

TEORIA GALOIS
ZESTAW 3
CIAŁO ROZKŁADU WIELOMIAU

1. Wyznaczyć ciała rozkładu nad $\mathbb{Q}$ następujących wielomianów. W każdym przypadku wyznaczyć stopień odpowiedniego rozszerzenia oraz element $u \in \mathbb{C}$ taki, że ciało rozkładu jest postaci $\mathbb{C}(u)$.

(1) $x^4 + 1$.

(2) $x^4 - 2$.

(3) $x^5 - 1$.

(4) $x^6 + 1$.

(5) $x^4 + x^2 + 1$.

(6) $x^4 - 2x^2 + 2$.

(7) $x^4 - 8x^2 + 15$.

(8) $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$.

2. Niech F będzie ciałem rozkładu wielomianu $f \in K[x] \setminus \{0\}$. Jeśli $f \sim (x - u_1) \cdots (x - u_n)$, to wyrażenie

$$\Delta_f := \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2$$

nazywamy *wyróżnikiem* wielomianu f .

(1) Udowodnić, że jeśli $f = x^3 + ax^2 + bx + c$, to

$$\Delta_f = a^2b^2 + 18abc - 27c^2 - 4a^3c - 4b^3.$$

(2) Udowodnić, że jeśli $f = x^3 + px + q$, to

$$\Delta_f = -27q^2 - 4p^3.$$

(3) Udowodnić, że jeśli $f = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{Q}[x]$ i $f(u) = 0$ dla $u \in \mathbb{C}$, to ciałem rozkładu wielomianu f nad ciałem $\mathbb{Q}$ jest ciało $\mathbb{Q}(u, \sqrt{\Delta_f})$.

Wskazówka. Udowodnić i wykorzystać fakt, że jeśli $f = (x - u)(x - v)(x - w)$, to $v + w = -a - u$ oraz $[f'(u)(v - w)]^2 = \Delta_f$.

3. Znaleźć stopnie rozszerzenie ciała rozkładu następujących wielomianów nad ciałem $\mathbb{Q}$.

(1) $x^3 - x$.

(2) $x^3 + x$.

(3) $x^3 - 3x + 1$.

(4) $x^3 + x + 1$.