

ALGEBRA II
ZESTAW 2
TEORIA PODZIELNOŚCI W PIERŚCIENIACH WIELOMIANÓW

1. Udowodnić, że pierścień $\mathbb{Z}[X]$ nie jest dziedziną ideałów głównych.

2. Znaleźć największy wspólny dzielnik wielomianów $F, G \in K[X]$ oraz wyrazić go jako kombinację liniową (nad pierścieniem $K[X]$) elementów F i G .

- (1) $F = X^5 + X^4 + 1, G = X^5 + X + 1, K = \mathbb{Z}_2$.
- (2) $F = X^5 + 4X, G = X^6 + X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + X + 2, K = \mathbb{Z}_5$.
- (3) $F = X^5 + 2X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 2, G = X^4 - 4, K = \mathbb{Q}$.
- (4) $F = 15X^4 + 2X^3 + 15X^2 + 4, G = 12X^3 - 11X^2 + 3X - 10, K = \mathbb{Q}$.

3. Udowodnić, że wielomian F jest nierozkładalny w dziedzinie R .

- (1) $F = X^2 + Y^2 + a, R = K[X, Y]$, gdzie K jest ciałem takim, że $2 \neq 0$ i $a \in K^\times$.
- (2) $F = XY + XZ + YZ, R = \mathbb{Z}_2[X, Y, Z]$.
- (3) $F = X^3 + Y^3 + Z^3, R = \mathbb{Q}[X, Y, Z]$.

4. Udowodnić, że wielomian F jest nierozkładalny w dziedzinie R .

- (1) $F = X^2 + X + 2, R = \mathbb{Z}_3[X]$.
- (2) $F = X^3 + 2X - 1, R = \mathbb{Z}_3[X]$.
- (3) $F = X^4 + X^3 + X^2 + 1, R = \mathbb{Z}_3[X]$.
- (4) $F = X^5 + X^2 + 1, R = \mathbb{Z}_2[X]$.

5. Wielomian F przedstawić w postaci iloczynu wielomianów nierozkładalnych w dziedzinie R .

- (1) $F = X^5 - 11X + 6, R = \mathbb{Z}_2[X], \mathbb{Z}_3[X]$.
- (2) $F = X^5 - X^4 - 6X^3 + 6X^2 - 3X + 3, R = \mathbb{Q}[X], \mathbb{Z}_5[X], \mathbb{Z}_{13}[X]$.
- (3) $F = X^5 + X^3 - 2X^2 - 2, R = \mathbb{Q}[X]$.
- (4) $F = (-1 + 3i)X^2 - (3 + i)X + (4 + 2i), R = (\mathbb{Z}[i])[X]$.

6. Udowodnić, że wielomian F jest nierozkładalny w dziedzinie R .

- (1) $F = 3X^6 + 7X^4 + 21X^3 + 14, R = \mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X]$.
- (2) $F = Y^3 + X^\alpha Y^2 + X^\beta Y + X, R = \mathbb{Z}[X, Y]$, gdzie $\alpha, \beta > 0$.

7. Jeśli element a dziedziny R jest odwracalny, $b \in R$, to wielomian $F \in R[X]$ jest nierozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $F(aX + b)$ jest nierozkładalny.

8. Udowodnić, że wielomian F jest nierozkładalny w dziedzinie R .

- (1) $F = X^{p-1} + \dots + 1, R = \mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X]$, gdzie p jest liczbą pierwszą.
(Wskazówka: Rozważyć wielomian $F(X + 1)$).
- (2) $F = X^{2^n} + 1, R = \mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X]$, gdzie $n \geq 0$.

9. Niech $\varphi : R \rightarrow S$ będzie homomorfizmem dziedzin z jednoznacznością rozkładu oraz $F \in R[X]$ wielomianem prymitywnym, którego współczynnik wiodący nie należy do ideału $\text{Ker } \varphi$. Jeśli wielomian $\varphi(F)$ jest nierozkładalny, to wielomian F jest nierozkładalny.

10. Udowodnić, że wielomian F jest nierozkładalny w dziedzinie R .

(1) $F = 3X^5 - 4X^4 + 2X^3 + X^2 + 18X + a$, $R = \mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X]$, gdzie a jest liczbą nieparzystą.

(2) $F = 7X^4 + 4X^3 + 40X^2 + 48X + 97$, $R = \mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X]$.

(3) $F = X^3 + aX + b$, $R = \mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X]$, gdzie a i b są liczbami nieparzystymi.

11. Jeśli R jest dziedziną i

$$F = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in R[X]$$

jest wielomianem takim, że $a_0, a_n \neq 0$, to wielomian F jest nierozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian

$$a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n$$

jest nierozkładalny.

12. Udowodnić, że wielomian F jest nierozkładalny w dziedzinie R .

(1) $F = 2X^4 + 4X^2 + 4X + 1$, $R = \mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X]$.

(2) $F = 5X^7 + 4$, $R = \mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X]$.

13. Znaleźć wszystkie wielomiany nierozkładalne stopnia nie większego niż 4 w dziedzinie $\mathbb{Z}_2[X]$.

14. Udowodnić, że wielomian

$$X^{n-1} + \cdots + 1$$

jest nierozkładalny w dziedzinie $\mathbb{Z}[X]$ ($\mathbb{Q}[X]$) wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą.

15. Udowodnić, że jeśli R jest dziedziną, $F \in R[X]$ i $a \in R$, to $(X - a)^2 \mid F$ wtedy i tylko wtedy, gdy $F(a) = 0 = F'(a)$.

16. Udowodnić, że wielomian

$$X^{n+1} - (n+1)X + n$$

jest podzielny przez wielomian $(X - 1)^2$ dla dowolnego $n \geq 1$.

17. Udowodnić, że jeśli $F(0)$ jest liczbą pierwszą dla wielomianu unormowanego $F \in \mathbb{Z}[X]$, to wielomian F ma co najwyżej trzy pierwiastki wymierne.

18. Udowodnić, że jeśli $F(0)$ i $F(1)$ jest są liczbami nieparzystymi dla wielomianu $F \in \mathbb{Z}[X]$, to wielomian F nie ma pierwiastków całkowitych. Jeśli dodatkowo współczynnik wiodący wielomianu F jest nieparzysty, to wielomian F nie ma pierwiastków wymiernych.