Wyznaczanie podgrup grupy skończonej – „metoda”

Dana jest grupa

$$G = \{1 = g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}\},$$

o n elementach, gdzie $g_0 = 1$ jest elementem neutralnym.

Metoda znajdowania podgrup grupy G

0° Na listę podgrup wpisujemy zbiór $\{1\}$.

1° Dla każdego $i = 1, \ldots, n-1$ znajdujemy podgrupę $\langle g_i \rangle$.

Z powyższej listy usuwamy powtarzające się podgrupy, pozostałe wpisujemy na listę podgrup i przechodzimy do kroku 2°.

k° $(k \geq 2)$

Niech $\langle g_i \rangle$, $i \in I$, będą podgrupami znalezionymi w kroku 1°.

Niech $\langle g_{j,1}, \ldots, g_{j,k-1} \rangle$, $j \in J_{k-1}$, będą podgrupami znalezionymi w kroku $(k-1)^\circ$.

Dla każdej pary (i, j), $i \in I$, $j \in J_{k-1}$, takiej, że

1. $\langle g_i \rangle \not\subseteq \langle g_{j,1}, \ldots, g_{j,k-1} \rangle$ i $\langle g_i \rangle \not\supseteq \langle g_{j,1}, \ldots, g_{j,k-1} \rangle$,
2. $[G : \langle g_i \rangle] \notin \mathbb{P}$ i $[G : \langle g_{j,1}, \ldots, g_{j,k-1} \rangle] \notin \mathbb{P}$,
3. $\frac{|\langle g_i \rangle| \cdot |\langle g_{j,1}, \ldots, g_{j,k-1} \rangle|}{|\langle g_i \rangle \cap \langle g_{j,1}, \ldots, g_{j,k-1} \rangle|} \leq \frac{|G|}{2}$,

znajdujemy podgrupę $\langle g_i, g_{j,1}, \ldots, g_{j,k-1} \rangle$.

Z powyższej listy usuwamy powtarzające się podgrupy (w tym podgrupy znalezione we wcześniejszych krokach), pozostałe wpisujemy na listę podgrup.

Jeśli w powyższym korku nie znaleźliśmy żadnej nowej podgrupy, to przechodzimy do kroku ∞°.

W przeciwnym wypadku przechodzimy do kroku $(k+1)^\circ$.

∞° Jeśli wśród znalezionych podgrup nie ma (całej) grupy G, to wpisujemy ją na listę podgrup.

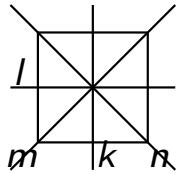
Wyznaczanie podgrup grupy skończonej – uwagi

- Jeśli $H \leq G$, to $[G : H] = \frac{|G|}{|H|}$ (indeks podgrupy H w grupie G).
- Jeśli $g \in G$ i $|G| < \infty$, to
$$\langle g \rangle = \{1, g, g^2, \ldots, g^{m-1}\rangle$$
gdzie m jest najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą k taką, że $g^k = 1$.
Warto przy tym pamiętać, że $g^k = g^{k-1}g$.
- Jeśli $g, g_1, \ldots, g_{k-1} \in G$, $H := \langle g \rangle$, $K := \langle g_1, \ldots, g_{k-1}\rangle$ i grupa G jest abelowa, to
$$\langle g, g_1, \ldots, g_{k-1}\rangle = \{ab : a \in H \text{ i } b \in K\}.$$
- Jeśli $g, g_1, \ldots, g_{k-1} \in G$, $H := \langle g \rangle$, $K := \langle g_1, \ldots, g_{k-1}\rangle$, to
$$\langle g, g_1, \ldots, g_{k-1}\rangle = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots,$$
gdzie
  - $A_0 := \{1\}$,
  - $A_{2i-1} := \{ab : a \in A_{2i-2},\ b \in H\} \setminus (A_0 \cup \cdots \cup A_{2i-2})$, $(i > 0)$,
  - $A_{2i} := \{ab : a \in A_{2i-1},\ b \in K\} \setminus (A_0 \cup \cdots \cup A_{2i-1})$, $(i > 0)$.
- Jeśli w rozważanej grupie działaniem jest dodawanie, to stosujemy notację addytywną, a wiec w szczególności piszemy 0 zamiast 1, ng zamiast g^n, $a + b$ zamiast ab.

Podgrupy grupy D_4 I

Przypomnijmy, że

$$D_4 = \{\mathrm{Id}, O_{90^\circ}, O_{180^\circ}, O_{270^\circ}, S_k, S_l, S_m, S_n\}.$$



0° [Na listę podgrup wpisujemy zbiór $\{1\}$.]

$\{\mathrm{Id}\}$. ✓

1° [Dla każdego $i = 1, \ldots, n-1$ znajdujemy podgrupę $\langle g_i \rangle$.]

$\langle O_{90^\circ} \rangle = \{\mathrm{Id}, O_{90^\circ}, O_{180^\circ}, O_{270^\circ}\}$ ✓

$\langle O_{180^\circ} \rangle = \{\mathrm{Id}, O_{180^\circ}\}$ ✓

$\langle O_{270^\circ} \rangle = \{\mathrm{Id}, O_{270^\circ}, O_{180^\circ}, O_{90^\circ}\}$ ✗

$\langle S_k \rangle = \{\mathrm{Id}, S_k\}$ ✓

$\langle S_l \rangle = \{\mathrm{Id}, S_l\}$ ✓

$\langle S_m \rangle = \{\mathrm{Id}, S_m\}$ ✓

$\langle S_n \rangle = \{\mathrm{Id}, S_n\}$ ✓

[Z powyższej listy usuwamy powtarzające się podgrupy, pozostałe wpisujemy na listę podgrup.]

2° [Niech $\langle g_i \rangle$, $i \in I$, będą grupami znalezionymi w kroku 1°.]

$\{g_i : i \in I\} = \{O_{90^\circ}, O_{180^\circ}, S_k, S_l, S_m, S_n\}$

[Niech $\langle g_{j,1}, \ldots, g_{j,k-1} \rangle$, $j \in J_{k-1}$, będą grupami znalezionymi w kroku $(k-1)^\circ$.]

$\{g_{j,1} : j \in J\} = \{O_{90^\circ}, O_{180^\circ}, S_k, S_l, S_m, S_n\}$.

Zatem musimy zbadać 6^2 par (a, b), $a, b \in \{O_{90^\circ}, O_{180^\circ}, S_k, S_l, S_m, S_n\}$.

Wystarczy zbadać $\binom{6}{2} = 15$ par $\{a, b\}$, $a, b \in \{O_{90^\circ}, O_{180^\circ}, S_k, S_l, S_m, S_n\}$.

Podgrupy grupy D_4 II

[Nie musimy badać par $\{a, b\}$ takich, że $\langle a\rangle \subseteq \langle b\rangle$ lub $\langle a\rangle \supseteq \langle b\rangle$.]

Nie musimy badać pary $\{O_{90^\circ}, O_{180^\circ}\}$.

[Nie musimy badać par $\{a, b\}$ takich, że $[D_4 : \langle a\rangle] \in \mathbb{P}$ lub $[D_4 : \langle b\rangle] \in \mathbb{P}$.]

Mamy

$$[D_4 : \langle O_{90^\circ}\rangle] = 2, \qquad [D_4 : \langle O_{180^\circ}\rangle] = 4, \qquad [D_4 : \langle S_k\rangle] = 4,$$

$$[D_4 : \langle S_l\rangle] = 4, \qquad [D_4 : \langle S_m\rangle] = 4, \qquad [D_4 : \langle S_n\rangle] = 4.$$

Zatem nie musimy badać par $\{O_{90^\circ}, S_k\}$, $\{O_{90^\circ}, S_l\}$, $\{O_{90^\circ}, S_m\}$, $\{O_{90^\circ}, S_n\}$.

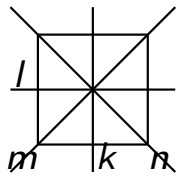
[Nie musimy badać par $\{a, b\}$ takich, że $\frac{|\langle a\rangle|\cdot|\langle b\rangle|}{|\langle a\rangle\cap\langle b\rangle|} > \frac{|D_4|}{2}$]

Dla pozostałych 10 par $\{a, b\}$ mamy, $|\langle a\rangle| = 2 = |\langle b\rangle|$ oraz $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 1$, więc niczego nowego nie odrzucamy.

Policzymy $\langle O_{180^\circ}, S_k\rangle$.

[$\langle a, b\rangle = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots$, gdzie

- $A_0 := \{1\}$,
- $A_{2i-1} := \{cd : c \in A_{2i-2}, d \in \langle a\rangle\} \setminus (A_0 \cup \cdots \cup A_{2i-2})$, $(i > 0)$,
- $A_{2i} := \{cd : c \in A_{2i-1}, d \in \langle b\rangle \in K\} \setminus (A_0 \cup \cdots \cup A_{2i-1})$, $(i > 0)$.]



[$\langle O_{180^\circ}\rangle = \{\mathrm{Id}, O_{180^\circ}\}$, $\langle S_k\rangle = \{\mathrm{Id}, S_k\}$.]

Mamy

$$\langle O_{180^\circ}, S_k\rangle = \{\underbrace{\mathrm{Id}}_{0}, \underbrace{\mathrm{Id}\circ\mathrm{Id} = \cancel{\mathrm{Id}}, \mathrm{Id}\circ O_{180^\circ} = O_{180^\circ}}_{1}, \underbrace{O_{180^\circ}\circ\mathrm{Id} = \cancel{O_{180^\circ}}, O_{180^\circ}\circ S_k = S_l}_{2},$$

$$\underbrace{S_l\circ\mathrm{Id} = \cancel{S_l}, S_l\circ O_{180^\circ} = S_k}_{3}, \underbrace{S_k\circ\mathrm{Id} = \cancel{S_k}, S_k\circ S_k = \cancel{\mathrm{Id}}}_{4}\}.$$

Podgrupy grupy D_4 – uwagi

$$\langle O_{180^\circ}, S_k\rangle = \{\underbrace{\mathrm{Id}}_{0}, \underbrace{\mathrm{Id}\circ\mathrm{Id} = \cancel{\mathrm{Id}}, \mathrm{Id}\circ O_{180^\circ} = O_{180^\circ}}_{1}, \underbrace{O_{180^\circ}\circ\mathrm{Id} = \cancel{O_{180^\circ}}, O_{180^\circ}\circ S_k = S_l}_{2},$$
$$\underbrace{S_l\circ\mathrm{Id} = \cancel{S_l}, S_l\circ O_{180^\circ} = S_k}_{3}, \underbrace{S_k\circ\mathrm{Id} = \cancel{S_k}, S_k\circ S_k = \cancel{\mathrm{Id}}}_{4}\}.$$

Uwagi praktyczne

- Nie trzeba przemnażać przez element neutralny.
- Jeśli liczba znalezionych elementów jest większą niż $|G|/2$, to wiadomo, że poszukiwana podgrupa to G.

Z drugiej uwagi wynika, dlaczego nie trzeba sprawdzać par $\{a, b\}$ takich, że

$$\frac{|\langle a\rangle|\cdot|\langle b\rangle|}{|\langle a\rangle\cap\langle b\rangle|} > \frac{|G|}{2}.$$

Istotnie, z zadania 16 $|\frac{|\langle a\rangle|\cdot|\langle b\rangle|}{|\langle a\rangle\cap\langle b\rangle|}| = |\langle a\rangle\cdot\langle b\rangle|$.

Zatem w powyższej sytuacji, $|\langle a, b\rangle| > \frac{|G|}{2}$, więc $\langle a, b\rangle = G$.

Kontynuując, mamy

$\langle O_{180^\circ}, S_k\rangle = \{\mathrm{Id}, O_{180^\circ}, S_l, S_k\}$ ✓
$\langle O_{180^\circ}, S_l\rangle = \{\mathrm{Id}, O_{180^\circ}, S_k, S_l\}$ ✗
$\langle O_{180^\circ}, S_m\rangle = \{\mathrm{Id}, O_{180^\circ}, S_n, S_m\}$ ✓
$\langle O_{180^\circ}, S_n\rangle = \{\mathrm{Id}, O_{180^\circ}, S_m, S_n\}$ ✗
$\langle S_k, S_l\rangle = \{\mathrm{Id}, S_k, O_{180^\circ}, S_l\}$ ✗
$\langle S_k, S_m\rangle = D_4$ ✓
[To można zastosować drugą uwagę praktyczną.]
$\langle S_k, S_n\rangle = D_4$ ✗
$\langle S_l, S_m\rangle = D_4$ ✗
$\langle S_l, S_n\rangle = D_4$ ✗
$\langle S_m, S_n\rangle = \{\mathrm{Id}, S_m, O_{180^\circ}, S_n\}$ ✗

3° Dla wszystkich elementów a znalezionych w kroku 1° oraz par $\{b, c\}$ znalezionych w kroku 2° mamy

$$\langle a\rangle \subseteq \langle b, c\rangle \qquad \text{lub} \qquad [G : \langle b, c\rangle] = 2 \in \mathbb{P}.$$

Zatem w kroku 3° nic nie trzeba robić.

[To będzie ogólna prawidłowość w zadaniach, które będziemy rozwiązywać na ćwiczeniach.]

∞° [Jeśli wśród znalezionych podgrup nie ma (całej) grupy G, to wpisujemy ją na listę podgrup.]

Grupy D_4 jest na liście podgrup.

Odpowiedź: Grupa D_4 ma 10 podgrup: $\{\mathrm{Id}\}$, $\{\mathrm{Id}, S_k\}$, $\{\mathrm{Id}, S_l\}$, $\{\mathrm{Id}, S_m\}$, $\{\mathrm{Id}, S_n\}$, $\{\mathrm{Id}, O_{180^\circ}\}$, $\{\mathrm{Id}, O_{90^\circ}, O_{180^\circ}, O_{270^\circ}\}$, $\{\mathrm{Id}, S_k, S_l, O_{180^\circ}\}$, $\{\mathrm{Id}, S_m, S_n, O_{180^\circ}\}$, D_4.

Niech n będzie dodatnią liczbą naturalną oraz $i_1, \ldots, i_k$ parami różnymi elementami zbioru $\{1, \ldots, n\}$.
Wtedy $(i_1, \ldots, i_k)$ jest permutacją daną wzorem

$$(i_1, \ldots, i_k)(i) := \begin{cases} i_{j+1} & \text{jeśli } j = i_j \text{ dla } j = 1, \ldots, k-1, \\ i_1 & \text{jeśli } i = i_k, \\ i & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

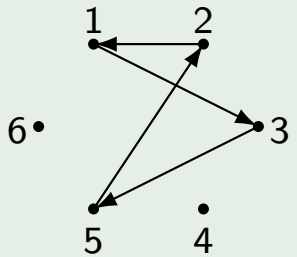
Permutacje powyższej postaci nazywamy cyklami.

Przykład

Jeśli $n = 6$, to

$$(1, 3, 5, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Powyższy cykl możemy zilustrować rysunkiem



Cykle $(i_1, \ldots, i_k)$ oraz $(j_1, \ldots, j_l)$ nazywamy rozłącznymi, jeśli $\{i_1, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, \ldots, j_l\} = \varnothing$.
Każdą permutację można przedstawić jako złożenie cykli rozłącznych.

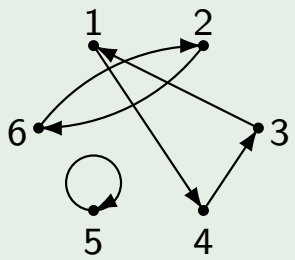
Przykład

Mamy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1,4,3) \circ (2,6) \circ (5) = (1,4,3) \circ (2,6).$$

[Zwykle pomijamy cykle długości 1.]

Graficznie możemy przedstawić powyższą permutację następująco:



Grupa A_4

Przypomnijmy, że:

- nieporządkiem w permutacji σ nazywamy każdą parę (i, j) taką, że $i < j$ oraz $\sigma(i) > \sigma(j)$;
- znakiem $\operatorname{sgn}(\sigma)$ permutacji nazywamy liczbę $(-1)^{\operatorname{np}(\sigma)}$, gdzie $\operatorname{np}(\sigma)$ jest liczbą nieporządków w permutacji σ;
- permutację σ nazywamy parzystą (nieparzystą), jeśli $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ ($\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$).

Permutacje parzyste tworzą podgrupę grupy S_n, którą oznaczamy A_n i nazywamy n-tą grupą alternującą.

Chcemy opisać elementy grupy A_4.

Wiadomo, że

- $\operatorname{sgn}(i_1, \ldots, i_k) = (-1)^{k-1}$;
- $\operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\tau) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma)$.

Powyższe obserwacje implikują, że w grupie A_4 mamy trzy rodzaje elementów:

- identyczność;
- cykle długości 3;
- złożenia dwóch cykli długości 2.

Ostatecznie

$$A_4 = \{\mathrm{Id}, (1,2,3), (1,3,2), (1,2,4), (1,4,2), (1,3,4), (1,4,3), (2,3,4), (2,4,3), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}.$$

Jeśli $H \leq G$, to zbiory postaci

$$aH := \{ah : h \in H\},$$

dla $a \in G$, nazywamy warstwami lewostronnymi grupy G względem podgrupy H.

Analogicznie, zbiory Ha, nazywamy warstwami prawostronnymi grupy G względem podgrupy H.

Warto pamiętać, że:

- jeśli $a, b \in G$, to albo $aH = bH$ albo $aH \cap bH = \varnothing$;
- liczba warstw lewostronnych jest równa $[G : H]$.

Analogicznie fakty mamy dla warstw prawostronnych.

Przykład

Wyznaczymy warstwy grupy $\mathbb{Z}_{36}^{\times}$ względem podgrupy $H := \{1, 13, 25\}$.

Przypomnijmy, że

$$\mathbb{Z}_{36}^{\times} = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35\}.$$

Wtedy

$1 \cdot H = H = \{1, 13, 25\}$,
$5 \cdot H = \{5 \cdot 1, 5 \cdot 13, 5 \cdot 25\} = \{5, 29, 17\}$,
$7 \cdot H = \{7 \cdot 1, 7 \cdot 13, 7 \cdot 25\} = \{7, 19, 31\}$,
$11 \cdot H = \{11, 23, 35\}$.

Ponieważ grupa $\mathbb{Z}_{36}^{\times}$ jest abelowa, więc warstwy lewo- i prawostronne są identyczne.

Centralizator I

Definicja

Centralizatorem elementu a grupy G nazywamy zbiór

$$C_G(a) := \{b \in G : ab = ba\}.$$

Uwaga

Zauważmy, że

$$ab = ba \iff a = bab^{-1}.$$

Fakt

Jeśli σ jest permutacją, to

$$\sigma \circ (i_{1,1}, \ldots, i_{1,l_1}) \cdots (i_{k,1}, \ldots, i_{k,l_k}) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i_{1,1}), \ldots, \sigma(i_{1,l_1})) \cdots (\sigma(i_{k,1}), \ldots, \sigma(i_{k,l_k})).$$

$$\sigma \circ (i_{1,1}, \ldots, i_{1,l_1}) \cdots (i_{k,1}, \ldots, i_{k,l_k}) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i_{1,1}), \ldots, \sigma(i_{1,l_1})) \cdots (\sigma(i_{k,1}), \ldots, \sigma(i_{k,l_k})).$$

Fakt

Jeśli $l_1, \ldots, l_k, m_1, \ldots, m_n > 1$, liczby $i_{p,q}$ są parami różne, liczby $j_{p,q}$ są parami różne, to równość

$$(i_{1,1}, \ldots, i_{1,l_1}) \cdots (i_{k,1}, \ldots, i_{k,l_k}) = (j_{1,1}, \ldots, j_{1,m_1}) \cdots (j_{n,1}, \ldots, j_{n,m_n})$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy:

- $k = n$;
- istnieje $\tau \in S_k$ oraz $r_1, \ldots, r_k$ takie, że:
  - $l_p = m_{\tau(p)}$ dla każdego $p = 1, \ldots, k$;
  - $i_{p,1} = j_{\tau(p),r_p}$, $i_{p,2} = j_{\tau(p),r_p+1}$, $\ldots$, $i_{p,l_p} = j_{\tau(p),r_p+l_p-1}$, gdzie $j_{\tau(p),q} := j_{\tau(p),q-l_p}$, gdy $q > l_p$.

Wniosek

Jeśli

$$\sigma = (i_{1,1}, \ldots, i_{1,l_1}) \cdots (i_{k,1}, \ldots, i_{k,l_k}),$$

to

$$|C_{S_n}(\sigma)| = (n - (l_1 + \cdots + l_k))! \prod_{m \geq 2} [v_m! \cdot m^{v_m}],$$

gdzie v_m jest liczbą indeksów i takich, że $l_i = m$.

Centralizator – przykład I

Znajdziemy $C_{S_9}((1,3)(5,7)(2,6,4))$.

Szukamy permutacji σ takich, że

$$(1,3)(5,7)(2,6,4) = (\sigma(1),\sigma(3))(\sigma(5),\sigma(7))(\sigma(2),\sigma(6),\sigma(4)).$$

Stąd

$$(2,6,4) = (\sigma(2),\sigma(6),\sigma(4))$$

oraz

$$(1,3) = (\sigma(1),\sigma(3)) \qquad \text{i} \qquad (5,7) = (\sigma(5),\sigma(7))$$

lub

$$(1,3) = (\sigma(5),\sigma(7)) \qquad \text{i} \qquad (5,7) = (\sigma(1),\sigma(3)).$$

Ponieważ

$$(2,6,4) = (6,4,2) = (4,2,6),$$

więc

$$(2,6,4) = (\sigma(2),\sigma(6),\sigma(4))$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sigma(2) = 2, \qquad \sigma(6) = 6, \qquad \sigma(4) = 4,$$

lub

$$\sigma(2) = 6, \qquad \sigma(6) = 4, \qquad \sigma(4) = 2,$$

lub

$$\sigma(2) = 4, \qquad \sigma(6) = 2, \qquad \sigma(4) = 6.$$

Analogicznie analizujemy pozostałe równości.

Zauważmy jeszcze, że w każdym w powyższych przypadków

$$\sigma(8) = 8 \qquad \text{i} \qquad \sigma(9) = 9 \qquad \text{lub} \qquad \sigma(8) = 9 \qquad \text{i} \qquad \sigma(9) = 8.$$

$$(1,3)(5,7)(2,6,4) = (\sigma(1),\sigma(3))(\sigma(5),\sigma(7))(\sigma(2),\sigma(6),\sigma(4)).$$

Podsumowując, otrzymujemy następujące permutacje:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
σ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
σ_2	1	2	3	4	5	6	7	9	8
σ_3	1	6	3	2	5	4	7	8	9
σ_4	1	6	3	2	5	4	7	9	8
σ_5	1	4	3	6	5	2	7	8	9
σ_6	1	4	3	6	5	2	7	9	8
σ_7	1	2	3	4	7	6	5	8	9
$\vdots$									
σ_{12}	1	4	3	6	7	2	5	9	8
σ_{13}	3	2	1	4	5	6	7	8	9
$\vdots$									
σ_{24}	3	4	1	6	7	2	5	9	8
σ_{25}	5	2	7	4	1	6	3	8	9
$\vdots$									
σ_{48}	7	4	5	6	3	2	1	9	8

Przypomnienie (z wykładu)

Jeśli $g \in G$, to:

- $\operatorname{ord}(g) := |\langle g \rangle|$ (rząd elementu g);
- $\operatorname{ord}(g) = \min\{n \in \mathbb{N}_+ : g^n = 1\}$.

Policzymy $\operatorname{ord}(A)$, gdzie

$$A := \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}).$$

Mamy

$$A^1 = A \neq \mathrm{Id},$$

$$A^2 = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right] \neq \mathrm{Id},$$

$$A^3 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] \neq \mathrm{Id},$$

$$A^4 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] = \mathrm{Id},$$

a więc $\operatorname{ord}(A) = 4$.

Wskazówka praktyczna

Jeśli $g^m = 1$, to $m \mid \operatorname{ord}(g)$.

W powyższym przykładzie $A^2 = -\mathrm{Id}$, więc łatwo widać, że $A^4 = \mathrm{Id}$.
Zatem $\operatorname{ord}(A) \mid 4$, więc $\operatorname{ord}(A) = 1, 2, 4$.
Ponieważ $A \neq \mathrm{Id} \neq A^2$, więc $\operatorname{ord}(A) = 4$. [Nie trzeba było liczyć A^3.]