Zadanie 1. Uzasadnij, że każda podgrupa grupy abelowej G jest dzielnikiem normalnym.

Zadanie 2. Wyznacz wszystkie dzielniki normalne grupy S_3.

Zadanie 3. Pokaż, że podgrupa A_4 grupy S_4 jest dzielnikiem normalnym.

Zadanie 4. Uzasadnij, że w podgrupie A_4 grupy S_4 nie istnieje dzielnik normalny rzędu 2.

Zadanie 5. Niech Q będzie podgrupą grupy $GL_2(\mathbb{C})$ generowaną przez macierze:

$$I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix},\ J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } K = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$

Wyznacz dzielniki normalne podgrupy Q.

Zadanie 6. Wyznacz wszystkie podgrupy grupy D_4, które nie są dzielnikami normalnymi.

Zadanie 7. Niech H będzie podgrupą grupy G. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

(a) H jest dzielnikiem normalnym grupy G;

(b) $gHg^{-1} = H$ dla dowolnego elementu $g \in G$;

(c) $g^{-1}Hg = H$ dla dowolnego elementu $g \in G$;

(d) $ghg^{-1} \in H$ dla dowolnych elementów $g \in G$ i $h \in H$;

(e) $g^{-1}hg \in H$ dla dowolnych elementów $g \in G$ i $h \in H$.

Zadanie 8. Niech H będzie podgrupą grupy G. Pokaż, że relacja ρ określona wzorem:

$$x\rho y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

jest relacją równoważności. Ponadto udowodnij, że H jest dzielnikiem normalny grupy G wtedy i tylko wtedy, gdy ρ jest zgodna z działaniem w grupie G, tzn. dla dowolnych x, y, z, $t \in G$:

$$x\rho y \text{ i } z\rho t \Rightarrow (xz)\rho(yt).$$

Zadanie 9. Udowodnij, że jeśli $[G : H] = 2$, to H jest dzielnikiem normalnym grupy G.

Zadanie 10. Niech $\mathcal{C}$ będzie zbiorem dzielników normalnych grupy G. Pokaż, że $\bigcap_{H\in\mathcal{C}} H$ jest dzielnikiem normalnym grupy G.

Zadanie 11. Niech G będzie grupą. Udowodnij, że centrum $Z(G) = \{g \in G \ : \ \forall_{h\in G}\ gh = hg\}$ grupy G jest dzielnikiem normalnym grupy G.

Zadanie 12. Niech H oraz J będą dzielnikami normalnymi grupy G. Załóżmy, że $H \cap J = \{e\}$. Pokaż, że dla dowolnych elementów $h \in H$ i $j \in J$ mamy $hj = jh$.

Niech G będzie grupą, H podgrupą grupy G, a ρ relacją równoważności, określoną względem podgrupy H, która jest zgodna z działaniem w grupie G. Na klasach abstrakcji, wyznaczonych przez relację ρ, możemy wprowadzić działanie, a mianowicie dla x, $y \in G$:

$$(xH)(yH) = (xy)H.$$

Zadanie 13. Niech G/H będzie zbiorem wszystkich warstw lewostronnych grupy G względem dzielnika normalnego H grupy G. Pokaż, że G/H, wraz z wyżej określonym działaniem, jest grupą.

Zadanie 14. Podgrupa $H = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ grupy A_4 jest dzielnikiem normalnym. Jaki rząd ma grupa A_4/H?

Zadanie 15*. Niech H będzie podgrupą o skończonym indeksie nieskończonej grupy G. Pokaż, że G ma dzielnik normalny o skończonym indeksie, która jest podgrupą H.

Zadanie 16 Niech G będzie grupą abelową, a H jej podgrupą. Udowodnij, że G/H jest grupą abelową.