Algebra I

Wykład XIV

Grzegorz Bobiński (UMK)

4 Działania grup na zbiorach i twierdzenia Sylowa

4.1 Działania grup na zbiorach

Definicja

Działaniem grupy G na zbiorze X nazywamy każdą funkcję $\delta\colon G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g * x$, taką, że

$$1 * x = x \qquad \text{i} \qquad (g \cdot h) * x = g * (h * x)$$

dla dowolnych $g, h \in G$ oraz $x \in X$.

Mówimy też, że w powyższej sytuacji grupa G działa na zbiorze X.

Przykłady

- Jeśli X jest zbiorem i $G \leq S_X$, to G działa na X zgodnie ze wzorem

$$\sigma * x := \sigma(x) \qquad (\sigma \in G,\ x \in X).$$

- Jeśli $H \leq G$, to H działa na G zgodnie ze wzorem

$$h * g := h \cdot g \qquad (h \in H,\ g \in G).$$

  Działanie to nazywamy działaniem przez (lewe) przesunięcia.

- Jeśli $H \leq G$, to H działa na G zgodnie ze wzorem

$$h * g := h \cdot g \cdot h^{-1} \qquad (h \in H,\ g \in G).$$

  Działanie to nazywamy działaniem przez sprzężenia.

Stwierdzenie 4.1

(1) Jeśli $\delta\colon G \times X \to X$ jest działaniem grupy G na X, to funkcja $\varphi_\delta\colon G \to S_X$ dana wzorem

$$(\varphi_\delta(g))(x) := \delta(g, x) \qquad (g \in G,\ x \in X),$$

jest (dobrze określonym) homomorfizmem.

(2) Jeśli $\varphi\colon G \to S_X$ jest homomorfizmem grup, to funkcja $\delta_\varphi\colon G \times X \to X$ dana wzorem

$$\delta_\varphi(g, x) := (\varphi(g))(x) \qquad (g \in G,\ x \in X),$$

jest działaniem grupy G na X.

(3) Jeśli δ jest działaniem grupy G na zbiorze X, to $\delta_{\varphi_\delta} = \delta$.

(4) Jeśli X jest zbiorem oraz $\varphi\colon G \to S_X$ jest homomorfizmem grup, to $\varphi_{\delta_\varphi} = \varphi$.

Dowód

(1) [Poprawność definicji]: Musimy sprawdzić, że $\varphi_\delta(g) \in S_X$.
Mamy

$$(\varphi_\delta(g))((\varphi_\delta(g^{-1}))(x)) = \delta(g, \delta(g^{-1}, x)) = g * (g^{-1} * x) = (g \cdot g^{-1}) * x = 1 * x = x,$$

a więc $\varphi_\delta(g) \circ \varphi_\delta(g^{-1}) = \mathrm{Id}_X$. Analogicznie $\varphi_\delta(g^{-1}) \circ \varphi_\delta(g) = \mathrm{Id}_X$.
[Homomorfizm]: Mamy

$$\begin{aligned}(\varphi_\delta(g_1 \cdot g_2))(x) = \delta(g_1 \cdot g_2, x) = (g_1 \cdot g_2) * x = g_1 * (g_2 * x)\\ = \delta(g_1, \delta(g_2, x)) = (\varphi_\delta(g_1))((\varphi_\delta(g_2))(x)),\end{aligned}$$

a więc $\varphi_\delta(g_1 \cdot g_2) = \varphi_\delta(g_1) \circ \varphi_\delta(g_2)$.
(3) Mamy

$$\delta_{\varphi_\delta}(g, x) = (\varphi_\delta(g))(x) = \delta(g, x). \quad \square$$

Stwierdzenie 4.1

(1) Jeśli $\delta\colon G \times X \to X$ jest działaniem grupy G na X, to funkcja $\varphi_\delta\colon G \to S_X$ dana wzorem

$$(\varphi_\delta(g))(x) := \delta(g, x) \qquad (g \in G,\ x \in X),$$

jest (dobrze określonym) homomorfizmem.

Wniosek 4.2 (Cayley)

Jeśli G jest grupą, to istnieje monomorfizm $G \to S_G$.

Dowód

Niech $\delta\colon G \times G \to G$ będzie działaniem grupy G na G przez lewe przesunięcia.
Wtedy $\varphi_\delta\colon G \to S_G$ jest homomorfizmem grup.
Musimy sprawdzić, że $\operatorname{Ker}\varphi_\delta = \{1\}$.
Załóżmy, że $g \in \operatorname{Ker}\varphi_\delta$.
Wtedy $\varphi_\delta(g) = \mathrm{Id}_G$, więc

$$g \cdot h = \delta(g, h) = (\varphi_\delta(g))(h) = \mathrm{Id}_G(h) = h$$

dla dowolnego $h \in G$.
W szczególności $g = g \cdot 1 = 1$. $\square$

Stwierdzenie 4.1

(1) Jeśli $\delta\colon G \times X \to X$ jest działaniem grupy G na X, to funkcja $\varphi_\delta\colon G \to S_X$ dana wzorem

$$(\varphi_\delta(g))(x) := \delta(g, x) \qquad (g \in G,\ x \in X),$$

jest (dobrze określonym) homomorfizmem.

Stwierdzenie 4.3.

Jeśli δ jest działaniem grupy G na G przez sprzężenia, to $\operatorname{Im} \varphi_\delta \subseteq \operatorname{Aut}(G)$.

Dowód

Należy sprawdzić, że dla każdego $g \in G$ funkcja $\varphi_g := \varphi_\delta(g)$ jest homomorfizmem grupy G. Mamy

$$\varphi_g(g_1 \cdot g_2) = \delta(g, g_1 \cdot g_2) = g \cdot (g_1 \cdot g_2) \cdot g^{-1} = (g \cdot g_1 \cdot g^{-1}) \cdot (g \cdot g_2 \cdot g^{-1}) = \varphi_g(g_1) \cdot \varphi_g(g_2). \qquad \square$$

Definicja

Automorfizmem wewnętrznym grupy G nazywamy każdy automorfizm postaci $\varphi_\delta(g)$, gdzie $g \in G$, zaś δ jest działaniem grupy G na G przez sprzężenia.
Zbiór wszystkich automorfizmów wewnętrznych grupy G tworzy grupę (gdyż jest równy $\operatorname{Im} \varphi_\delta$), którą nazywamy grupą automorfizmów wewnętrznych grupy G i oznaczamy $\operatorname{Inn}(G)$.

Definicja

Centrum grupy G nazywamy

$$C(G) := \{g \in G : g \cdot h = h \cdot g \text{ dla wszystkich } h \in G\}.$$

Przykłady

- $C(G) = G$ wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grupą abelową.
- Jeśli F jest ciałem oraz $n \in \mathbb{N}_+$, to $C(\mathrm{GL}_n(F))$ składa się z wszystkich macierzy postaci $\lambda \cdot \mathrm{Id}_n$, dla $\lambda \in F^\times$.
- $C(D_4) = \{\mathrm{Id}, O_{180^\circ}\}$.

Stwierdzenie 4.4

Jeśli δ jest działaniem grupy G na G przez sprzężenia, to $\operatorname{Ker} \varphi_\delta = C(G)$.
W szczególności, $C(G) \trianglelefteq G$ oraz $\mathrm{Inn}(G) \simeq G/C(G)$.

Dowód

Mamy

$$g \in \operatorname{Ker} \varphi_\delta \iff \forall_{h \in G}\ g \cdot h \cdot g^{-1} = h \iff \forall_{h \in G}\ g \cdot h = h \cdot g \iff g \in C(G).$$

Cześć druga wynika z (1.25) i (1.34). □

Uwaga

$C(G)$ jest grupą abelową.

Stwierdzenie 4.3.

Jeśli δ jest działaniem grupy G na G przez sprzężenia, to $\operatorname{Im}\varphi_\delta \subseteq \operatorname{Aut}(G)$.

Oznaczenie

Jeśli $g_1, g_2 \in G$ oraz $X \subseteq G$, to $g_1 X g_2 := \{g_1 \cdot h \cdot g_2 : h \in X\}$.

Wniosek 4.5

Jeśli $H \leq G$ oraz $g \in G$, to $gHg^{-1} \leq G$ i $gHg^{-1} \simeq H$.

Dowód

Niech $\varphi(h) := g \cdot h \cdot g^{-1} (h \in G)$.
(4.3) $\implies$ $\varphi \in \operatorname{Aut}(G)$.
Stąd funkcja $\varphi \circ \mu\colon H \to G$, gdzie $\mu\colon H \to G$ jest naturalnym włożeniem, jest monomorfizmem.
Ponieważ $\operatorname{Im}(\varphi \circ \mu) = gHg^{-1}$, więc dostajemy tezę z (1.10) i (1.12)(3). □

Definicja

Podgrupy $H, K \leq G$ nazywamy sprzężonymi, jeśli istnieje $g \in G$ takie, że $K = gHg^{-1}$.

Uwagi

(1) Relacja sprzężenia jest relacją równoważności.

(2) Jeśli $H \leq G$, to

$$H \trianglelefteq G \iff H = K \text{ dla dowolnej podgrupy } K \text{ sprzężonej z } H.$$

Definicja

Jeśli grupa G działa na zbiorze X, to dla $x \in X$ definiujemy

$$G_x := \{g \in G : g * x = x\} \qquad \text{i} \qquad G * x := \{g * x : g \in G\}.$$

G_x nazywamy stabilizatorem lub podgrupą izotropii elementu x, natomiast $G * x$ będziemy nazywać orbitą elementu x.

Stwierdzenie 4.6

Załóżmy, że grupa G działa na zbiorze X.

(1) Relacja $\sim$ na X dana wzorem

$$x \sim y :\iff y = g * x \text{ dla pewnego } g \in G$$

jest relacją równoważności.

(2) Klasą abstrakcji elementu $x \in X$ w powyższej relacji jest $G * x$.

Dowód

(1) [Zwrotność]: $x = 1 * x \implies x \sim x$.
[Symetryczność]: $x \sim y \implies y = g * x \implies$
$g^{-1} * y = g^{-1} * (g * x) = (g^{-1} \cdot g) * x = 1 * x = x \implies y \sim x$.
[Przechodniość]: $x \sim y \wedge y \sim z \implies y = g * x \wedge z = h * y \implies z = h * (g * x) = (h \cdot g) * x$
$\implies x \sim z$.
(2) Bezpośrednio z definicji.

Stwierdzenie 4.6

Załóżmy, że grupa G działa na zbiorze X.

(1) Relacja $\sim$ na X dana wzorem

$$x \sim y :\iff y = g * x \text{ dla pewnego } a \in G$$

jest relacją równoważności.

(2) Klasą abstrakcji $x \in X$ w powyższej relacji jest $G * x$.

(3) $G_x \leq G$.

(4) $G_{g*x} = gG_xg^{-1}$.

Dowód

(3) $1 * x = x \implies 1 \in G_x \implies G_x \neq \varnothing$.

Jeśli $g, h \in G_x$, to

$$(g \cdot h^{-1}) * x = g * (h^{-1} * (h * x)) = g * ((h^{-1} \cdot h) * x) = g * (1 * x) = g * x = x,$$

więc $g \cdot h^{-1} \in G_x$.

Zatem $G_x \leq G$ na mocy (1.9).

(4) Mamy

$$h \in G_{g*x} \iff h * (g * x) = g * x \iff g^{-1} * (h * (g * x)) = x$$
$$\iff g^{-1} \cdot h \cdot g \in G_x \iff h \in gG_xg^{-1}. \square$$

Twierdzenie 4.7

Jeśli grupa G działa na zbiorze X oraz $x \in X$, to funkcja

$$G/G_x \in gG_x \mapsto g * x \in G * x$$

jest bijekcją.
W szczególności, jeśli $|G| < \infty$, to $|G * x| \mid |G|$.

Dowód

[Poprawność definicji]: Jeśli $g_1 G_x = g_2 G_x$, to $g_1^{-1} \cdot g_2 \in G_x$, więc

$$g_1 * x = g_1 * ((g_1^{-1} \cdot g_2) * x) = g_2 * x.$$

[Surjetywność]: Bezpośrednio z definicji.
[Injektywność]: Jeśli $g_1 * x = g_2 * x$, to

$$(g_1^{-1} \cdot g_2) * x = g_1^{-1} * (g_2 * x) = g_1^{-1} * (g_1 * x) = x,$$

więc $g_1^{-1} \cdot g_2 \in G_x$, zatem $g_1 G_x = g_2 G_x$. □