

Algebra Liniowa z Geometrią
Zestaw 1
Pierścienie i ciała

1. Niech p będzie liczbą pierwszą.

- (1) Udowodnić, że $\sqrt[n]{p}$ nie jest liczbą wymierną dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 2$.
- (2) Udowodnić, że jeśli $a + b\sqrt{p} = 0$ dla pewnych liczb wymiernych a i b , to $a = b = 0$.
- (3) Udowodnić, że jeśli $a + b\sqrt[3]{p} + c\sqrt[3]{p^2} = 0$ dla pewnych liczb wymiernych a, b i c , to $a = b = c = 0$.

2. Sprawdzić, które z poniższych podzbiorów zbioru $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych są ciałami (pierścieniami) ze względu na zwykłe działania dodawania i mnożenia:

- (1) zbiór $\mathbb{N}$ liczb całkowitych nieujemnych,
- (2) zbiór $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych,
- (3) zbiór $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych,
- (4) $\{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, p liczba pierwsza,
- (5) $\{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, p liczba pierwsza,
- (6) $\{a + b\sqrt[3]{p} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, p liczba pierwsza,
- (7) $\{a + b\sqrt[3]{p} + c\sqrt[3]{p^2} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$, p liczba pierwsza.
- (8) $\{\frac{a}{2^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+\}$.

3. Niech $n \geq 2$ będzie liczbą całkowitą oraz niech $\mathbb{Z}_n$ oznacza zbiór $\{0, 1, \dots, n-1\}$ z działaniami dodawania i mnożenia modulo n .

- (1) Udowodnić, że $\mathbb{Z}_n$ jest pierścieniem.
- (2) Udowodnić, że $\mathbb{Z}_n$ jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą.
- (3) Sporządzić tabelki mnożenia i dodawania w $\mathbb{Z}_n$ dla małych wartości n .

4. Ile elementów ma ciało o najmniejszej ilości elementów?

5. Skonstruować ciało czteroelementowe. Ile jest (z dokładnością do izomorfizmu) takich ciał?

6. Czy zbiór liczb rzeczywistych wraz z działaniami $\oplus$ i $\odot$ danymi wzorami

$$a \oplus b := a + b + 1, \quad a \odot b := a + b + ab$$

jest ciałem?

7. Udowodnić, że ciało liczb rzeczywistych oraz ciało zdefiniowane w poprzednim ćwiczeniu są izomorficzne.

8. Niech zbiór K z działaniami $+$ i $\cdot$ oraz elementami neutralnymi 0 i 1 będzie ciałem.

- (1) Udowodnić, że $a \cdot 0 = 0$ dla dowolnego $a \in K$.
- (2) Udowodnić, że jeśli $ab = 0$, to $a = 0$ lub $b = 0$.