$\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

0° $\{0\}$. ✓

1° $\langle 1 \rangle = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \mathbb{Z}_8$. ✓
$\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4, 6\}$. ✓[2]
$\langle 3 \rangle = \{0, 3, 6, 1, 4, 7, 2, 5\} = \langle 1 \rangle$. ✗
$\langle 4 \rangle = \{0, 4\}$. ✓[4]
$\langle 5 \rangle = \{0, 5, 2, 7, 4, 1, 6, 3\} = \langle 1 \rangle$. ✗
$\langle 6 \rangle = \{0, 6, 4, 2\} = \langle 2 \rangle$. ✗
$\langle 7 \rangle = \{0, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\} = \langle 1 \rangle$. ✗

2° Nic nie trzeba robić.

∞° Nic nie trzeba robić.

Odpowiedź: Grupa $\mathbb{Z}_8$ ma 4 podgrupy: . . . .

$\mathbb{Z}_{16}^{\times} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$.

0° $\{1\}$. ✓

1° $\langle 3 \rangle = \{1, 3, 9, 11\}$. ✓[2]
$\langle 5 \rangle = \{1, 5, 9, 13\}$. ✓[2]
$\langle 7 \rangle = \{1, 7\}$. ✓[4]
$\langle 9 \rangle = \{1, 9\}$. ✓[4]
$\langle 11 \rangle = \{1, 11, 9, 3\} = \langle 3 \rangle$. ✗
$\langle 13 \rangle = \{1, 13, 9, 5\} = \langle 5 \rangle$. ✗
$\langle 15 \rangle = \{1, 15\}$ ✓[4]

2° $\langle 7, 9 \rangle = \{1, 9, 7, 15\}$. ✓[2]
$\langle 7, 15 \rangle = \{1, 15, 7, 9\} = \langle 7, 9 \rangle$. ✗
$\langle 9, 15 \rangle = \{1, 15, 9, 7\} = \langle 7, 9 \rangle$. ✗

3° Nic nie trzeba robić.

∞° $\mathbb{Z}_{16}^{\times}$. ✓

Odpowiedź: Grupa $\mathbb{Z}_{16}^{\times}$ ma 8 podgrup: ....

Podgrupy grupy D_3

$D_3 = \{\mathrm{Id}, O_{120^\circ}, O_{240^\circ}, S_k, S_l, S_m\}$.

0° $\{\mathrm{Id}\}$. ✓

1° $\langle O_{120^\circ} \rangle = \{\mathrm{Id}, O_{120^\circ}, O_{240^\circ}\}$. ✓[2]
$\langle O_{240^\circ} \rangle = \{\mathrm{Id}, O_{240^\circ}, O_{120^\circ}\} = \langle O_{120^\circ} \rangle$. ✗
$\langle S_k \rangle = \{\mathrm{Id}, S_k\}$. ✓[3]
$\langle S_l \rangle = \{\mathrm{Id}, S_l\}$. ✓[3]
$\langle S_m \rangle = \{\mathrm{Id}, S_m\}$. ✓[3]

2° Nic nie trzeba robić.

∞° D_3. ✓

Odpowiedź: Grupa D_3 ma 6 podgrup: ....

$$A_4 = \{\mathrm{Id}, (1,2,3), (1,3,2), (1,2,4), (1,4,2), (1,3,4), (1,4,3), (2,3,4), (2,4,3), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}.$$

0° $\{\mathrm{Id}\}$. ✓

1° $\langle(1,2,3)\rangle = \{\mathrm{Id}, (1,2,3), (1,3,2)\}$. ✓[4]
$\langle(1,3,2)\rangle = \{\mathrm{Id}, (1,3,2), (1,2,3)\} = \langle(1,2,3)\rangle$. ✗
$\langle(1,2,4)\rangle = \{\mathrm{Id}, (1,2,4), (1,4,2)\}$. ✓[4]
$\langle(1,4,2)\rangle = \{\mathrm{Id}, (1,4,2), (1,2,4)\} = \langle(1,2,4)\rangle$. ✗
$\langle(1,3,4)\rangle = \{\mathrm{Id}, (1,3,4), (1,4,3)\}$. ✓[4]
$\langle(1,4,3)\rangle = \{\mathrm{Id}, (1,4,3), (1,3,4)\} = \langle(1,3,4)\rangle$. ✗
$\langle(2,3,4)\rangle = \{\mathrm{Id}, (2,3,4), (2,4,3)\}$. ✓[4]
$\langle(2,4,3)\rangle = \{\mathrm{Id}, (2,4,3), (2,3,4)\} = \langle(2,3,4)\rangle$. ✗
$\langle(1,2)(3,4)\rangle = \{\mathrm{Id}, (1,2)(3,4)\}$. ✓[6]
$\langle(1,3)(2,4)\rangle = \{\mathrm{Id}, (1,3)(2,4)\}$. ✓[6]
$\langle(1,4)(2,3)\rangle = \{\mathrm{Id}, (1,4)(2,3)\}$. ✓[6]

Podgrupy grupy A_4 II

0° $\{\mathrm{Id}\}$. ✓

1° $\langle(1,2,3)\rangle = \{\mathrm{Id}, (1,2,3), (1,3,2)\}$. ✓[4]
$\langle(1,2,4)\rangle = \{\mathrm{Id}, (1,2,4), (1,4,2)\}$. ✓[4]
$\langle(1,3,4)\rangle = \{\mathrm{Id}, (1,3,4), (1,4,3)\}$. ✓[4]
$\langle(2,3,4)\rangle = \{\mathrm{Id}, (2,3,4), (2,4,3)\}$. ✓[4]
$\langle(1,2)(3,4)\rangle = \{\mathrm{Id}, (1,2)(3,4)\}$. ✓[6]
$\langle(1,3)(2,4)\rangle = \{\mathrm{Id}, (1,3)(2,4)\}$. ✓[6]
$\langle(1,4)(2,3)\rangle = \{\mathrm{Id}, (1,4)(2,3)\}$. ✓[6]

2° Odrzucamy pary $\{a, b\}$, dla $a, b \in \{(1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4)\}$, gdyż $4 \cdot 4 < 2 \cdot 12$. $[12 = [A_4 : \{\mathrm{Id}\}]]$

$$\langle(1,2,3), (1,2)(3,4)\rangle = \{\underbrace{\mathrm{Id}}_{0}, \underbrace{(1,2,3), (1,3,2)}_{1}, \underbrace{(1,3,4), (2,3,4)}_{2}, \underbrace{(1,2,4), (1,4)(2,3), \ldots}_{3}, \ldots\} = A_4. \ \checkmark\ [1]$$

Podobnie dla pozostałych par $\{a, b\}$, dla $a \in \{(1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4)\}$, $b \in \{(1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$.

$$\langle(1,2)(3,4), (1,3)(2,4)\rangle = \{\underbrace{\mathrm{Id}}_{0}, \underbrace{(1,2)(3,4)}_{1}, \underbrace{(1,4)(2,3)}_{2}, \underbrace{(1,3)(2,4)}_{3}, \underbrace{\cancel{\mathrm{Id}}}_{4}\}. \ \checkmark[3]$$

Podobnie dla pozostałych par $\{a, b\}$, dla $a, b \in \{(1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$.

3° Nic nie trzeba robić.

∞° Nic nie trzeba robić.

Odpowiedź: Grupa A_4 ma 10 podgrup: ....

Niech $Q := \langle I, J, K \rangle$, gdzie

$$I := \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \qquad J := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad K := \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$

Etap I Wyznaczenie elementów grupy Q.

$\langle I \rangle = \{\mathrm{Id}, I, I^2 = -\mathrm{Id}, -I\}$.
$\langle J \rangle = \{\mathrm{Id}, J, J^2 = -\mathrm{Id}, -J\}$.
$\langle I, J \rangle = \{\underbrace{\mathrm{Id}}_{0}, \underbrace{I, -\mathrm{Id}, -I}_{1}, \underbrace{IJ = K, -J, -K, \cancel{-I}, \cancel{\mathrm{Id}}, \cancel{I}, \cancel{-K}, J, \cancel{K}}_{2}, \ldots\}$.
Ponieważ $K \in \langle I, J \rangle$, więc $\langle I, J, K \rangle = \langle I, J \rangle$.
Zatem

$$Q = \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}, I, -I, J, -J, K, -K\}.$$

Zauważmy,

$$I^2 = J^2 = K^2 = -\mathrm{Id}, \quad IJ = K, \quad JK = I, \quad KI = J, \quad JI = -K, \quad KJ = -I, \quad IK = -J.$$

$$Q = \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}, I, -I, J, -J, K, -K\}.$$

$$I^2 = J^2 = K^2 = -\mathrm{Id}, \quad IJ = K, \quad JK = I, \quad KI = J, \quad JI = -K, \quad KJ = -I, \quad IK = -J.$$

Etap II Wyznaczenie podgrup grupy Q.

0° $\{\mathrm{Id}\}$. ✓

1° $\langle -\mathrm{Id} \rangle = \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$. ✓[4]
$\langle I \rangle = \{\mathrm{Id}, I, -\mathrm{Id}, -I\}$. ✓[2]
$\langle -I \rangle = \{\mathrm{Id}, -I, -\mathrm{Id}, I\} = \langle I \rangle$. ✗
$\langle J \rangle = \{\mathrm{Id}, J, -\mathrm{Id}, -J\}$. ✓[2]
$\langle -J \rangle = \{\mathrm{Id}, -J, -\mathrm{Id}, J\} = \langle J \rangle$. ✗
$\langle K \rangle = \{\mathrm{Id}, K, -\mathrm{Id}, -K\}$. ✓[2]
$\langle -K \rangle = \{\mathrm{Id}, -K, -\mathrm{Id}, K\} = \langle K \rangle$. ✗

2° Nic nie trzeba robić.

∞° Q. ✓

Odpowiedź: Grupa Q ma 6 podgrup: ....

$$\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}.$$

(1) Warstwy względem podgrupy $H = \{0, 6\}$.

$0 + H = H = \{0, 6\}$
$1 + H = \{1, 7\}$
$2 + H = \{2, 8\}$
$3 + H = \{3, 9\}$
$4 + H = \{4, 10\}$
$5 + H = \{5, 11\}$

Ponieważ grupa $\mathbb{Z}_{12}$ jest abelowa, więc warstwy lewo- i prawostronne są identyczne.

(2) Warstwy względem podgrupy $H = \{0, 4, 8\}$.

$0 + H = \{0, 4, 8\}$
$1 + H = \{1, 5, 9\}$
$2 + H = \{2, 6, 10\}$
$3 + H = \{3, 7, 11\}$

Ponieważ grupa $\mathbb{Z}_{12}$ jest abelowa, więc warstwy lewo- i prawostronne są identyczne.

(3) Warstwy względem podgrupy $H = \{0, 3, 6, 9\}$.

$0 + H = \{0, 3, 6, 9\}$
$1 + H = \{1, 4, 7, 10\}$
$2 + H = \{2, 5, 8, 11\}$

Ponieważ grupa $\mathbb{Z}_{12}$ jest abelowa, więc warstwy lewo- i prawostronne są identyczne.

(1) Warstwy względem podgrupy $H = \{1, 17\}$.

$\mathbb{Z}_{36}^{\times} = \{\cancel{1}, \cancel{5}, \cancel{7}, \cancel{11}, \cancel{13}, \cancel{17}, \cancel{19}, \cancel{23}, 25, 29, \cancel{31}, \cancel{35}\}$.
$1 \cdot H = H = \{1, 17\}$
$5 \cdot H = \{5, 13\}$
$7 \cdot H = \{7, 11\}$
$19 \cdot H = \{19, 35\}$
$23 \cdot H = \{23, 31\}$
$25 \cdot H = \{25, 29\}$
Ponieważ grupa $\mathbb{Z}_{36}^{\times}$ jest abelowa, więc warstwy lewo- i prawostronne są identyczne.

(3) Warstwy względem podgrupy $H = \{1, 17, 19, 35\}$.

$1 \cdot H = H = \{1, 17, 19, 35\}$
$5 \cdot H = H = \{5, 13, 23, 31\}$
$7 \cdot H = H = \{7, 11, 21, 29\}$
Ponieważ grupa $\mathbb{Z}_{36}^{\times}$ jest abelowa, więc warstwy lewo- i prawostronne są identyczne.

(4) Warstwy względem podgrupy $H = \{1, 5, 13, 17, 25, 29\}$.

$1 \cdot H = H = \{1, 5, 13, 17, 25, 29\}$
$7 \cdot H = H = \{7, 11, 19, 27, 31, 35\}$
Ponieważ grupa $\mathbb{Z}_{36}^{\times}$ jest abelowa, więc warstwy lewo- i prawostronne są identyczne.

$A_4 = \{\mathrm{Id}, (1, 2, 3), (1, 3, 2), (1, 2, 4), (1, 4, 2), (1, 3, 4), (1, 4, 3), (2, 3, 4), (2, 4, 3), (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$.

(1) Warstwy względem podgrupy $H = \{\mathrm{Id}, (1, 2)(3, 4)\}$.

Warstwy lewostronne

$\mathrm{Id} \circ H = \{\mathrm{Id}, (1, 2)(3, 4)\}$
$(1, 2, 3) \circ H = \{(1, 2, 3), (1, 3, 4)\}$
$(1, 3, 2) \circ H = \{(1, 3, 2), (2, 3, 4)\}$
$(1, 2, 4) \circ H = \{(1, 2, 4), (1, 4, 3)\}$
$(1, 4, 2) \circ H = \{(1, 4, 2), (2, 4, 3)\}$
$(1, 3)(2, 4) \circ H = \{(1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$

Warstwy prawostronne

$H \circ \mathrm{Id} = \{\mathrm{Id}, (1, 2)(3, 4)\}$
$H \circ (1, 2, 3) = \{(1, 2, 3), (2, 4, 3)\}$
$H \circ (1, 3, 2) = \{(1, 3, 2), (1, 4, 3)\}$
$H \circ (1, 2, 4) = \{(1, 2, 4), (2, 3, 4)\}$
$H \circ (1, 4, 2) = \{(1, 4, 2), (1, 3, 4)\}$
$H \circ (1, 3)(2, 4) = \{(1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$

Warstwy grupy A_4 II

$A_4 = \{\mathrm{Id}, (1,2,3), (1,3,2), (1,2,4), (1,4,2), (1,3,4), (1,4,3), (2,3,4), (2,4,3), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$.

(2) Warstwy względem podgrupy $H = \{\mathrm{Id}, (1,2,3), (1,3,2)\}$.

Warstwy lewostronne

$\mathrm{Id} \circ H = \{\mathrm{Id}, (1,2,3), (1,3,2)\}$
$(1,2,4) \circ H = \{(1,2,4), (1,4)(2,3), (1,3,4)\}$
$(1,4,2) \circ H = \{(1,4,2), (2,3,4), (1,3)(2,4)\}$
$(1,4,3) \circ H = \{(1,4,3), (2,4,3), (1,2)(3,4)\}$

Warstwy prawostronne

$H \circ \mathrm{Id} = \{\mathrm{Id}, (1,2,3), (1,3,2)\}$
$H \circ (1,2,4) = \{(1,2,4), (1,3)(2,4), (2,4,3)\}$
$H \circ (1,4,2) = \{(1,4,2), (1,4,3), (1,4)(2,3)\}$
$H \circ (1,3,4) = \{(1,3,4), (2,3,4), (1,2)(3,4)\}$

(3) Warstwy względem podgrupy $H = \{\mathrm{Id}, (1,2)(3,4)(1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$.

Warstwy lewostronne

$\mathrm{Id} \circ H = \{\mathrm{Id}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$
$(1,2,3) \circ H = \{(1,2,3), (1,3,4), (2,4,3), (1,4,2)\}$
$(1,3,2) \circ H = \{(1,3,2), (1,2,4), (1,4,3), (2,3,4)\}$

Warstwy prawostronne

$H \circ \mathrm{Id} = \{\mathrm{Id}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$
$H \circ (1,2,3) = \{(1,2,3), (2,4,3), (1,4,2), (1,3,4)\}$
$H \circ (1,3,2) = \{(1,3,2), (1,2,4), (1,4,3), (2,3,4)\}$

[Zauważmy, że warstwy lewo- i prawostronne są identyczne.]

Zadanie 10

Pokazać, że $C_G(a) \leq G$.

Rozwiązanie

Skorzystamy z Stwierdzenia 1.9, które mówi, że

$$H \leq G \iff H \neq \varnothing \wedge (x, y \in H \implies x^{-1}y \in H).$$

Mamy

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a,$$

więc $1 \in C_G(a)$, zatem $C_G(a) \neq \varnothing$.
Ponadto, jeśli $x, y \in C_G(a)$, to

$$(xy^{-1})a = xy^{-1}a \cdot 1 = xy^{-1}ayy^{-1} \overset{ay=ya}{=} xy^{-1}yay^{-1} = x \cdot 1 \cdot ay^{-1} = xay^{-1} \overset{xa=ax}{=} a(xy^{-1}),$$

a więc $xy^{-1} \in C_G(a)$. $\square$

$C_{S_4}((1,2))$.
Sprawdzamy warunek

$$(1,2) = (\sigma(1), \sigma(2)).$$

	1	2	3	4
σ_1	1	2	3	4
σ_2	1	2	4	3
σ_3	2	1	3	4
σ_4	2	1	4	3

$C_{S_4}((1,2)(3,4))$.
Sprawdzamy warunek

$$(1,2)(3,4) = (\sigma(1), \sigma(2))(\sigma(3), \sigma(4)).$$

	1	2	3	4
σ_1	1	2	3	4
σ_2	1	2	4	3
σ_3	2	1	3	4
σ_4	2	1	4	3
σ_5	3	4	1	2
σ_6	3	4	2	1
σ_7	4	3	1	2
σ_8	4	3	2	1

$C_{S_4}((1,2,3,4))$.
Sprawdzamy warunek

$$(1,2,3,4) = (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4)).$$

	1	2	3	4
σ_1	1	2	3	4
σ_2	2	3	4	1
σ_3	3	4	1	2
σ_4	4	1	2	3

Zadanie 15 (1)

$$a := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad b := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$a \cdot b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$a \neq \mathrm{Id}, \qquad b \neq \mathrm{Id},$$

$$a^2 = \mathrm{Id}, \qquad b^2 = \mathrm{Id},$$

$$\mathrm{ord}(a) = 2. \qquad \mathrm{ord}(b) = 2.$$

$$a \cdot b \neq \mathrm{Id},$$

$$(a \cdot b)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \mathrm{Id},$$

$$(a \cdot b)^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \mathrm{Id},$$

$$\vdots$$

$$(a \cdot b)^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \mathrm{Id}, \qquad \text{[Indukcja]}$$

$$\mathrm{ord}(a \cdot b) = \infty.$$

$$a := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad b := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$a \cdot b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$a \neq \mathrm{Id},$$

$$a^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \neq \mathrm{Id}$$

$$a^4 = \mathrm{Id}$$

$$\mathrm{ord}(a) = 4.$$

$$b \neq \mathrm{Id},$$

$$b^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathrm{Id}$$

$$b^3 = \mathrm{Id}$$

$$\mathrm{ord}(b) = 3.$$

$$\mathrm{ord}(a \cdot b) = \infty.$$