1 Grupy

1.1 Grupy

1.1.1. Niech G będzie taką grupa, że $(ab)^2 = a^2b^2$ dla dowolnych $a, b \in G$. Udowodnić, że grupa G jest abelowa.

1.1.2. Niech G będzie taką grupa, że $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ dla dowolnych $a, b \in G$. Udowodnić, że grupa G jest abelowa.

1.1.3. Niech G będzie taką grupa, że istnieje liczba całkowita n taka, że $(ab)^n = a^nb^n$, $(ab)^{n+1} = a^{n+1}b^{n+1}$ i $(ab)^{n+2} = a^{n+2}b^{n+2}$ dla dowolnych $a, b \in G$. Udowodnić, że grupa G jest abelowa.

1.1.4. Niech G będzie taką grupą, że $a^2 = 1$ dla dowolnego $a \in G$. Udowodnić, że grupa G jest abelowa.

1.2 Podgrupy

1.2.1. Niech H będzie niepustym i skończonym podzbiorem grupy G takim, że jeśli $a, b \in H$, to $ab \in H$. Udowodnić, że H jest podgrupą grupy G.

1.3 Dzielniki normalne

1.3.1. Niech N będzie podgrupą grupy G taką, że $[G : N] = 2$. Udowodnić, że N jest dzielnikiem normalnym grupy G.

1.3.2. Niech M i N będą dzielnikami normalnymi grupy G. Udowodnić, że MN jest dzielnikiem normalnym grupy G.

1.4 Homomorfizmy

1.4.1. Udowodnić, że grupa G jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $G \ni a \mapsto a^{-1} \in G$ jest automorfizmem.

1.4.2. Niech $f : G \to H$ będzie homomorfizmem oraz $K < G$. Udowodnić, że $f^{-1}(f(K)) = K \operatorname{Ker} f$. Wywnioskować stąd, że $f^{-1}(f(K)) = K$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{Ker} f \subseteq K$.

1.4.3. Niech $f : G \to H$ będzie homomorfizmem grup. Jeśli K jest podgrupą grupy G taką, że $|K| < \infty$, to $|f(K)| < \infty$ oraz $|f(K)|$ dzieli $|K|$.

1.4.4. Niech N będzie dzielnikiem normalnym grupy G takim, że $[G : N] < \infty$. Jeśli H jest podgrupą grupy G taką, że $|H| < \infty$ oraz $([G : N], |H|) = 1$, to $H \subseteq N$.

1.4.5. Niech N będzie dzielnikiem normalnym grupy G taki, że $|N| < \infty$. Jeśli H jest podgrupą grupy G, to $[HN : H] < \infty$ oraz $[HN : H]$ dzieli $|N|$.

1.4.6. Niech N będzie dzielnikiem normalnym grupy G takim, że $|N| < \infty$. Jeśli H jest podgrupą grupy G taką, że $[G : H] < \infty$ oraz $(|N|, [G : H]) = 1$, to $N \subseteq H$.

1.5 Grupy cykliczne

1.5.1. Niech p będzie liczbą pierwszą. Udowodnić, że każda grupą rzędu p jest cykliczna.

1.5.2. Niech G będzie grupą. Udowodnić następujące równości.

(1) $|a^{-1}| = |a|$ dla dowolnego $a \in G$.

(2) $|ab| = |ba|$ dla dowolnych $a, b \in G$.

(3) $|bab^{-1}| = |a|$ dla dowolnych $a, b \in G$.

1.5.3. Niech G będzie grupą oraz $a \in G$. Jeśli $|a| < \infty$, to $a^k = \frac{|a|}{(|a|,k)}$ dla $k \in \mathbb{Z}$.

1.5.4. Niech G będzie grupą abelową rzędu mn taką, że $(m, n) = 1$. Udowodnić, że jeśli w grupie G istnieją elementy rzędu m i n, to grupa G jest cykliczna.

1.5.5. Udowodnić, że jeśli G jest grupą cykliczną oraz $f : G \to H$ jest epimorfizmem, to H jest grupą cykliczną.

1.5.6. Niech $f : G \to H$ będzie homomorfizmem grup oraz $a \in G$. Jeśli $|a| < \infty$, to $|f(a)| < \infty$ oraz $|a|$ dzieli $|f(a)|$.

1.5.7. Udowodnić, że jeśli H jest podgrupą grupy cyklicznej G, to H jest grupą cykliczną.

1.5.8. Udowodnić, że grupa, która ma tylko skończoną ilość podgrup, jest skończona.

1.5.9. Niech G będzie grupą abelową oraz H będzie zbiorem wszystkich element grupy G, których rząd jest skończony. Udowodnić, że H jest podgrupą grupy G.

1.5.10. Niech G będzie grupą cykliczną generowaną przez element a rzędu m. Udowodnić, że a^k jest generatorem grupy G wtedy i tylko wtedy, gdy $(k, m) = 1$. Znaleźć wszystkie generatory grup $\mathbb{Z}_m$, $m = 2, \ldots, 10$.

1.5.11. Niech G będzie grupą cykliczną generowaną przez element a. Udowodnić, że jeśli $f, g : G \to H$ są takimi homomorfizmami, że $f(a) = g(a)$, to $f = g$.

1.5.12. Niech G będzie grupą cykliczną generowaną przez element a. Udowodnić, że dla dowolnego $b \in G$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $f : G \to H$ taki, że $f(a) = b$. Pokazać, że f jest automorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy b jest generatorem grupy G. Wyliczyć $\operatorname{Aut}\mathbb{Z}$ oraz $\operatorname{Aut}\mathbb{Z}_m$, $m = 2, \ldots, 10$.

1.5.13. Niech H będzie cykliczną podgrupą grupy G, która jest dzielnikiem normalnym grupy G. Udowodnić, że każda podgrupa grupy H jest dzielnikiem normalnym grupy G.

1.6 Działania grup na zbiorze

1.6.1. Niech A będzie abelowym dzielnikiem normalnym grupy G. Udowodnić, że definicja

$$G/A \times A(aA, b) \mapsto aba^{-1} \in A,\ a \in G,\ b \in A,$$

jest poprawna oraz definiuje działanie grupy G/A na A.

1.6.2. Niech H i K będą podgrupami grupy G takimi, że H jest dzielnikiem normalnym grupy K. Udowodnić, że $K \subseteq N_G(H)$.

1.6.3. Niech a i b będą takimi dwoma elementami grupy G, że $a \neq b$, istnieje $c \in G$ takie, że $cac^{-1} = b$ oraz $dad^{-1} \in \{a, b\}$ dla każdego $d \in G$. Udowodnić, że $N = \langle a, b\rangle$ jest dzielnikiem normalnym grupy G taki, że $N \neq \{1\}$ oraz $N \neq G$.

1.6.4. Niech H będzie podgrupą grupy G. *Centralizatorem podgrupy H w grupie G* nazywamy zbiór tych $g \in G$, dla których $gh = hg$ dla wszystkich $h \in H$. *Centralizator podgrupy H w grupie G* oznaczamy $C_G(H)$. Udowodnić, że $C_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$. Pokazać, że grupa $N_G(H)/C_G(H)$ jest izomorficzna z pewną podgrupą grupy $\operatorname{Aut} H$.

1.6.5. Niech G będzie grupą działającą na zbiorze S, $|S| \geq 2$. Załóżmy, że działanie grupy G na S jest *tranzytywne*, tzn. dla dowolnych $x, y \in S$ istnieje $a \in G$ taki, że $ax = y$. Udowodnić, że grupy G_x oraz G_y są sprzężone dla dowolnych $x, y \in S$.

1.6.6. Niech G będzie grupą. Udowodnić, że $\operatorname{Inn} G \trianglelefteq \operatorname{Aut} G$.

1.6.7. Podać przykład automorfizmu grupy $\mathbb{Z}_6$, który nie jest automorfizmem wewnętrznym.

1.6.8. Udowodnić, że jeśli grupa $G/C(G)$ jest cykliczna, to grupa G jest abelowa.

1.6.9. Niech G będzie grupą taka, że istnieje element $a \in G$ taki, że $a^2 \neq 1$. Udowodnić, że grupa G posiada automorfizm różny od identyczności.

1.6.10. Udowodnić, że każda grupa skończona jest izomorficzna z pewną podgrupą grupy A_n.

1.6.11. Udowodnić, że jeśli grupa G zawiera podgrupę H taką, że $H \neq G$ i $[G : H] < \infty$, to grupa G zawiera dzielnik normalny N taki, że $N \neq G$ oraz $[G : N] < \infty$.

1.6.12. Niech G będzie grupą rzędu pn, gdzie p jest liczbą pierwszą oraz $0 < n < p$. Udowodnić, że jeśli H jest podgrupą grupy G rzędu p, to $H \trianglelefteq G$.

1.7 Twierdzenia Sylowa

1.7.1. Niech G będzie grupą rzędu p^n, gdzie p będzie liczbą pierwszą oraz $n \geq 1$. Udowodnić, że jeśli N jest dzielnikiem normalnym grupy G rzędu p, wtedy $N \subseteq C(G)$.

1.7.2. Niech p będzie liczbą pierwszą oraz N będzie takim dzielnikiem normalnym grupy G, że N oraz G/N są p-grupami. Udowodnić, że G jest p-grupą.

1.7.3. Niech p będzie liczbą pierwszą oraz G skończoną p-grupą. Udowodnić, że jeśli $H \trianglelefteq G$ oraz $H \neq \{1\}$, to $H \cap C(G) \neq \{1\}$. W szczególności, jeśli $G \neq \{1\}$, to $C(G) \neq \{1\}$.

1.7.4. Niech G będzie grupą rzędu p^n, gdzie p będzie liczbą pierwszą oraz $n \geq 1$. Udowodnić, że dla każdego $k = 0, \dots, n$ istnieje podgrupa normalna grupy G rzędu p^k.

1.7.5. Niech p będzie liczbą pierwszą oraz niech P będzie p-pogrupą Sylowa grupy skończonej G taką, że $P \trianglelefteq G$. Udowodnić, że $f(P) \subseteq P$ dla dowolnego endomorfizmu $f : G \to G$ grupy G.

1.7.6. Niech H będzie dzielnikiem normalnym grupy skończonej G. Udowodnić, że jeśli rząd grupy G jest potęgą liczby pierwszej p, to H jest zawarta w każdej p-podgrupie Sylowa grupy G.

1.7.7. Niech p i q będą liczbami pierwszymi takimi, że $p > q$. Jeśli G jest grupą rzędu $p^n q$, $n \geq 1$, to G zawiera jedyny dzielnik normalny rzędu p^n.

1.7.8. Udowodnić, że każda grupa G rzędu 12 (28, 56, 200) posiada dzielnik normalny różny od $\{1\}$ oraz G.

1.7.9. Niech p będzie liczbą pierwszą. Udowodnić, że każda grupa rzędu p^2 jest abelowa.

1.8 Grupy rozwiązalne

1.8.1. Niech H i K będą podgrupami grupy G. Niech $[H, K]$ będzie podgrupą generowaną przez wszystkie elementy postaci $[a, b]$, gdzie $a \in H$ i $b \in K$. Udowodnić, że jeśli $H \trianglelefteq G$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[H, G] \subseteq H$.

1.9 Grupy symetryczne

1.9.1. Udowodnić, że jeśli cykle $\tau = (i_1, \ldots, i_k)$ oraz $\sigma = (j_1, \ldots, j_l)$ są rozłączne, tzn. $\{i_1, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, \ldots, j_l\} = \emptyset$, to $\tau\sigma = \sigma\tau$.

1.9.2. Udowodnić, że rząd cyklu długości r jest równy r.

1.9.3. Niech $\tau_1, \ldots, \tau_k$ będą parami rozłącznymi cyklami. Udowodnić, że rząd $\tau_1 \cdots \tau_k$ jest równy najmniejszej wspólnej wielokrotności rzędów cykli $\tau_1, \ldots, \tau_k$.

1.9.4. Udowodnić, że każda permutacja może być przedstawiona w postaci iloczynu następujących transpozycji $(1, 2)$, $(1, 3)$, $\ldots$, $(1, n)$.

1.9.5. Udowodnić, że każda permutacja może być przedstawiona w postaci iloczynu następujących transpozycji $(1, 2)$, $(2, 3)$, $\ldots$, $(n - 1, n)$.

1.9.6. Udowodnić, że każda permutacja może być przedstawiona w postaci iloczynu transpozycji $(1, 2)$ oraz cyklu $(1, 2, \ldots, n)$.

1.9.7. Udowodnić, że każda permutacja parzysta może być przedstawiona w postaci iloczynu cykli długości 3.

1.9.8. Udowodnić, że A_n jest jedyną podgrupą H grupy S_n taką, że $[S_n : H] = 2$. (Wskazówka: Udowodnić, że jeśli $H < S_n$ i $[S_n : H] = 2$ oraz σ jest cyklem długości 3, to $\sigma \in H$).

1.9.9. Niech $N = \{\mathrm{Id}_{I_4}, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4), (2, 3)\}$. Udowodnić, że $N \trianglelefteq S_4$, $N \subseteq A_4$ oraz $S_4/N \simeq S_3$ i $A_4/N \simeq \mathbb{Z}_3$.

1.9.10. Niech $N = \{\mathrm{Id}_{I_4}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4), (2,3)\}$. Udowodnić, że $N = [A_4, A_4]$.

1.9.11. Udowodnić, że A_4 nie ma podgrupy rzędu 6.

1.9.12. Udowodnić, że $C(S_4) = \{1\}$.

1.9.13. Znaleźć wszystkie 2-podgrupy oraz 3-podgrupy Sylowa grup S_3, S_4 i S_5.

1.9.14. Udowodnić, że $[S_4, S_4] = A_4$.

1.9.15. Udowodnić, że grupy S_2, S_3, S_4 są rozwiązalne.

2 Pierścienie

2.1 Podstawowe definicje

2.1.1. Niech S będzie zbiorem wszystkich podzbiorów ustalonego zbioru U. W S definiujemy działania $+$ i $\cdot$ wzorami $A + B = (A - B) \cup (B - A)$ oraz $A \cdot B = A \cap B$. Udowodnić, że S z powyższymi działaniami jest pierścieniem (przemiennym z jedynką).

2.1.2. Niech R będzie takim pierścieniem, że $a^2 = a$ dla dowolnego $a \in R$. Udowodnić, że $a + a = 0$ dla dowolnego $a \in R$.

2.1.3. Element a pierścienia R nazywamy nilpotentem, jeśli istnieje $n \geq 0$ takie, że $a^n = 0$. Udowodnić, że jeśli elementy a i b są nilpotentami, to $a + b$ też jest elementem nilpotentem.

2.1.4. Udowodnić, że wszystkie nilpotenty pierścienia R tworzą ideał.

2.1.5. Niech N będzie ideałem nilpotentów pierścienia R. Udowodnić, że w pierścieniu R/N nie ma nilpotentów różnych od 0.

2.1.6. Udowodnić, że jeśli w pierścieniu nie istnieje element a różny od 0 taki, że $a^2 = 0$, to w pierścieniu nie ma nilpotentów różnych od 0.

2.1.7. Niech $f, g : \mathbb{Q} \to R$ będą dwoma homomorfizmami pierścieni takimi, że $f(k) = g(k)$ dla wszystkich $k \in \mathbb{Z}$. Udowodnić, że $f = g$.

2.2 Ideały

2.2.1. Niech I będzie ideałem w pierścieniu R. Udowodnić, że zbiór $J = \{a \in R \mid a^n \in I$ dla pewnego $n \geq 0\}$ jest ideałem. Ideał J nazywamy radykałem ideału I.

2.2.2. Niech X będzie podzbiorem pierścienia R. Udowodnić, że zbiór $J = \{a \in R \mid ax = 0$ dla każdego $x \in X\}$ jest ideałem. Ideał J nazywamy anihilatorem zbioru X.

2.2.3. Niech I będzie ideałem pierścienia R. Udowodnić, że zbiór $J = \{a \in R \mid ab \in I$ dla każdego $b \in R\}$ jest ideałem.

2.2.4. Niech $f : R \to S$ będzie epimorfizmem pierścieni. Udowodnić, że jeśli I jest ideałem pierwszym pierścienia R takim, że $\operatorname{Ker} f \subseteq I$, to $f(I)$ jest ideałem pierwszym pierścienia S.

2.2.5. Niech $f : R \to S$ będzie homomorfizmem pierścieni. Udowodnić, że jeśli I jest ideałem pierwszym pierścienia S, to $f^{-1}(I)$ jest ideałem pierwszym pierścienia S.

2.2.6. Niech R będzie skończonym pierścieniem, w którym $0 \neq 1$. Udowodnić, że jeśli R jest dziedziną, to R jest ciałem.

2.2.7. Niech R będzie pierścieniem, w którym $0 \neq 1$ oraz dla każdego elementu $a \in R$ różnego od 0 istnieje dokładnie jeden element $b \in R$ taki, że $aba = a$. Udowodnić, że R jest ciałem.

2.2.8. Udowodnić, że $\mathbb{Z}$ jest pierścieniem ideałów głównych.

2.2.9. Udowodnić, że jeśli $f : R \to S$ jest epimorfizmem pierścieni oraz R jest pierścieniem ideałów głównych, to S też jest pierścieniem ideałów głównych.

2.2.10. Niech R będzie pierścieniem, w którym $0 \neq 1$. Udowodnić, że R jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy jedynym ideałami pierścienia R są $\{0\}$ i R.

2.3 Faktoryzacja

2.3.1. Niech R będzie dziedziną ideałów głównych oraz $I \neq \{0\}$ ideałem. Udowodnić, że ideał I jest maksymalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest pierwszy.

2.3.2. Wyznaczyć wszystkie elementy odwracalne w pierścieniu $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.