

ALGEBRA II
ZESTAW 1
TEORIA PODZIELNOŚCI W DZIEDZINACH

1. Niech n będzie liczbą całkowitą różną od 1, która nie jest podzielna przez żadnej kwadrat liczby pierwszej. Niech

$$\mathbb{Z}[\sqrt{n}] := \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Definiujemy funkcję $N : \mathbb{Z}[\sqrt{n}] \rightarrow \mathbb{Z}$ wzorem

$$N(a + b\sqrt{n}) := a^2 - nb^2.$$

- (1) Udowodnić, że zbiór $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ jest podpierścieniem ciała $\mathbb{C}$. W szczególności, pierścień $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ jest dziedziną.
- (2) Udowodnić, że funkcja N jest poprawnie określona.
- (3) Udowodnić, że $N(\alpha) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha = 0$.
- (4) Udowodnić, że $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$. W szczególności, jeśli $\alpha \mid \beta$, to $N(\alpha) \mid N(\beta)$.
- (5) Udowodnić, że element $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy $|N(\alpha)| = 1$. W szczególności, gdy $\alpha \mid \beta$ i $|N(\alpha)| = |N(\beta)|$, to $\alpha \approx \beta$. Wyznaczyć wszystkie elementy odwracalne w pierścieniu $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$, jeśli $n < 0$.
- (6) Udowodnić, że jeśli $|N(\alpha)|$ jest liczbą pierwszą, to element α jest nierozkładalny.

2. Niech n będzie liczbą całkowitą różną od 1, która nie jest podzielna przez żadnej kwadrat liczby pierwszej. Udowodnić, że pierścień $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ jest dziedziną z rozkładem.

3. Udowodnić, że 2 jest elementem nierozkładalnym w dziedzinie $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, który nie jest pierwszy. Wywnioskować stąd, że $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ nie jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu. (*Wskazówka:* Rozważyć równość $2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{5})(-1 + \sqrt{5})$).

4. Udowodnić, że $\mathbb{Z}[\iota\sqrt{3}]$ nie jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu.

5. Udowodnić, że pierścienie $\mathbb{Z}[\iota\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}[\iota]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ i $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ są dziedzinami Euklidesa.

6. Udowodnić, że pierścień $\mathbb{Z}[\iota\sqrt{n}]$ nie jest dziedziną Euklidesa, jeśli $n \geq 5$ jest liczbą całkowitą, która nie jest podzielna przez kwadrat żadnej liczby pierwszej.

7. Znaleźć wszystkie dzielniki α w pierścieniu R .

- (1) $\alpha = 6$, $R = \mathbb{Z}[\iota\sqrt{6}]$.
- (2) $\alpha = 8$, $R = \mathbb{Z}[\iota\sqrt{2}]$.
- (3) $\alpha = 9$, $R = \mathbb{Z}[\iota\sqrt{3}]$.
- (4) $\alpha = 21$, $R = \mathbb{Z}[\iota\sqrt{5}]$.

8. Elementy zbioru X przedstawić w postaci iloczynu elementów nierozkładalnych w pierścieniu R .

- (1) $X = \{2, 3, 5\}$, $R = \mathbb{Z}[i]$.
- (2) $X = \{3, 5, 7, 10\}$, $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

9. Niech n będzie liczbą całkowitą różną od 1, która nie jest podzielna przez żadnej kwadrat liczby pierwszej oraz $n \equiv 1 \pmod{4}$. Niech

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{n}}{2}\right] := \left\{a + b\frac{1+\sqrt{n}}{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Definiujemy funkcję $N : \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{n}}{2}\right] \rightarrow \mathbb{Z}$ wzorem

$$N(a + b\frac{1+\sqrt{n}}{2}) := (a + \frac{b}{2})^2 - n(\frac{b}{2})^2.$$

- (1) Udowodnić, że zbiór $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{n}}{2}\right]$ jest podpierścieniem pierścienia $\mathbb{C}$. W szczególności, pierścień $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{n}}{2}\right]$ jest dziedziną.
- (2) Udowodnić, że funkcja N jest poprawnie określona.
- (3) Udowodnić, że $N(\alpha) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha = 0$.
- (4) Udowodnić, że $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.
- (5) Udowodnić, że element $\alpha \in \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{n}}{2}\right]$ jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy $|N(\alpha)| = 1$. Wyznaczyć wszystkie elementy odwracalne w pierścieniu $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{n}}{2}\right]$, jeśli $n < 0$.
- (6) Udowodnić, że jeśli $|N(\alpha)|$ jest liczbą pierwszą, to element α jest nierozkładalny.

10. Niech n będzie liczbą całkowitą różną od 1, która nie jest podzielna przez żadnej kwadrat liczby pierwszej oraz $n \equiv 1 \pmod{4}$. Udowodnić, że pierścień $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{n}}{2}\right]$ jest dziedziną z rozkładem.

11. Udowodnić, że pierścienie $\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{11}}{2}\right]$, $\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right]$, $\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right]$, $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ i $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$ są dziedzinami Euklidesa.

12. Niech R będzie dziedziną Euklidesa. Udowodnić, że istnieje element nieodwracalny $a \in R$ taki, że dla dowolnego elementu $b \in R$ istnieje element $c \in R$ taki, że $a \mid b - c$ oraz element c jest odwracalny lub $c = 0$.

13. Udowodnić, że pierścień $\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{n}}{2}\right]$ nie jest dziedziną Euklidesa, jeśli $n \geq 15$ jest liczbą całkowitą, która nie jest podzielna przez kwadrat żadnej liczby pierwszej oraz $n \equiv 1 \pmod{4}$.

14. Udowodnić, że jeśli R jest dziedziną i istnieje funkcja $\varphi : R \rightarrow \mathbb{N}$ taka, że

- (1) $\varphi(a) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$, oraz
- (2) jeśli $a, b \in R$, $b \neq 0$ i $b \nmid a$, to istnieją elementy $c, d \in R$ takie, że $ca + db \neq 0$ oraz $\varphi(ca + db) < \varphi(b)$,

to R jest dziedziną ideałów głównych.

15. Udowodnić, że pierścień $\mathbb{Z}\left[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right]$ jest dziedziną ideałów głównych.

16. Niech

$$R := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in \mathbb{C}[[X]] \mid \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \right\}.$$

- (1) Udowodnić, że R jest podpierścieniem pierścienia $\mathbb{C}[X]$. Wywnioskować stąd, że R jest dziedziną.
- (2) Niech S będzie pierścieniem wszystkich funkcji $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Udowodnić, że funkcja $\Phi : R \rightarrow S$ dana wzorem

$$[\Phi(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n)](z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

jest poprawnie określonym monomorfizmem pierścieni. Będziemy odtąd utożsamiać szereg $f \in R$ z funkcją $\Phi(f) \in S$.

- (3) Udowodnić, że szereg $f \in R$ jest elementem odwracalnym wtedy i tylko wtedy, gdy $f(z) \neq 0$ dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$.
- (4) Udowodnić, że $f(z) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X - z \mid f$.
- (5) Udowodnić, że szereg f jest elementem nierozkładalnym wtedy i tylko wtedy, gdy $f \approx X - z$ dla pewnego $z \in \mathbb{C}$.
- (6) Udowodnić, że szereg f jest elementem nierozkładalnym wtedy i tylko wtedy, gdy jest elementem pierwszym.
- (7) Udowodnić, że pierścień R nie jest dziedziną z rozkładem.

17. Udowodnić, że jeśli a , b i c są elementami dziedziny R , to $(a, b, c) = ((a, b), c)$, gdzie $(a_1, \dots, a_n)$ oznacza największy wspólny dzielnik elementów $a_1, \dots, a_n$.

18. Zapoznać się z (rozszerzonym) algorytmem Euklidesa.

19. Znaleźć największy wspólny dzielnik liczb 78, 130 i 195 oraz wyrazić go jako kombinację $\mathbb{Z}$ -liniową tych trzech liczb.

20. Znaleźć największy wspólny dzielnik liczb $a = 1, 148, 408, 683$ $b = 326, 987$ oraz wyrazić go jako kombinację $\mathbb{Z}$ -liniową liczb a i b .

21. Znaleźć największy wspólny dzielnik elementów α i β pierścienia R oraz wyrazić go jako kombinację R -liniową elementów α i β .

- (1) $\alpha = 816$, $\beta = 294$, $R = \mathbb{Z}$.
- (2) $\alpha = 3587$, $\beta = 1819$, $R = \mathbb{Z}$.
- (3) $\alpha = 4 + 9i$, $\beta = 2 + 7i$, $R = \mathbb{Z}[i]$.
- (4) $\alpha = 3 + 4i$, $\beta = 4 - 3i$, $R = \mathbb{Z}[i]$.
- (5) $\alpha = -5 + 2i\sqrt{2}$, $\beta = 1 + 5i\sqrt{2}$, $R = \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.
- (6) $\alpha = 18 - i$, $\beta = 11 + 7i$, $R = \mathbb{Z}[i]$.

22. Znaleźć odwrotność elementu a w pierścieniu R .

- (1) $a = 20$, $R = \mathbb{Z}_{107}$.
- (2) $a = 365$, $R = \mathbb{Z}_{1876}$.

23. Rozwiązać następujący układ równań w ciele $\mathbb{Z}_{19}$.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 9x + 4 = 1 \end{cases}.$$

24. Rozwiązać następujące równania w pierścieniu $\mathbb{Z}$.

(1) $81x + 3y = 5$.

(2) $175x - 13y = 1$.

(3) $14x + 217y = 35$.

(4) $803x + 154y = 11$