

Algebra Liniowa z Geometrią
Zestaw 11
Przekształcenia liniowe

1. Czy funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem liniowym?

- (1) $f(x) := 2x + 3$.
- (2) $f(x) := 2x$.
- (3) $f(x) := \frac{1}{|x|+1}$.

2. Czy funkcja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest odwzorowaniem liniowym?

- (1) $f(x_1, x_2, x_3) := (x_1^2, x_2^2, x_3^2)$.
- (2) $f(x_1, x_2, x_3) := (x_3, x_1, x_2)$.
- (3) $f(x_1, x_2, x_3) := (x_3, x_1, x_2 + 1)$.

3. Niech $\mathbb{R}[t]_n$ będzie przestrzenią wielomianów od zmiennej t o współczynnikach w ciele $\mathbb{R}$ stopnia co najwyżej n . Czy funkcja $\Phi : \mathbb{R}[t]_n \rightarrow \mathbb{R}[t]_n$ jest odwzorowaniem liniowym?

- (1) $\Phi(f) := f'$.
- (2) $\Phi(f) := tf'$.
- (3) $[\Phi(f)](t) := f(t + 2)$.

4. Dla tych odwzorowań z zadań 1, 2 i 3, które są przekształceniami liniowymi znaleźć ich macierze w dowolnie wybranych bazach.

5. Niech M będzie macierzą przekształcenia liniowego $f : V \rightarrow W$ w bazach S i S' . Znaleźć bazę przekształcenia f w bazach T i T' . Wyliczyć wartość przekształcenia f na wektorze v .

- (1) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$, $v = (1, -1, 2)$,
 $S = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$, $S' = ((1, 0), (0, 1))$,
 $T = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$, $T' = ((1, 0), (1, 1))$.
- (2) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$, $V = W = \mathbb{R}^4$, $v = (1, -1, 2, -2)$
 $S = S' = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$,
 $T = T' = ((0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$.
- (3) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$, $V = W = \mathbb{R}^4$, $v = (1, 2, 3, 4)$
 $S = S' = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$,
 $T = T' = ((1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1))$.
- (4) $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $V = W = \mathbb{R}[t]_2$, $v = 1 + t + t^2$, $S = S' = (1, t, t^2)$,
 $T = T' = (3t^2 + 2t + 1, t^2 + 3t + 2, 2t^2 + t + 3)$.
- (5) $M = \begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{bmatrix}$, $V = W = \mathbb{R}^3$, $v = (-9, -2, -6)$,
 $S = S' = ((8, -6, 7), (-16, 7, -13), (9, -3, 7))$,
 $T = T' = ((1, -2, 1), (3, -1, 2), (2, 1, 2))$.

- (6) $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$, $v = (1, -1)$,
 $S = ((1, 1), (0, 1))$, $S' = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$,
 $T = ((0, 1), (1, 0))$, $T' = ((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1))$.
- (7) $M = \begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix}$, $V = W = \mathbb{R}^3$, $v = (1, 2, 3)$,
 $S = (((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)))$,
 $T = ((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$.
- (8) $M = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$, $V = W = \mathbb{R}^2$, $v = (2, -1)$,
 $S = S' = ((1, 0), (0, 1))$, $T = T' = (1, 2), (3, 5)$.

6. Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem liniowym, którego macierzą w bazie S jest $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Wyznaczyć wszystkie bazy S , przy których obrazem wektora $(2, 0)$ jest wektor $(0, -3)$.