

TEORIA GALOIS
ZESTAW 2
PODSTAWOWE TWIERDZENIE TEORII GALOIS

1. Wyznaczyć grupę $\text{Aut}_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$.
2. Udowodnić, że jeśli $d \in \mathbb{Q}_+$, to $|\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{d}))| \leq 2$.
3. Wyznaczyć grupę $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}))$.
4. Wyznaczyć grupy $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}))$, $\text{Aut}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ i $\text{Aut}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$. ■
5. Udowodnić, że jeśli $d \in \mathbb{Q}_+$, to ciało $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ jest rozszerzeniem Galois ciała $\mathbb{Q}$.
6. Udowodnić, że ciało $\mathbb{C}$ jest rozszerzeniem Galois ciała $\mathbb{R}$.
7. Udowodnić, że (jeśli $|K| = \infty$, to) ciało $K(x)$ jest rozszerzeniem Galois ciała K .
8. Niech G będzie grupą automorfizmów ciała $K(x)$ generowaną przez $\sigma: K(x) \rightarrow K(x)$ wyznaczone przez warunek $x \mapsto \frac{1}{1-x}$. Udowodnić, że $G' = K(f)$, gdzie
$$f := \frac{1 - 3x + x^3}{x(1 - x)}.$$
9. Udowodnić, że $\mathbb{Q}(x^2)'' = \mathbb{Q}(x^2)$ i $\mathbb{Q}(x^3)'' \neq \mathbb{Q}(x^3)$.
10. Wyznaczyć wszystkie podciała ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.