im } f = \mathbb{R}(1, 1, 1, 0) + \mathbb{R}(0, 1, 0, 0)$.
- (5) $f : \mathbb{R}[t]_3 \rightarrow \mathbb{R}[t]_3$, $\text{Ker } f = \mathbb{R}1 + \mathbb{R}t + \mathbb{R}t^2$, $\text{Im } f = \mathbb{R}t^2$.

5. Znaleźć dopełniający składnik prosty dla podprzestrzeni $V \subset \mathbb{R}^4$.

- (1) $V := \mathbb{R}(1, 1, 1, 1) + \mathbb{R}(1, -1, 1, -1) + \mathbb{R}(1, 3, 1, 3)$.
- (2) $V := \mathbb{R}(1, 2, 0, 2) + \mathbb{R}(1, 2, 1, 2) + \mathbb{R}(3, 1, 3, 1)$.
- (3) $V := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 9x_1 + 21x_2 - 15x_3 + 5x_4 = 0, 12x_1 + 28x_2 - 20x_3 + 7x_4 = 0\}$.
- (4) $V := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid -3x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, 6x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 9x_4 = 0\}$.