

Algebra Liniowa z Geometrią
Zestaw 3
Macierze

1. Wyliczyć.

(1) $(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) $\begin{bmatrix} 1+i & i \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ nad ciałem $\mathbb{Z}_2$.

(4) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

2. Dla dowolnej $n \in \mathbb{N}$ obliczyć.

(1) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^n$

(2) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n$, $\lambda \in K$, K ciało.

(3) $\begin{bmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda \\ -\sin \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix}^n$, $\lambda \in K$, K ciało.

3. Znaleźć wszystkie macierze $M \in \mathbb{M}_n(K)$, które są przemienne z macierzą A .

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $n = 2$, $K = \mathbb{Z}_7$.

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $n = 3$, $K = \mathbb{R}$.

4. Znaleźć wszystkie macierze $A \in \mathbb{M}_2(K)$ takie, że dla dowolnej macierzy $B \in \mathbb{M}_2(K)$ mamy $AB = BA$.

5. Znaleźć macierz X nad ciałem K spełniającą następujące równanie macierzowe

(1) $(2 + 3i) \begin{bmatrix} 1-i & 5 & 2i \\ -2 & 1+i & 0 \end{bmatrix} + iX = (5 - i) \begin{bmatrix} -i & 1-3i & 0 \\ 4 & 2+3i & -2-4i \end{bmatrix}$, $K = \mathbb{C}$.

(2) $3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + 4X = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $K = \mathbb{Z}_5$.

6. Rozwiązać następujący układ równań macierzowych.

$$X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2X + 3Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Ile jest $m \times n$ -macierzy o współczynnikach w ciele $\mathbb{Z}_p$?