

TEORIA GALOIS
ZESTAW 1
ROZSZERZENIA CIAŁ

1. Udowodnić Twierdzenie 1.1 z wykładu.
2. Udowodnić Twierdzenie 1.2 z wykładu.
3. Udowodnić, że jeśli $\sigma: K \rightarrow L$ jest homomorfizmem ciał, to σ jest monomorfizmem.
4. Niech $f := x^3 - 6x^2 + 9x + 3$.
 - (1) Udowodnić, że wielomian f jest nierozkładalny nad ciałem $\mathbb{Q}$.
 - (2) Udowodnić, że wielomian f posiada dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty u .
 - (3) Wyrazić jako kombinację liniową o współczynnikach wymiernych elementów $1, u, u^2$ następujące elementy ciała $\mathbb{Q}(u)$:
 - (a) u^4 ;
 - (b) u^5 ;
 - (c) $3u^5 - u^4 + 2$;
 - (d) $(u + 1)^{-1}$;
 - (e) $(u^2 - 6u + 8)^{-1}$.
5. Niech $f := x^5 + 2x + 2$.
 - (1) Udowodnić, że wielomian f jest nierozkładalny nad ciałem $\mathbb{Q}$.
 - (2) Udowodnić, że wielomian f posiada dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty u .
 - (3) Wyrazić jako kombinację liniową o współczynnikach wymiernych elementów $1, u, u^2, u^3, u^4$ następujące elementy ciała $\mathbb{Q}(u)$:
 - (a) $(u^2 + 2)(u^3 + 3u)$;
 - (b) u^{-1} ;
 - (c) $u^4(u^4 + 3u^2 + 7u + 5)$;

(d) $(u + 2)(u^2 + 3)^{-1}$.

6. Znaleźć $[F : K]$ oraz bazę ciała F nad ciałem K w poniższych przypadkach.

(1) $K := \mathbb{Q}$ i $F := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

(2) $K := \mathbb{Q}$ i $F := \mathbb{Q}(\iota, \sqrt{3}, \omega)$, gdzie $\omega \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem pierwotnym stopnia 3 z 1.

7. Znaleźć wielomian minimalny nad ciałem $\mathbb{Q}$ następujących liczb zespolonych:

(1) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

(2) $\sqrt{2} + \iota$.

(3) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$.

8. Niech $u := \frac{x^3}{x+1} \in K(x)$. Udowodnić, że ciało $K(x)$ jest prostym rozszerzeniem ciała $K(u)$ i znaleźć $[K(x) : K(u)]$.