

Algebra Liniowa z Geometrią
Zestaw 2
Liczby zespolone

1. Znaleźć części rzeczywistą i urojoną następujących liczb zespolonych.

(1) $(2 + 3i)(6 - i) + i(1 - \frac{1}{2}i)$.

(2) $(1 + \sqrt{2}i)^2 - (1 - \sqrt{2}i)^2$.

(3) $\frac{1+2i}{3+4i} + \sqrt{2}i$.

2. Znaleźć liczby rzeczywiste λ i μ takie, że spełnione są następujące równości.

(1) $\lambda(2 + 3i) + \mu(4 - 5i) = 6 - 2i$.

(2) $\lambda(-\sqrt{2} + i) + \mu(3\sqrt{2} + 5i) = 8i$.

(3) $\frac{\lambda}{2-3i} + \frac{\mu}{3+2i} = 1$.

3. Znaleźć liczby zespolone x i y spełniające następujące warunki.

(1) $x + iy = 1, ix + y = 1 + i$.

(2) $(4 - 3i)x + (2 + i)y = 5 + 5i, (2 - i)x - (2 + 3i)y = -1 - i$.

(3) $(2 + i)x + 3y = 1 + 6i, ix + (1 - 2i)y = 1 + 2i$.

4. Przedstawić w postaci trygonometrycznej następujące liczby zespolone.

(1) $1, -1, i, -i$.

(2) $1 + i, 1 - i, -1 + i, -1 - i$.

(3) $1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$.

(4) $\sqrt{6} + \sqrt{2} + (\sqrt{6} - \sqrt{2})i, \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}i$,

(5) $1 + i \operatorname{tg} \alpha, \frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{1-i \operatorname{tg} \alpha}, \frac{-\cos \alpha + i \sin \alpha}{1+\sqrt{3}i}, 1 + \cos \alpha + \sin \alpha, \alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$.

5. Znaleźć części rzeczywistą i urojoną następujących liczb zespolonych.

(1) $(1 + \sqrt{3}i)^{20}$.

(2) $\frac{(1+\sqrt{3}i)^{20}}{(1-i)^{10}}$.

(3) $(\sqrt{6} + \sqrt{2} + (\sqrt{6} - \sqrt{2})i)^{20}$.

6. Wyrazić w postaci wielomianów od $\sin x$ i $\cos x$ następujące wyrażenia: $\sin 3x, \cos 3x, \sin 4x, \cos 4x$.

7. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Przedstawić w zwartej postaci następujące wyrażenia:

(1) $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha$.

(2) $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots$.

8. Wyznaczyć wartości funkcji sinus i cosinus dla $\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{8}$.

9. Rozwiązać w liczbach zespolonych następujące równania.

(1) $z^3 = i$.

(2) $z^6 = -27$.

$$(3) \ z^6 = \frac{\sqrt{3}-i}{-1+i}.$$

10. Rozwiązać w liczbach zespolonych następujące równania.

$$(1) \ z^2 - (1+i)z + 6 + 3i = 0.$$

$$(2) \ z^2 + (2i-7)z + 13 - i = 0.$$

$$(3) \ z^4 + (15+7i)z^2 + 8 - 15i = 0.$$

11. Zaznaczyć na płaszczyźnie Gaussa następujące zbiory.

$$(1) \ \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leq 2\}.$$

$$(2) \ \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = |z-i|\}.$$

$$(3) \ \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Arg}(z-i) = \frac{\pi}{4}\}.$$

$$(4) \ \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(iz) \leq 1\}.$$

12. Rozwiązać równanie $|z| + z = 8 + 4i$.

13. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią oraz niech $\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n-1}$ będą pierwiastkami n -tego stopnia z 1.

$$(1) \ \text{Obliczyć } \epsilon_0 \epsilon_1 \cdots \epsilon_{n-1}.$$

$$(2) \ \text{Obliczyć } \epsilon_0^s + \epsilon_1^s + \cdots + \epsilon_{n-1}^s, \text{ gdzie } s \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

14. Rozwiązać równanie $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$.

15. Udowodnić, że jeśli liczba zespolona z jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach rzeczywistych, to liczba $\bar{z}$ też jest pierwiastkiem tego wielomianu.