

Algebra Liniowa z Geometrią
Zestaw 9
Rząd macierzy, twierdzenie Kroneckera–Cappeliogo

1. Wyliczyć rzędy następujących macierzy.

$$(1) \begin{bmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}.$$

$$(2) \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 3 \\ -6 & 4 & 8 & -1 & 6 \\ -5 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & -7 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & a & 0 \\ 3 & a & 4 & -1 \\ 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Wyznaczyć w zależności od parametru a rzędy następujących macierzy.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & a & 0 \\ 3 & a & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Udowodnić, że każda macierz rzędu 1 jest postaci

$$\begin{bmatrix} b_1c_1 & b_1c_2 & \cdots & b_1c_n \\ b_2c_1 & b_2c_2 & \cdots & b_2c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_mc_1 & b_mc_2 & \cdots & b_mc_n \end{bmatrix}.$$

4. Dla jakich wartości parametru a poniższe układy równań mają dokładnie jedno rozwiązanie?

$$(1) \begin{cases} (1+a)x - ax = 1+a \\ ax + (1-a)y = a-1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

5. Dla jakich wartości parametrów a i b poniższe układu równań mają rozwiązanie różne od wektora zerowego?

$$(1) \begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + by + z = 0 \\ x + 2by + z = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x - ay - 3z = 0 \\ bx + y + 5z = 0 \\ 2x + ay + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

6. Dla jakich wartości parametrów poniższe układy równań mają co najmniej jedno (nieskończenie wiele) rozwiązań?

$$(1) \begin{cases} 2x - y + z + t = 1 \\ x + 2y - z + 4t = 2 \\ x + 7y - 4z + 11t = a \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} ax + y = 2 \\ 3x - y = 1 \\ x + 4y = a \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 2x + y - az = 2 \\ 3x - 2y + z = 1 \\ bx + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = a \\ x + y + az + t = a^2 \\ x + y + z + at = a^3 \end{cases}$$